



research & education
More of Mathematics

12. Jg. (2025), Nr. 2

Konferenzband zum

Tag der Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Christian Spreitzer

Editorial	3
------------------------	---

Tag der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich

Eva Beck

Schriftliche Subtraktion im neuen Volksschullehrplan – mehr als „einfach nur ausrechnen“	4
---	---

Andrea Karner, Lisa Meyer

Rechenschwierigkeiten in der Sekundarstufe I	
Lösungsansätze und Methoden	15

Andrea Karner, Lisa Meyer, Gabriele Sickl

Negative Zahlen in der 6. Schulstufe	
Eine aktive Erarbeitung neuer Grundvorstellungen	29

Monika Musilek

mathektiv	43
------------------------	----

Lukas Prenner

Wenn die Welt ein Dorf wäre ...	
Ein handlungsorientierter Zugang zur Prozentrechnung von der Primarstufe zur Sekundarstufe I	59

Felix Woltron

Nachdenken statt Nach-Denken	
Wie kann Problemlösen im Regelunterricht realisiert werden?	74

Tagung Lernvideos in Mathematik an der Universität Wien

Elisabeth Mürwald-Scheifinger

3. Tagung Lernvideos in Mathematik – Werkzeug der Zukunft!?	
Nachlese	82

András Bátkai, Brigitta Békési

Hausübungen mit Ton und Bild	
Ein konstruktivistischer Ansatz in der Hochschullehre	86

Martina Greiler, Tanja Lobnig

Maßbeziehungen in der Volksschule	
Studierende entwickeln Lehr-Lern-Videos.....	99

David Schwarzkopf

Ad-hoc-Erklärvideos von Schüler*innen	
Qualitätsanalyse spontaner Produktionen	112

Gastbeitrag

Florence Christianah Awoniyi

Exploring Attitudinal Predictors of Mathematics Achievement Among Senior High School Students in Ghana: A Theory of Planned Behaviour Approach

Mathematics Attitudes and Performance in Cape Coast..... 124

Impressum

Impressum..... 146

Editorial

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1478>

Am 24. Februar 2025 fand an der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich der schon traditionelle Tag der Mathematik mit einem vielfältigen Programm aus Vorträgen und Workshops zum Thema „Mathematik aktiv“ statt. Die Tagung wurde von Rektor Univ.-Prof. HR MMag. DDr. Erwin Rauscher fulminant eröffnet und richtete sich an Lehrkräfte der Primarstufe und Mathematik-Lehrende der Sekundarstufe, die im Austausch mit Expert*innen zu neuen Ideen, Anregungen und Impulsen für Ihren Unterricht gelangen konnten. Darüber hinaus präsentierten Verlage in einer kleinen Mathematik-Messe neue Schulbücher und Unterrichtsmaterialien. Der Plenarvortrag „Mathektiv! – mathematisch aktiv sein“ von Monika Musilek widmete sich mathematischen Spielen, die als Ausgangspunkt für reichhaltiges mathematisches Lernen genutzt werden können. Forschungsergebnisse zeigen, dass Spiele nicht nur die Motivation und das Engagement steigern, sondern auch ein vertieftes Verständnis fördern können. Das Organisationsteam dankt allen, die zum Gelingen dieser Veranstaltung beigetragen haben.

Diese „More of Mathematics“-Ausgabe von R&E-SOURCE ist nicht nur die Nachlese zum Tag der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich, sondern beinhaltet auch Beiträge zur dritten Tagung „Lernvideos in Mathematik“, die von 20. bis 22. Februar 2025 an der Universität Wien stattfand. Ergänzt wird diese Ausgabe noch durch einen Gastbeitrag von Florence Christianah Awoniyi zu einstellungsbezogenen Prädiktoren für den Mathematikerfolg von Oberstufenschüler*innen in Ghana.

Christian Spreitzer

Schriftliche Subtraktion im neuen Volksschullehrplan – mehr als „einfach nur ausrechnen“

Eva Beck¹

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1465>

Zusammenfassung

Die schriftliche Subtraktion ist in den Kompetenzbeschreibungen des Mathematikunterrichts der Volksschule verankert und muss daher gezielt in den Unterricht integriert werden. Während im österreichischen Lehrplan der Volksschule bisher das Ergänzungsverfahren verbindlich vorgeschrieben war, bietet der aktuelle Lehrplan den Lehrkräften die Freiheit, das geeignete Verfahren selbst zu wählen, wobei die Vermittlung schriftlicher Rechenverfahren verständnisbasiert erfolgen soll. Dieser Artikel befasst sich mit einer handlungsorientierten Einführung der schriftlichen Subtraktion. Dabei wird besonderes Augenmerk auf anschauliche Darstellungen, den gezielten Einsatz von didaktischen Materialien sowie das schrittweise Erarbeiten der Rechenschritte gelegt. Exemplarisch werden drei Verfahren vorgestellt: Abziehen mit Entbündeln, Ergänzen mit Erweitern und Ergänzen durch Auffüllen des Subtrahenden. Abschließend erfolgt eine vergleichende Gegenüberstellung dieser Verfahren, um deren Vor- und Nachteile zu analysieren und Implikationen für den Unterricht abzuleiten.

Stichwörter: schriftliche Subtraktion, handlungsorientiert, verständnisbasiert

1 Einleitung

Schriftliche Rechenverfahren helfen Lernenden, komplexere Aufgaben systematisch und einfach zu lösen. Sie vereinfachen das Rechnen, sind breit einsetzbar und vermitteln eine hohe Rechensicherheit. Trotz digitaler Hilfsmittel bleiben sie relevant, da sie grundlegende Rechenfertigkeiten sichern. Für ihre Einführung sind ein solides Stellenwertverständnis und sichere Kopfrechenfähigkeiten erforderlich (Padberg & Benz, 2021, S. 245).

Obgleich schriftliche Verfahren Struktur bieten und eine Entlastung des Arbeitsgedächtnisses bewirken, besteht die Gefahr einer mechanischen Anwendung, bei der die zugrunde liegenden Konzepte nicht vollständig erfasst werden. Eine sorgfältige, verständnisorientierte Einführung, wie sie im Lehrplan der Volksschule gefordert wird (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung [BMBWF], 2023, S. 80), ist daher von entscheidender

¹ KPH Wien/Niederösterreich, 1210 Wien, Mayerweckstraße 1

E-Mail: eva.beck@kphvie.ac.at

Bedeutung – insbesondere bei der schriftlichen Subtraktion, die Herausforderungen wie den Umgang mit Überträgen in sich birgt (Padberg & Benz, 2021, S. 247).

Im Gegensatz zum Vorgänger des neuen Lehrplans, der das Ergänzungsverfahren vorschrieb (Wolf, 2019, S. 162), legt der Lehrplan der Volksschule 2023 kein spezifisches Verfahren für die schriftliche Subtraktion fest. Dadurch erhalten Lehrpersonen die Möglichkeit, selbst zwischen den verschiedenen Subtraktionsverfahren zu wählen und ihre methodische Gestaltung flexibel an die individuellen Lernvoraussetzungen der Schüler*innen anzupassen. Diese Wahl erfordert jedoch gründliche didaktische Überlegungen, da jedes Verfahren spezifische Vor- und Nachteile aufweist. Der vorliegende Artikel soll Lehrkräfte bei der Auswahl eines geeigneten Verfahrens zur schriftlichen Subtraktion unterstützen, indem er die verschiedenen Methoden vergleichend analysiert und deren Vor- sowie Nachteile herausarbeitet. Darüber hinaus wird aufgezeigt, wie eine handlungsorientierte Einführung gestaltet werden kann, um ein fundiertes mathematisches Verständnis zu entwickeln.

2 Einführung der schriftlichen Subtraktion in der Primarstufe

2.1 Vorkenntnisse

Für eine erfolgreiche Einführung der schriftlichen Subtraktion sind mehrere grundlegende mathematische Kompetenzen erforderlich. Zunächst müssen die Schüler*innen die Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum zwanzig sicher beherrschen, weil diese als Basis für das Verständnis komplexerer Rechenoperationen dienen. Ein fundiertes Verständnis für Stellenwerte ist ebenso von entscheidender Bedeutung, da das Bewusstsein für die Wertigkeit einzelner Ziffern innerhalb einer Zahl eine unabdingbare Voraussetzung für die korrekte Anwendung schriftlicher Verfahren ist (Schipper, 2009, S. 200). Darüber hinaus ist das Verständnis des Bündelungsprinzips wesentlich. Die Lernenden müssen die Fähigkeit entwickeln, eine Zahl in Zehner und Einer zu zerlegen und sie bei Bedarf neu zu strukturieren, um eventuell erforderliche Umformungen bei der Subtraktion durchführen zu können. Ein weiteres entscheidendes Element ist das Verständnis der Bedeutung von Überträgen. Die Lernenden müssen erkennen, wann und warum ein Übertrag durchgeführt werden muss. Die Festigung dieser grundlegenden mathematischen Konzepte ist die Voraussetzung für eine erfolgreiche Einführung der schriftlichen Subtraktion, die nicht nur auf mechanischem Vorgehen, sondern auch auf einem vertieften mathematischen Verständnis beruht (Schipper et al., 2017, S. 118).

2.2 Verfahren der schriftlichen Subtraktion

Im Gegensatz zur schriftlichen Addition, bei der es im Großen und Ganzen nur ein Verfahren gibt, stehen für die schriftliche Subtraktion verschiedene Verfahren zur Auswahl. Diese unterscheiden sich in der Art der Bestimmung der Differenz und in der Behandlung von Überträgen. Die Ermittlung der Differenz kann grundsätzlich durch *Abziehen* oder durch *Ergänzen* erfolgen (Padberg & Benz, 2021, S. 261).

Beim *Abziehverfahren* wird der Subtrahend stellenweise von den jeweiligen Stellenwerten des Minuenden subtrahiert, wobei die Rechenrichtung von oben nach unten verläuft. Im Gegensatz dazu basiert das *Ergänzungsverfahren* darauf, den Subtrahenden stellenweise zum Minuenden zu ergänzen, wobei die Berechnung von unten nach oben erfolgt. Sind Stellen im Minuenden kleiner als im Subtrahenden, entsteht ein Übertrag. Für die Behandlung dieser Überträge existieren drei unterschiedliche Techniken (Schipper, 2009, S. 200f.).

Die erste Technik, das sogenannte *Entbündeln*, beschreibt den Austausch einer Einheit der größeren Stelle gegen zehn Einheiten der nächstkleineren Stelle. Eine weitere Technik ist das *Erweitern*. Dabei wird der Minuend beispielsweise um zehn Einer erhöht, während der Subtrahend gleichzeitig um einen Zehner vergrößert wird. Durch diese gleichsinnige Veränderung beider Zahlen bleibt die Differenz unverändert. Dieses Verfahren basiert auf dem Gesetz der Konstanz der Differenz, das besagt, dass sich das Ergebnis einer Subtraktion nicht verändert, wenn sowohl der Minuend als auch der Subtrahend um denselben Wert erhöht oder verringert werden. Beim *Auffüllen des Subtrahenden* wird dieser stellenweise so ergänzt, dass er den Wert des Minuenden erreicht. Dabei erfolgt das Auffüllen jeweils bis zur nächsten passenden Stelle, also bis zum nächsthöheren passenden Einer, Zehner, Hunderter usw. (Schipper, 2009, S. 201).

Durch die Verbindung des Abziehverfahrens mit dem Entbündeln und dem Erweitern und des Ergänzungsverfahren mit dem Entbündeln, Erweitern und Auffüllen des Subtrahenden ergeben sich fünf mögliche Subtraktionsverfahren. Die Bezeichnung des Entbündelungsverfahrens als „Borgeverfahren“, wie sie bei Krauthausen (2018, S. 91) verwendet wird, sollte vermieden werden, da hierbei keine Einheiten geborgt, sondern vielmehr eine Einheit in zehn Einheiten des nächstkleineren Stellenwerts entbündelt wird (Schipper et al., 2017, S. 114).

Im Folgenden sollen die drei Verfahren, die in österreichischen Schulbüchern Verwendung finden, näher erörtert werden.

3 Verständnisorientierte Einführung

Die schriftliche Subtraktion wird üblicherweise in der dritten Schulstufe eingeführt, nachdem die schriftliche Addition erarbeitet wurde. Gemäß dem Lehrplan der Volksschule (BMBWF, 2023, S. 79) soll die Vermittlung schriftlicher Rechenverfahren auf einem fundierten Ver-

ständnis der zugrunde liegenden Operationen basieren. Es ist also von zentraler Bedeutung, dass Schüler*innen über ein gefestigtes Verständnis der Subtraktion verfügen, bevor sie mit dem schriftlichen Verfahren vertraut gemacht werden. In den fachdidaktischen Grundsätzen des Lehrplans (BMBWF, 2023, S. 80) wird der Einsatz von strukturierten Materialien, wie beispielsweise Zehnersystemblöcke (Dienes-Material), empfohlen. Um das Stellenwertverständnis der Schüler*innen gezielt zu fördern, sollten die Materialhandlungen mit Zahlenkarten und einer Stellenwerttafel kombiniert werden. Zur Veranschaulichung eines verständnisorientierten Zugangs werden im Folgenden die Subtraktionsverfahren Abziehen mit Entbündeln, Ergänzen mit Erweitern sowie Ergänzen durch Auffüllen des Subtrahenden erläutert. Die methodische Erarbeitung dieser Verfahren wird exemplarisch anhand der Rechnung $582 - 218$, bei der ein Übertrag zu berücksichtigen ist, dargestellt.

3.1 Abziehen mit Entbündeln

Beim Abziehen mit Entbündeln wird lediglich der Minuend umgeformt. Wobei im Falle eines Übertrags eine Einheit eines höheren Stellenwerts aufgelöst und in zehn Einheiten der nächstkleineren Einheit umgewandelt wird, sodass die Subtraktion an der entsprechenden Stelle durchgeführt werden kann.

Zunächst wird der Minuend (582) mit Dienes-Material gelegt. Im Anschluss wird der Subtrahend (218) stellenweise, beginnend an der Einerstelle, weggenommen. Da von zwei Einern keine acht Einer weggenommen werden können, muss ein Zehner in zehn Einer entbündelt werden. Daher wird die Anzahl der Zehner um eins vermindert und die Anzahl der Einer um zehn erhöht. Anschließend kann, wie in den Abbildungen 1 und 2 zu sehen ist, mit sieben Zehnern und zwölf Einern weitergerechnet werden (Matheinklusiv mit PIKAS, o. D.a).

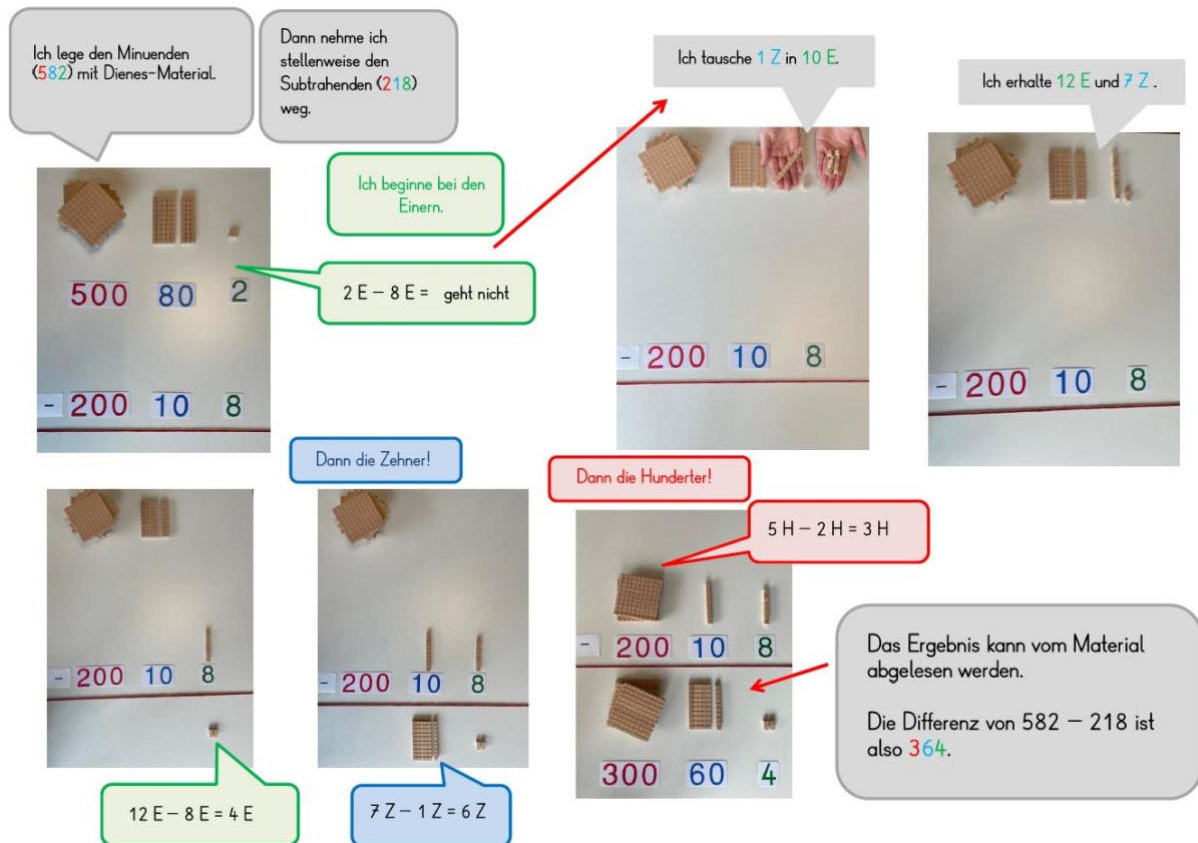


Abbildung 1: Abziehen mit Entbündeln – Materialhandlung

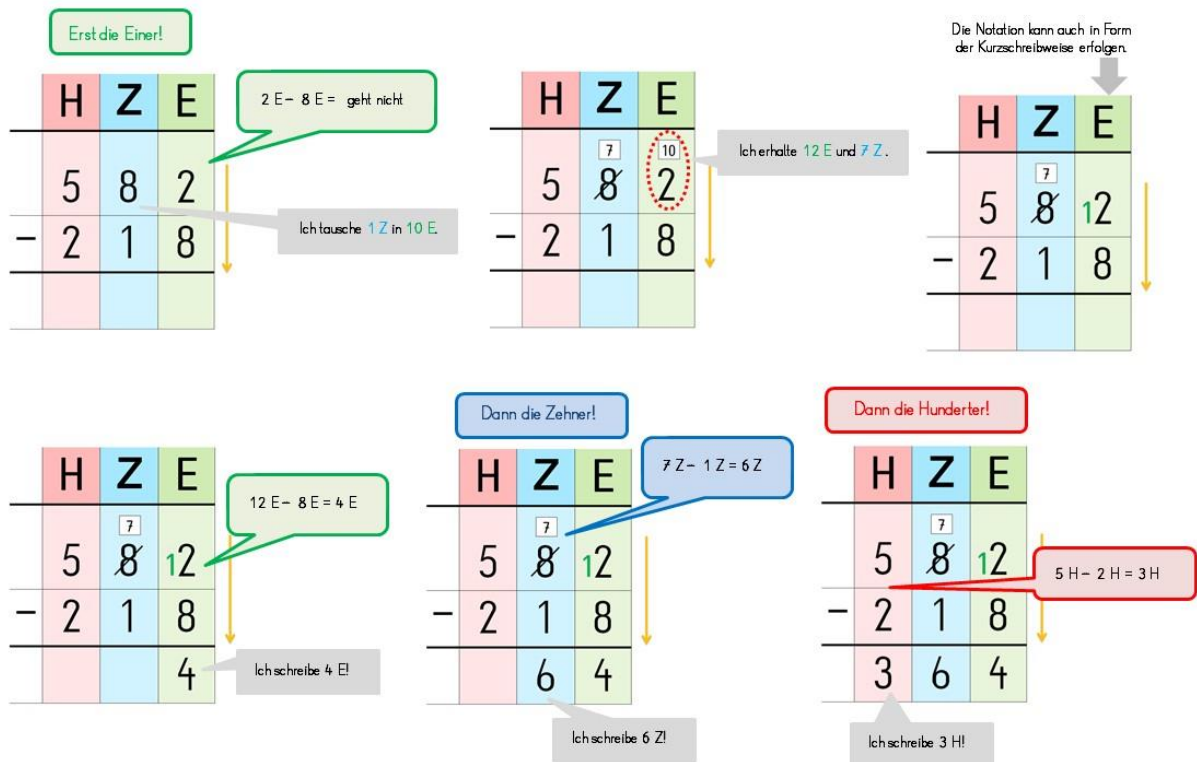


Abbildung 2: Abziehen mit Entbündeln – Notation

3.2 Ergänzen mit Erweitern

Beim Ergänzen durch Erweitern werden der Minuend und der Subtrahend mit Dienes-Material gelegt (siehe Abbildung 3). Anschließend wird stellenweise so viel Material zum Subtrahenden dazugelegt, bis der Minuend erreicht ist. Da es sich bei der exemplarischen Aufgabe um eine Aufgabe mit Übertrag handelt, müssen sowohl der Minuend (582) als auch der Subtrahend (218) um die gleiche Zahl erweitert werden. Diese gleichsinnige Veränderung hat keine Auswirkung auf die Differenz.

Da eine Ergänzung von acht Einern auf zwei Einer nicht möglich ist, werden zur Einerstelle des Minuenden zehn Einer und zur Zehnerstelle des Subtrahenden ein Zehner hinzugefügt. Die vorgenommenen Erweiterungen sind in den beigefügten Abbildungen auf gelben Unterlagen dargestellt. In der Folge kann von acht Einern auf zwölf Einer ergänzt werden. Die entsprechenden Abbildungen zeigen das Material, das ergänzt wird, auf grünen Unterlagen. Die Differenz kann schließlich von den grünen Unterlagen abgelesen werden (siehe Abbildung 3). Darüber hinaus bestehen die Optionen, Material in verschiedenen Farben zu verwenden oder das hinzugefügte Material mit einem gewissen Abstand aufzulegen (Matheinklusiv mit PIKAS, o. D.b).

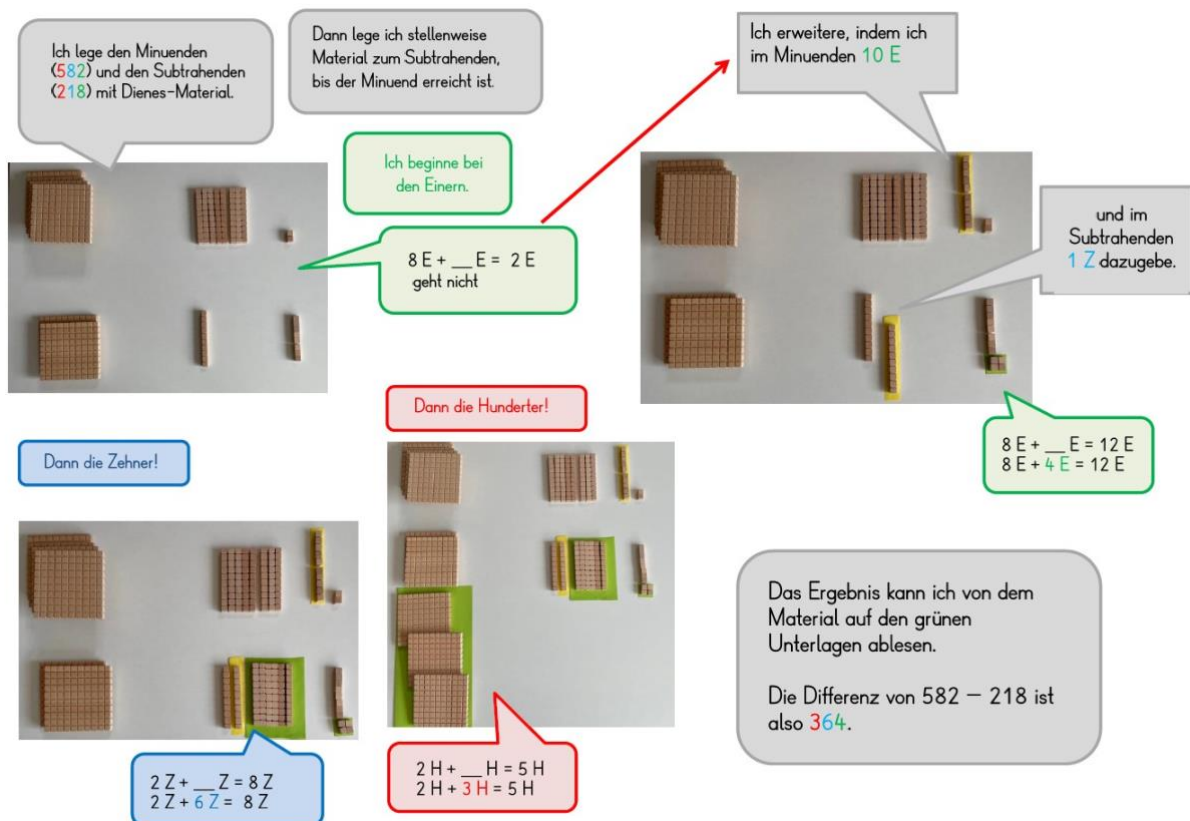


Abbildung 3: Ergänzen mit Erweitern – Materialhandlung

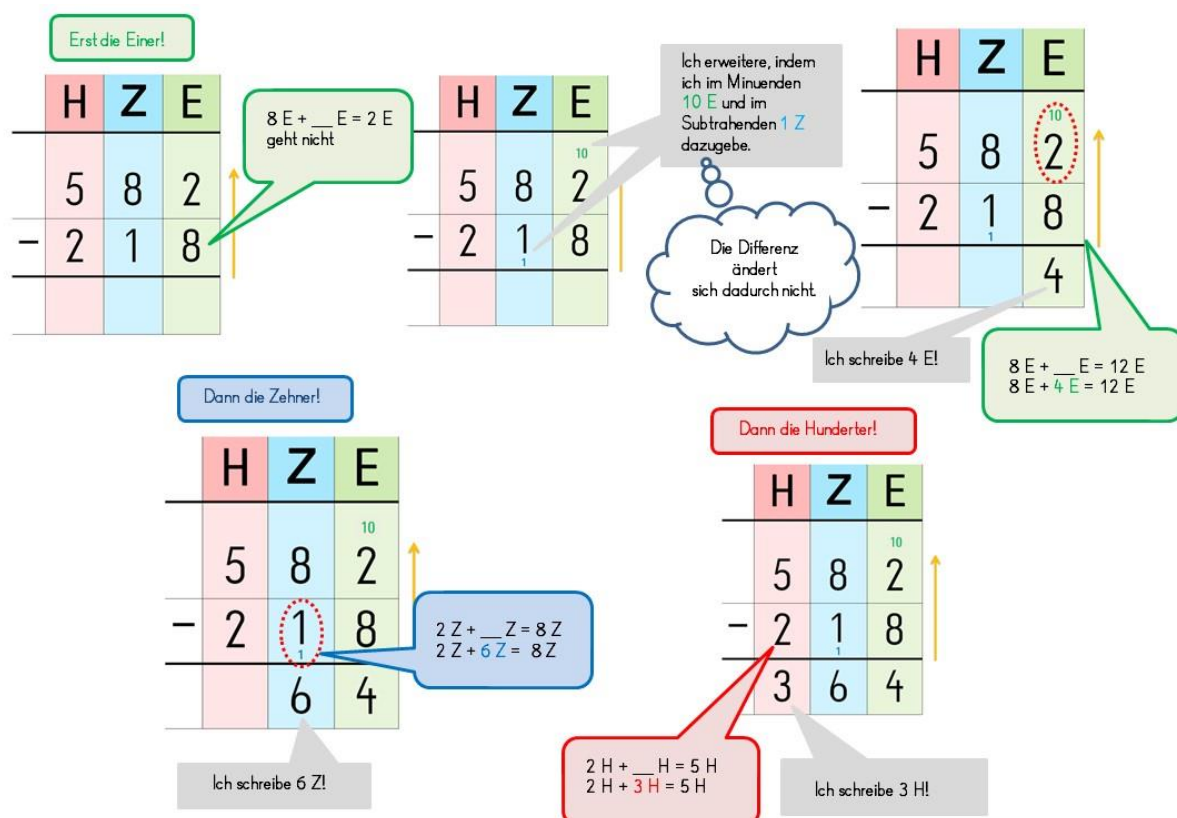


Abbildung 4: Ergänzen mit Erweitern – Notation

3.3 Ergänzen mit Auffüllen des Subtrahenden

Beim Ergänzen mit Auffüllen des Subtrahenden wird der Subtrahend stellenweise auf den Minuenden ergänzt. Im Gegensatz zum Ergänzen mit Erweitern bleibt bei diesem Verfahren der Minuend unverändert. Hierbei wird lediglich der Subtrahend mit Dienes-Material dargestellt und es wird stellenweise auf den Minuenden ergänzt. Sobald ein Stellenwert überschritten wird, muss gebündelt werden. Es werden dann, wie im angeführten Beispiel (siehe Abbildung 5), zehn Einer zu einem Zehner gebündelt (Matheinklusiv mit PIKAS, o. D.c).

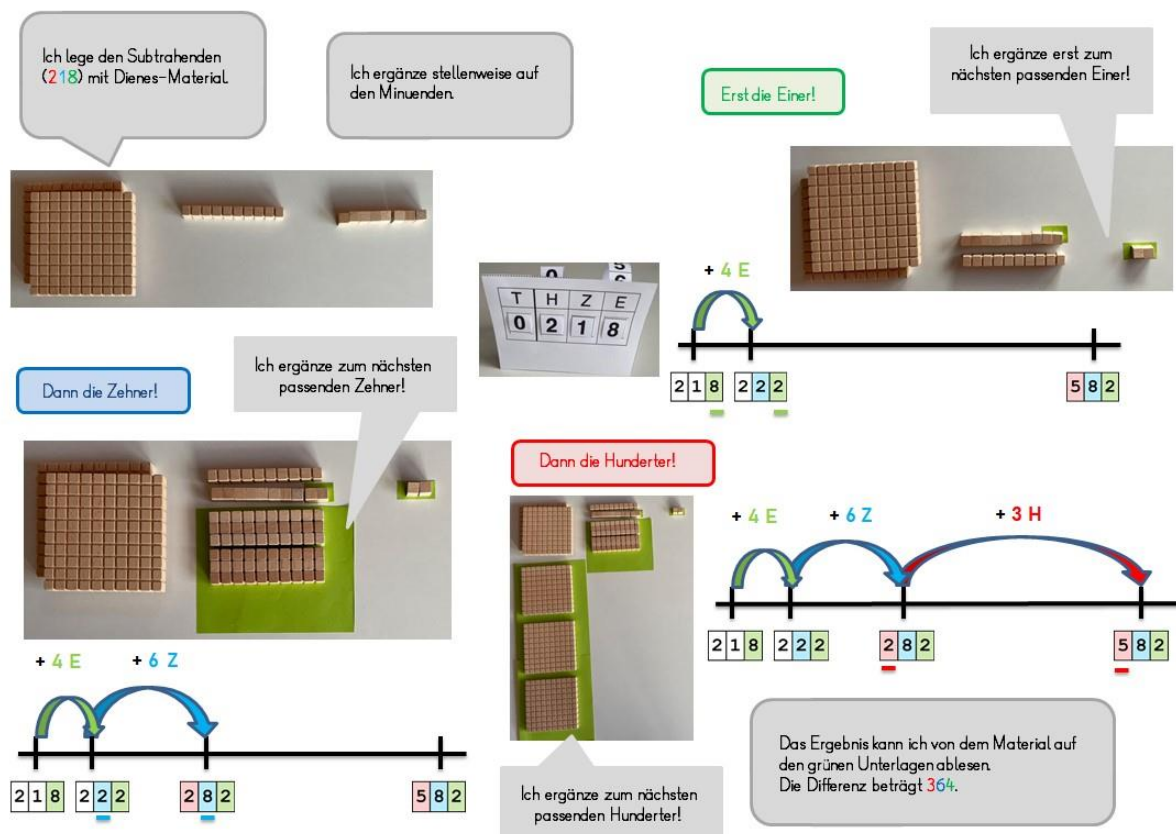


Abbildung 5: Ergänzen mit Auffüllen – Materialhandlung

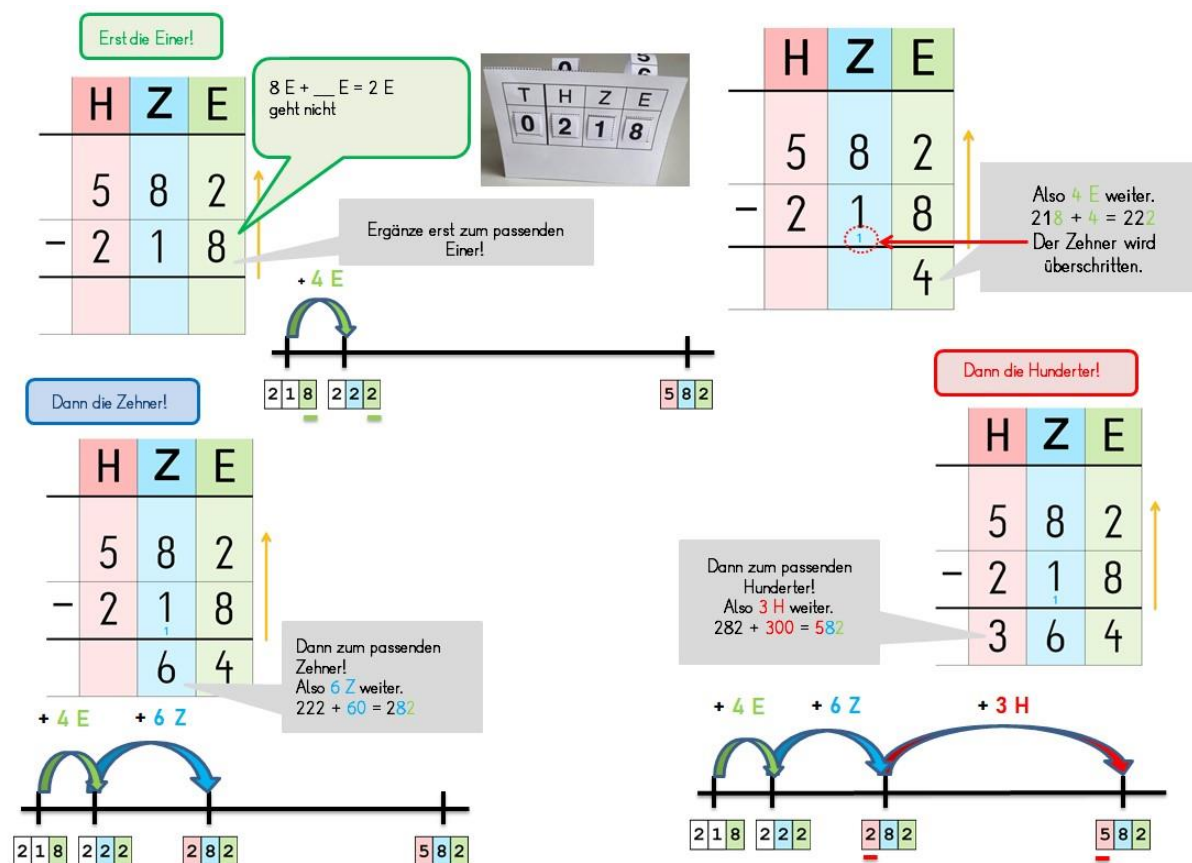


Abbildung 6: Ergänzen mit Auffüllen – Notation

4 Vergleichende Gegenüberstellung und Empfehlung

Die hier vorgestellten Verfahren der schriftlichen Subtraktion – *Abziehen mit Entbündeln*, *Ergänzen mit Erweitern* und *Ergänzen mit Auffüllen des Subtrahenden* – weisen jeweils spezifische Vor- und Nachteile auf, die bei der didaktischen Vermittlung berücksichtigt werden sollten.

Das *Abziehverfahren mit Entbündeln* bietet mehrere Vorteile. Es ist für Schüler*innen leicht verständlich, da der Ableitungsweg auf der prägnanten Kernidee des Entbündelns basiert. Zudem kann es enaktiv und ikonisch gut veranschaulicht werden, wodurch ein handlungsorientiertes Lernen unterstützt wird. Ein weiterer Vorteil liegt darin, dass die Lernenden die Entbündelungstechnik eigenständig entdecken können. Das Verfahren lässt sich gut durch halbschriftliches Rechnen vorbereiten, da alle Umformungen ausschließlich im Minuenden erfolgen. Darüber hinaus bietet das Abziehen bei der Anwendung und der Sprechweise Vorteile. Allerdings gibt es auch einige Herausforderungen. Die Notation der neuen Ziffern kann für Schüler*innen verwirrend sein, insbesondere wenn mehrfach entbündelt werden muss. Bei Subtraktionsaufgaben mit mehreren Subtrahenden sind oft wiederholte Entbündelungen notwendig, was zu Fehlern führen kann. Zudem wird immer wieder angeführt, dass die Lösung von Aufgaben mit Nullen im Minuenden vergleichsweise kompliziert und fehleranfällig sei (Jansen, 2009, S. 10f.). Padberg und Benz (2021, S. 273) sowie Schipper et al. (2017, S. 116) verweisen jedoch auf die Studie von Mosel-Göbel (1988), die zeigt, dass hinsichtlich der Fehlerhäufigkeit keine signifikanten Unterschiede zwischen der Entbündelungstechnik und anderen Übertragstechniken bestehen. Dieses Ergebnis wurde durch eine explorative, vergleichende Studie von Jensen und Gasteiger (2017, S. 499), die spezifische Fehler und das Verständnis des Algorithmus untersuchte, bestätigt.

Das *Ergänzen mit Erweitern* weist ebenfalls einige didaktische Stärken auf. Es kann enaktiv und ikonisch gut veranschaulicht werden. Zudem basiert dieses Verfahren ausschließlich auf dem Einsundeins, was insbesondere für Lernende mit Schwierigkeiten in der Zahlzerlegung eine Erleichterung sein kann. Ein weiterer Vorteil ist, dass der Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion sichtbar wird. Außerdem bilden Aufgaben mit Nullen im Minuenden hier keinen Sonderfall, sodass sie leichter zu bearbeiten sind. Auch Subtraktionsaufgaben mit mehreren Subtrahenden lassen sich ohne größere Probleme lösen. Allerdings ist das Verfahren nicht für alle Schüler*innen intuitiv verständlich. Das Verstehen dieser Methode fällt häufig schwer, und die zugrunde liegende Erweiterungstechnik lässt sich nur schwer durch halbschriftliches Rechnen vorbereiten. Zudem erschwert die Abänderung der gegebenen Zahlen die Nachvollziehbarkeit der ursprünglichen Aufgabe. Die Sprechweise ist ebenfalls problematisch, da sie nicht zur schriftlichen Notation passt, wodurch Schreib- und Sprechweise auseinanderklaffen. Hinzu kommt, dass viele lebensnahe Sachaufgaben eher auf der Grundvorstellung des Abziehens beruhen, wodurch sich das Ergänzungsverfahren weniger gut in alltagsnahe mathematische Kontexte integrieren lässt (Schipper et al., 2017, S. 116f.).

Ein Vorteil des *Ergänzens mit Auffüllen des Subtrahenden* besteht darin, dass es sich direkt aus der halbschriftlichen Strategie „Stellenweises Ergänzen“ ableiten lässt. Ähnlich wie das *Ergänzen mit Erweitern* kann dieses Verfahren sowohl enaktiv als auch ikonisch anschaulich dargestellt werden. Da lediglich das kleine Einsundeins benötigt wird, bleibt die kognitive Belastung für die Lernenden vergleichsweise gering. Zudem zeichnet sich dieses Verfahren durch eine kurze und klare Notation aus. Auch bei diesem Verfahren wird der enge Zusammenhang zwischen Subtraktion und Addition deutlich und Aufgaben mit Nullen im Minuenden stellen keinen Sonderfall dar, wodurch potenzielle Fehlerquellen reduziert werden. Die Vor- und Nachteile dieses Verfahrens ähneln in vielerlei Hinsicht denen des *Ergänzens mit Erweitern*. So fällt es vielen Lernenden schwer, das Verfahren zu verstehen, da die Grundvorstellung des Ergänzens im Vergleich zum Abziehen weniger stark ausgeprägt ist. Wie beim *Ergänzen mit Erweitern* klaffen Schreib- und Sprechweise auseinander, was die Verständlichkeit weiter erschwert. Darüber hinaus basieren viele lebensnahe Sachaufgaben eher auf der Vorstellung des Abziehens, sodass dieses Verfahren in praxisnahen mathematischen Kontexten weniger intuitiv erscheint (Schipper et al., 2017, S. 117f.). Wittmann und Müller (2018, S. 95) befürworten dieses Ergänzungsverfahren, da es ohne Vorgriff auf höhere Stellenwerte auskommt, eine kompakte Notation aufweist, lediglich das kleine Einspluseins erfordert und zudem zur Begründung der Subtraktion negativer Zahlen herangezogen werden kann.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass jedes der vorgestellten Verfahren spezifische Vor- und Nachteile aufweist. Das *Abziehverfahren mit Entbündeln* bietet eine enge Anbindung an das Stellenwertsystem und lässt sich enaktiv sowie ikonisch gut veranschaulichen, wodurch ein tragfähiges Operationsverständnis gefördert wird. Ebenso kann dieses Verfahren von den Lernenden selbstständig entdeckt werden. Wie bereits angeführt, kann die Notation neuer Ziffern, insbesondere bei mehrfachen Entbündelungen, verwirrend sein. Die Ergänzungsverfahren machen die Verbindung zwischen Addition und Subtraktion deutlich und erleichtern den Umgang mit Nullen, bergen jedoch ein höheres Verwechslungsrisiko mit der schriftlichen Addition. Auch die Schreib- und Sprechweise ist für viele Lernende schwer nachvollziehbar (Padberg & Benz, 2021, S. 262f.).

Mit Blick auf die im Lehrplan der Volksschule (BMBWF, 2023, S. 80) geforderte verständnisorientierte Einführung schriftlicher Rechenverfahren ist dem *Abziehverfahren mit Entbündeln* der Vorzug zu geben. Diese Empfehlung entspricht den fachdidaktischen Einschätzungen von Schipper et al. (2017, S. 118f.) sowie Padberg und Benz (2021, S. 272ff.). Sie heben hervor, dass das Abziehverfahren auf der natürlichen Grundvorstellung des Abziehens basiert, die Entbündelungstechnik von Kindern eigenständig entdeckt werden kann und die gute Visualisierbarkeit das Verständnis erleichtert. Dadurch eignet sich dieses Verfahren besonders gut zur Förderung eines tiefgehenden mathematischen Verständnisses.

Eine fachdidaktisch fundierte Unterrichtsgestaltung sollte dennoch flexibel mit den verschiedenen Verfahren umgehen und diese an die individuellen Lernvoraussetzungen der Schüler*innen anpassen. Eine vertiefende Beschäftigung mit schriftlichen Rechenverfahren

bietet die Handreichung „Schriftliche Rechenverfahren – Basiswissen für Lehrkräfte“ (Beck et al., 2025). Neben einer Darstellung der verständnisorientierten Einführung der schriftlichen Rechenverfahren enthält das Werk auch QR-Codes zu Videos, die die zugrunde liegenden Materialhandlungen anschaulich erläutern.

Literatur

- Beck, E., Hauer-Typelt, P., Kramer, S. & Summer, A. (2025). *Schriftliche Rechenverfahren. Basiswissen für Lehrkräfte*. Kirchliche Pädagogische Hochschule Wien/Niederösterreich.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) (2023). *Lehrplan der Volksschule*. BGBl. Nr. 134/1963 zuletzt geändert durch BGBl. II Nr. 204/2024. <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/Bundsnormen/NOR40226719/NOR40226719.pdf>
- Jansen, H. (2009). Die Einführung des Abziehverfahrens. *Grundschule Mathematik* (23), 8-11.
- Jensen, S. & Gasteiger, H. (2017). Ergänzen mit Erweitern und Abziehen mit Entbündeln – Ergebnisse einer explorativen vergleichenden Studie zu spezifischen Fehlern und Verständnis des Algorithmus. In Kortenkamp, U. (Hrsg.) & Kuzle, A. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (2) (S. 497-500). WTM.
- Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik - Grundschule*. Springer Spektrum.
- Matheinklusiv mit PIKAS (o. D. a). *Das Abziehen mit Entbündeln*. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/789>
- Matheinklusiv mit PIKAS (o. D. b). *Das Ergänzen mit Erweitern*. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/791>
- Matheinklusiv mit PIKAS (o. D. c). *Das Ergänzen mit Auffüllen bzw. Bündeln*. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/792>
- Mosel-Göbel, D. (1988). Algorithmusverständnis am Beispiel ausgewählter Verfahren der schriftlichen Subtraktion. Eine Fallstudienanalyse bei Grundschulern. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe* (12). 554-559.
- Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik. Fundiert, vielseitig, praxisnah* (5. überarbeitete Aufl.). Springer Spektrum.
- Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schroedel.
- Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 4. Schuljahr*. Schroedel.
- Wittmann, E. & Müller, G. (2018). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band II: Halbschriftliches und schriftliches Rechnen*. Klett.
- Wolf, W. (Hrsg.) (2019). *Lehrplan der Volksschule*. Leykam

Rechenschwierigkeiten in der Sekundarstufe I

Lösungsansätze und Methoden

Andrea Karner¹, Lisa Meyer²

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1427>

Zusammenfassung

Wenn Schüler*innen mit unzureichenden mathematischen Kompetenzen in die Sekundarstufe I übertreten, kann dies unter anderem auf Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zurückzuführen sein. Ziel des Beitrags ist es, diese Schwierigkeiten zu erörtern und die Notwendigkeit gezielter Diagnose- und Fördermaßnahmen aufzuzeigen. Es werden Strategien und Methoden vorgestellt, die eine individuelle Förderung mathematischer Kompetenzen insbesondere bei Rechenschwierigkeiten in der Sekundarstufe I ermöglichen.

Stichwörter: Rechenschwierigkeiten, Diagnose, Fördermaßnahmen

1 Einleitung

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen ist ein zentrales Anliegen der schulischen Bildung, insbesondere der Primar- und Sekundarstufe I. Der Bereich der Arithmetik stellt ein hierarchisches System dar, in dem grundlegende Fähigkeiten und Kenntnisse kontinuierlich erweitert und vertieft werden. Die Erwartungen an Schüler*innen am Ende der Volksschule sind hoch: Sie sollen in der Lage sein, Zahlen bis zu einer Million zu verstehen und zu nutzen sowie grundlegende Rechenoperationen sicher auszuführen. Dennoch zeigt die Realität, dass ein erheblicher Teil der Schüler*innen mit mangelhaften mathematischen Kompetenzen in die Sekundarstufe I übertritt. Diverse Studien belegen, dass ein nicht unerheblicher Prozentsatz von Kindern eine Rechenschwäche oder sogar Rechenstörungen aufweist. Die Schwierigkeiten, die damit in Verbindung stehen, können sich stark auf die weitere mathematische Bildungsbiographie auswirken und erfordern gezielte diagnostische und fördernde Maßnahmen. Ziel dieses Beitrags ist es, ein tieferes Verständnis für die verschiedenen Arten von Rechenschwierigkeiten zu entwickeln und die Bedeutung effektiver Förderstrategien in der Sekundarstufe I zu beleuchten.

¹ Pädagogische Hochschule Steiermark, Hasnerplatz 12, 8010 Graz.

E-Mail: andrea.karner@phst.at

² Praxismittelschule der Pädagogischen Hochschule Steiermark, Hasnerplatz 12, 8010 Graz.

2 Mangelhafte Entwicklung mathematischer Kompetenzen

Mathematik ist im Bereich der Arithmetik hierarchisch aufgebaut. Die Schüler*innen sollen am Ende der Volksschule die Zahlen bis 1 000 000 lesen, schreiben, darstellen, zerlegen, vergleichen, ordnen, runden und vielfältig nutzen. Zudem sollen sie Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen mit ein- und zweistelligem Multiplikator sowie Divisionen mit ein- und zweistelligem Divisor im Zahlenraum 1 000 000 schriftlich durchführen und Ergebnisse durch Runden und durch Überschlagsrechnungen abschätzen können (BMBWF, 2023b). Der Unterricht der Sekundarstufe I baut auf diesen Kompetenzen auf. Viele inhaltliche Aspekte werden vorausgesetzt, wobei der Blick auf jene Schüler*innen, die mit mangelhaften mathematischen Kompetenzen in die 5. Schulstufe übertreten, oftmals fehlt. Die Zahlen der standardisierten Leistungsmessungen zeigen ein klares Bild: Während 82 % der Schüler*innen die Anforderungen in Mathematik erfüllen, erreichen 10 % der österreichischen Kinder nur die Routinestufe (Stufe 1), d. h., sie können ihre mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten in bekannten Kontexten anwenden und Routineverfahren nutzen. 8 % der Schüler*innen können diese Lernziele nicht nachweisen und verfehlen damit die Anforderungen der Bildungsstandards (BIFIE, 2019, S. 35).

Kinder, die Schwierigkeiten beim Rechnen haben, oder Schüler*innen, die rechenschwach sind oder eine Rechenstörung aufweisen, sind mit großer Wahrscheinlichkeit in dieser Gruppierung zu finden.

3 Dyskalkulie (Rechenstörung) – Rechenschwäche – Rechenschwierigkeiten

Schwierigkeiten im Rechnen werden mit unterschiedlichen Begriffen umschrieben. Am häufigsten werden in der Literatur die Termini Rechenschwäche, Rechenstörung sowie Dyskalkulie verwendet, wobei der Gebrauch dieser Begriffe abhängig von der jeweiligen Fachwissenschaft ist (Steinecke & Ulm, 2025, S. 11). Während in der medizinisch-klinischen Fachdisziplin neben Dyskalkulie auch die Bezeichnung Rechenstörung geläufig ist, kommt in der Mathematikdidaktik vor allem der Begriff Rechenschwäche zum Einsatz (Steinecke & Ulm, 2025, S. 11). Um den Einfluss schulischer Faktoren zu berücksichtigen, hat Schipper (2009, S. 329) auch vorgeschlagen, im fachdidaktischen Kontext von „besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen“ zu sprechen.

Über die Bedeutung und Abgrenzung der Begriffe gibt es unterschiedliche Auffassungen. Entgegen der Ansicht, dass alle Beschreibungen von Kindern mit Rechenschwierigkeiten synonym verwendet werden können, differenziert Schipper (2005, S. 22 f.): Während bei Kindern mit einer Rechenschwäche zusätzliche Fördermaßnahmen ausreichen, handelt es sich

bei einer Rechenstörung um eine schwerwiegendere, länger andauernde und weniger häufige Form der Rechenschwäche, die umfassendere Maßnahmen erfordert.

Die Diagnose Dyskalkulie setzt nach Schipper (2005, 23 f.) neben einer Rechenstörung auch eine Beeinträchtigung der psychischen Gesundheit voraus. Dyskalkulie gehört nach medizinischem Verständnis zu den neurologisch bedingten Entwicklungsstörungen und zeigt sich bereits im Bereich der mathematischen Vorläuferfertigkeiten. Betroffene haben in der Regel Schwierigkeiten, Mengen zu erfassen. Die Diagnose kann nur durch klinische Psycholog*innen erfolgen, da Dyskalkulie im ICD-11 als Unterkategorie der spezifischen Lernstörungen geführt wird (WHO, 2025). Die Prävalenz schwankt je nach theoretischer Grundlage zwischen 3 und 8,4 % (Landerl et al., 2022, S. 105).

Der Anteil an rechenschwachen Schüler*innen ist mit etwa 20 % deutlich höher ausgeprägt (Fischbach et al., 2013; Schipper, 2005, S. 22). Kinder mit Rechenschwäche sind in nahezu jeder Klasse anzutreffen (Schipper, 2009, S. 332). Sie zeichnen sich durch Defizite in den drei zentralen Bereichen des arithmetischen Basiswissens der Grundschule aus: dem Verständnis natürlicher Zahlen, dem Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems und dem Verständnis von Rechenoperationen (Gaidoschik et al., 2021, S. 4). Es ist anzunehmen, dass Umwelteinflüsse zu dieser hohen Prävalenz beitragen, da beispielsweise unterrichtliche Maßnahmen die Entwicklung arithmetischer Basiskompetenzen beeinflussen können (Gaidoschik, 2010; Gaidoschik, 2018, S. 281).

Steinecke und Ulm (2025, S. 11) betonen, dass Rechenschwäche oft mit einem gravierenden Mangel an arithmetischen Basiskompetenzen einhergeht, der „durch undifferenziertes Weiterlernen im regulären Unterricht nicht überwunden werden kann“. Der vorliegende Beitrag konzentriert sich auf die Förderung von Schüler*innen mit Rechenschwäche, also Kindern mit fehlenden Entwicklungen in einem oder mehreren der drei genannten Bereiche.

3.1 Verständnis natürlicher Zahlen

Schüler*innen mit einem Verständnis für natürliche Zahlen verfügen über Grundvorstellungen zu natürlichen Zahlen, können mit unterschiedlichen Darstellungen natürlicher Zahlen umgehen und Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen erkennen und verstehen (Steinecke & Ulm, 2025, S. 35).

Zu den Grundvorstellungen gehören die ordinale und die kardinale Interpretation von Zahlen. Beim ordinalen Zahlaspekt wird das positionsorientierte Verständnis betont, wobei der „mentale Zahlenstrahl“ als Beispiel dient (Häsel-Weide & Schöttler, 2021, S. 7–8). Beim strukturorientierten Verständnis steht die Auseinandersetzung mit Mengen und das Erfassen von Anzahlen im Vordergrund. Objekte werden abgezählt und durch die Auseinandersetzung mit Mengen wird das Teile-Ganze-Prinzip (Resnick, 1983, S. 124) erfasst. Dieses Prinzip beschreibt die Erkenntnis, dass eine Menge sowohl als Ganzes als auch als Zusammensetzung von Teilmengen wahrgenommen werden kann. Das Erschließen dieser Zahlaspekte bildet eine wichtige Voraussetzung für das Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems.

Die Beziehungen zwischen den natürlichen Zahlen lassen sich durch Vorgänger, Nachfolger, Größenverhältnisse wie „größer“ und „kleiner“ sowie Konzepte wie „die Hälfte“ und „das Doppelte“ verdeutlichen (Steinecke & Ulm, 2025, S. 45–47). Darüber hinaus bildet die 10-er-Bündelung, bei der zehn Einer zu einem Zehner zusammengefasst werden, eine wesentliche Grundlage für das Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems.

3.2 Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems

Das Prinzip der fortgesetzten Bündelung ist grundlegend für das Verstehen, Benennen sowie das Aufschreiben und Lesen von Zahlen (Schulz & Wartha, 2021, S. 36). Es baut – wie der Name und das Präfix *deci* bereits verdeutlichen – auf der Zahl Zehn auf. Im Bereich der natürlichen Zahlen werden zehn Einer zu einem Zehner gebündelt. Diese Bündelung wird fortgeführt: Zehn Zehner ergeben einen Hunderter, zehn Hunderter einen Tausender (siehe Abbildung 1). Das Stellenwertprinzip besagt, dass an jedem Stellenwert nur eine Ziffer zwischen Null und Neun stehen kann. Wenn eine Einheit mehr als neun umfasst, erfolgt eine Bündelung in die nächstgrößere Einheit.

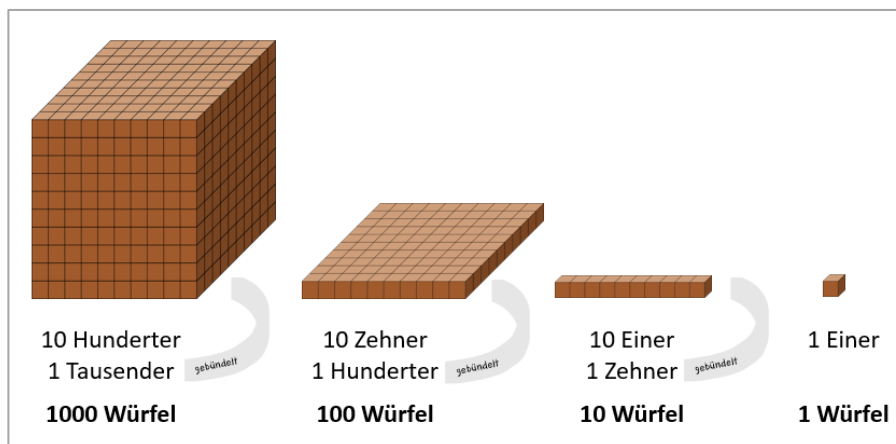


Abbildung 1: Das Bündelungsprinzip im dezimalen Stellenwertsystem

Die dezimale Struktur des Stellenwertsystems ermöglicht es, unendlich viele Zahlen darzustellen. Große Zahlen sind in vielen Fällen nicht mehr anschaulich vorstellbar und erfordern von den Schüler*innen abstraktes Denken (Schulz & Wartha, 2021, S. 47). Hier kommen die Zahlbeziehungen ins Spiel: Es gilt, eine relationale Zahlvorstellung zu entwickeln, bei der Zahlen stets miteinander in Beziehung gesetzt werden.

3.3 Verständnis für Rechenoperationen

Das Verständnis für Rechenoperationen umfasst den Umgang mit den grundlegenden Vorstellungen und Darstellungen der vier Grundrechenarten sowie deren Beziehungen (Steinecke & Ulm, 2025, S. 56). In der Sekundarstufe I wird erwartet, dass Schüler*innen alle vier Grundrechenarten beherrschen, da dieser Inhaltsbereich ab der 5. Schulstufe nur mehr

hinsichtlich der Zahlenbereiche erweitert wird. Die Schüler*innen sollen mit nichtnegativen Dezimalzahlen rechnen und die Bedeutung der Rechenoperationen erfassen können (BMBWF, 2023a). Dabei gilt es, die zugrundeliegenden Konzepte der Grundrechenarten zu verstehen. Als Beispiele dienen das Hinzufügen und Zusammenfassen bei der Addition sowie das Abziehen, Ergänzen oder das Ermitteln des Unterschieds bei der Subtraktion (Schulz & Wartha, 2021, S. 76). Zudem kann die Subtraktion als Umkehrung der Addition betrachtet werden. Die Grundvorstellung der Multiplikation ist das wiederholte Addieren. Die Division kann als Teilen (Verteilen), Messen (Aufteilen) oder als Umkehrung der Multiplikation gedeutet werden (BMBWF, 2023a).

Auch wenn Schüler*innen den Rechenalgorithmus beherrschen und Aufgaben richtig lösen, zeigt sich ein vollständiges Verständnis erst, wenn sie in der Lage sind, die Operationen auf verschiedenen Darstellungsebenen (z. B. handelnd und ruhend auf Abbildungen) anzuwenden (Padberg & Wartha, 2017, S. 1). Daher sollten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division nicht nur im schriftlichen Verfahren, sondern auch mit Materialien bearbeitet werden.

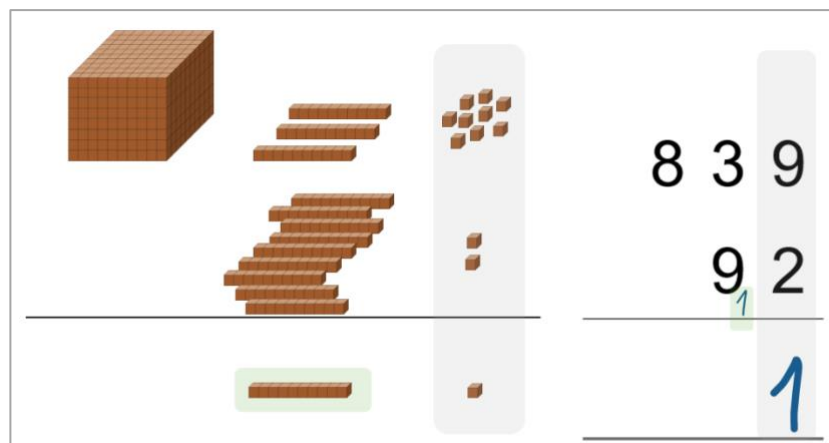


Abbildung 2: Addition – mit Material und mit schriftlichem Verfahren

Rechenoperationen zu verstehen, bedeutet auch, das Bündelungsprinzip anwenden zu können. Dies lässt sich durch den Einsatz von Mehrsystemblöcken (Dienes-Material) veranschaulichen (siehe Abbildung 2). Durch die Bündelung von zehn Einern zu einem Zehner kann auch der Übertrag sowie die dazugehörige Notation in der schriftlichen Darstellung verständlich gemacht werden.

4 Diagnose von Rechenschwierigkeiten – Dyskalkulie

Die Diagnose von Rechenschwierigkeiten bzw. Dyskalkulie ist nicht nur dann relevant, wenn es um die Erstellung eines psychologischen Gutachtens geht. Auch für Lehrpersonen ist es entscheidend, den Lernstand der Schüler*innen korrekt zu erfassen. Hierbei handelt es sich

um eine pädagogische Diagnostik, die dazu dient, die individuellen Lernvoraussetzungen der Schüler*innen zu erkennen. Dies ist besonders wichtig in Transitionsprozessen, wie dem Übergang von der Primarstufe in die Sekundarstufe I, da in zweiterer Schüler*innen mit unterschiedlichen Erfahrungen aus der Volksschule aufeinandertreffen und gemeinsam unterrichtet werden.

4.1 Diagnoseinstrumente für die Sekundarstufe I

Für die Diagnose der Lernausgangslagen stehen verschiedene Tools zur Verfügung. Während standardisierte Messinstrumente wie der Eggenberger Rechentest 4+ (Schaupp et al., 2020) oder der Basismath 4+-5 (Moser Opitz et al., 2016) über die Testzentrale erworben werden können, sind der LeDi Arithmetik (Dögnitz, 2022) und das Bayreuther Testpaket (Steinecke & Martin, 2022) online abrufbar. Die beiden letzteren Instrumente sind im Rahmen von Forschungs- und Entwicklungsprojekten aufbereitet worden und speziell für den Einsatz im Unterricht konzipiert.

4.1.1 LeDi Arithmetik

Mit dem LeDi-Arithmetik kann eine erste Diagnose über eine mögliche Rechenschwäche in der Sekundarstufe I gestellt werden. Das Instrument wurde so entwickelt, dass die Testung im Klassenverband in einer Doppelstunde durchgeführt werden kann (Dögnitz, 2023, S. 1).

Der Basistest umfasst Aufgaben zum Stellenwertverständnis, zum Teil-Teil-Ganzes-Konzept der Addition und Subtraktion sowie zur Multiplikation und Division. Der Test besteht größtenteils aus geschlossenen Aufgaben, enthält jedoch auch solche, bei denen Begründungen oder Darstellungswechsel notwendig sind, um Grund- und Fehlvorstellungen besser zu identifizieren. Das Verfahren ist nicht nur für die 5. und 6. Schulstufe geeignet, sondern bietet auch eine Erweiterung für die 7. Klasse oder Schulstufe an, die eine zusätzliche Skala für den Bereich der gebrochenen Zahlen beinhaltet (Dögnitz, 2022; Dögnitz, 2023, S. 1).

4.1.2 Bayreuther Testpaket

Das Bayreuther Testpaket zur Erfassung von Rechenschwäche ab der 4. Schulstufe besteht aus zwei Teilen: dem Rechentest und der Förderdiagnostik. Der Rechentest prüft arithmetische Basiskompetenzen und basiert auf einem schriftlichen Verfahren, das quantitativ ausgewertet wird. Er ist kriterienorientiert und gliedert sich in die Bereiche Verständnis für natürliche Zahlen, das Stellenwertsystem und Rechenoperationen. Bei der Bayreuther Förderdiagnostik handelt es sich um ein mündliches Leitfaden-Interview, dessen Ergebnisse qualitativ ausgewertet werden (Steinecke & Ulm, 2025, S. 92).

Die Durchführung erfolgt in zwei Stufen. Zunächst wird der Test mit allen Schüler*innen einer Klasse durchgeführt. Anhand der Ergebnisse können jene Schüler*innen, die spezifische

Fördermaßnahmen zur Überwindung von Rechenschwäche benötigen, identifiziert werden. Mit diesen Fällen wird anschließend die Förderdiagnostik durchgeführt, um ihre individuellen Herausforderungen genau zu erfassen. Dabei handelt es sich um ein Einzelgespräch unter Verwendung von gegenständlichen Anschauungsmaterialien (Steinecke & Ulm, 2025, S. 110).

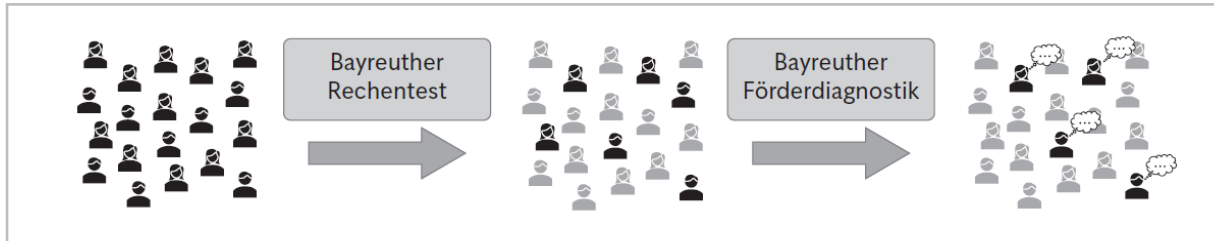


Abbildung 3: Zweistufige Durchführung der Diagnostik (Steinecke & Ulm, 2025, S. 91)

Die Ergebnisse des Rechentests und der Förderdiagnostik dienen als Grundlage für die Festlegung geeigneter Fördermaßnahmen.

4.2 Ausgewählte Beispiele

Um festzustellen, ob die Schüler*innen ein tragfähiges Verständnis von Zahlen besitzen, werden sie unter anderem gebeten, vor- und rückwärtszählen. In Abbildung 4 ist die Aufgabenstellung aus dem Bayreuther Testpaket zu sehen, bei der die Schüler*innen von einer vorgegebenen Zahl aus in Dreierschritten rückwärts zählen sollen. In diesem Fall wurde der Dreierschritt von 101 auf 98 nicht korrekt ausgeführt. Dies könnte darauf hindeuten, dass bei der Schülerin oder dem Schüler ein unzureichendes Stellenwertverständnis vorliegt.

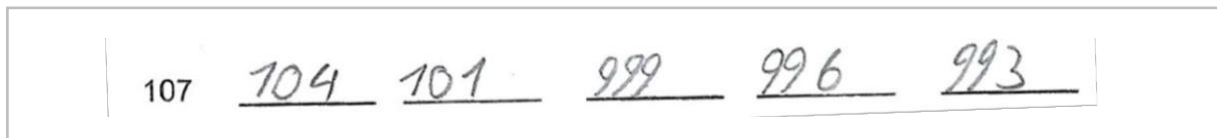


Abbildung 4: Rückwärtszählen in Dreierschritten

Die Fähigkeit, Zahlen in Beziehung zu setzen, wird durch die Aufgabenstellung „Verdopple die Zahl 508“ ermittelt. In Abbildung 5 ist zu sehen, dass zwar ein Versuch unternommen wurde, die Zahl 508 zu verdoppeln, jedoch zwei Schwierigkeiten auftraten: Erstens wurde die acht nicht verdoppelt, und zweitens wurden tausend (das Doppelte von 500) und acht nicht korrekt nach Stellenwerten addiert. Diese Lösung weist ebenfalls auf ein unzureichendes Stellenwertverständnis hin.



Abbildung 5: Verdoppeln einer dreistelligen Zahl

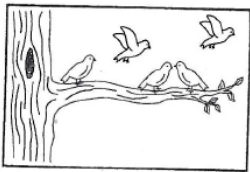
In Abbildung 6 sind Subtraktionen zu sehen, die auf den ersten Blick nicht herausfordernd wirken. Wie die Lösungen zeigen, ist bei mangelndem Stellenwertverständnis jedoch genau das Gegenteil der Fall. Zwar wurden die Subtrahenden korrekt abgezogen, aber die Stellenwerte nicht berücksichtigt. Im ersten Beispiel wurde statt eines Einers ein Tausender abgezogen, im zweiten Beispiel statt einem Hunderter ein Einer subtrahiert.

$$317\,000 - 1 = \underline{316\,000} \quad 600\,000 - 100 = \underline{599\,999}$$

Abbildung 6: Subtraktionen (mit Hinweis auf fehlendes Stellenwertverständnis)

Die Grundvorstellungen zur Subtraktion können durch Alltagsbezüge und grafische Darstellungen überprüft werden. Die Lösung in Abbildung 7 zeigt eine mangelnde Grundvorstellung im Bereich der Subtraktion, da verabsäumt wurde, die Ausgangsmenge anzugeben – in diesem Fall fünf Vögel, von denen dann zwei wegfliegen.

Setze Zahlen ein, sodass die Aufgabe zum Bild passt.



Aufgabe: 3 - 2

Abbildung 7: Grundvorstellung Subtraktion

Das Beispiel aus Abbildung 8 verdeutlicht, wie wichtig das Stellenwertverständnis für die korrekte Ausführung von Rechenoperationen ist. Bei $73 - 37 = 0$ wurde die Differenz aus denselben Ziffern gebildet, ohne die korrekten Stellenwerte zu berücksichtigen.

$$73 - 37 = \underline{0}$$

Abbildung 8: Subtraktion

Diese Beispiele, die am Beginn der 5. Schulstufe bearbeitet wurden, zeigen den Bedarf an gezielten Fördermaßnahmen auf. Um Rechnungen wie $73 - 37 = 0$ entgegenwirken zu können, braucht es vor allem Materialhandlungen, die im Zuge von Förderstunden eingesetzt werden.

5 Fördermaßnahmen in der Sekundarstufe I

In Bezug auf die Fördermaßnahmen gilt es sowohl organisatorische Überlegungen anzustellen als auch Entscheidungen hinsichtlich der inhaltlichen Gestaltung der Maßnahmen zu treffen.

5.1 Organisatorische Überlegungen

Fördermaßnahmen bei Rechenschwierigkeiten in der Sekundarstufe I können auf verschiedene Weise organisiert werden: im regulären Unterricht, als ergänzende Maßnahme oder als Ersatz für den regulären Unterricht (Steinecke & Ulm, 2025, S. 141). Sie sollten zumindest einmal wöchentlich angeboten werden, in Einzelsettings stattfinden und mindestens 45 Minuten dauern (Haberstroh & Schulte-Körne, 2019, S. 112). Idealerweise werden gezielte Interventionen von Fachexperten durchgeführt (Haberstroh & Schulte-Körne, 2019, S. 112). An jeder Schule ist es darüberhinausgehend sinnvoll, auch Lehrkräfte (mit entsprechender Expertise) für die Umsetzung dieser Maßnahmen zu qualifizieren.

Trotz der häufig erschwerten Gegebenheiten im schulischen Alltag und der organisatorischen Rahmenbedingungen lassen sich pragmatische Lösungen finden, die den Anforderungen gerecht werden. Lorenz (2008, S. 99) formuliert dazu folgende Überlegungen für den Regelunterricht: „Es ist auch Einzelförderung im Klassenverband möglich. Hierzu muss die Unterrichtsform offen sein und Arbeiten an unterschiedlichen Problemen zulassen. Dies ist in jedem Unterricht phasenweise möglich.“

Das „Drehtürmodell“, ein Ansatz aus der Begabtenförderung, stellt eine Lösung dar, die den regulären Unterricht ersetzt (Benölken & Hoiboom, 2024, S. 13–14). Wenn der Mathematikunterricht für mehrere Klassen oder Jahrgangsstufen zeitgleich angesetzt ist, können differenzierte Gruppenangebote durchgeführt werden. So können beispielsweise Schüler*innen mit Rechenschwierigkeiten aus verschiedenen Klassen oder Jahrgangsstufen aufgrund ihres ähnlichen Leistungsniveaus zeitgleich gezielt gefördert werden.

Als weiteren Lösungsansatz für die Organisation von Förderstunden schlagen Steinecke und Ulm (2025, S. 144) ergänzend zum Unterricht Kleingruppen-Angebote im Teamteaching vor. Hierbei werden sechs Schüler*innen von zwei Lehrkräften gemeinsam unterrichtet. Die Kinder können entweder in zwei Gruppen (z. B. drei pro Lehrkraft) oder in flexiblen Konstellationen (z. B. eine Lehrkraft mit vier und die andere mit zwei Kindern) betreut werden. Die Gruppeneinteilung erfolgt je nach Inhalt und individuellem Förderbedarf.

Obwohl Einzelförderung als Ideallösung gilt, fehlt es dabei an Kommunikation und Austausch mit den Klassenkamerad*innen (Lorenz, 2008, S. 99). Ein Kleingruppen-Setting kann diesem Mangel entgegenwirken. Diese optimierten Ansätze ermöglichen eine flexible und gezielte Förderung, die sich an den tatsächlichen Bedürfnissen der Schüler*innen orientiert und gleichzeitig die organisatorischen Gegebenheiten berücksichtigt.

5.2 Inhaltliche Gestaltung

In Hinblick auf die inhaltliche Gestaltung der Angebote muss sichergestellt werden, dass die Fördermaßnahmen keine Wiederholung von Unterrichtseinheiten darstellen, die bereits wenig erfolgreich waren. Vielmehr geht es darum, ausgehend von der Diagnose oder Lernstandserhebung gezielt auf bestehende Probleme einzugehen und den Schüler*innen

konkrete Hinweise zu geben, die es ihnen ermöglichen, „in die Zone ihrer nächsten Entwicklung vorzustoßen“ (Lorenz, 2008, S. 99).

Bei der Förderung von Schüler*innen der Sekundarstufe I wird auf den arithmetischen Basisstoff der Primarstufe zurückgegriffen. Die relevanten Inhalte, wie natürliche Zahlen, das Stellenwertsystem und Rechenoperationen, werden systematisch aufgearbeitet. Dabei kommen fachdidaktische Maßnahmen zum Einsatz, die den Schüler*innen helfen, diese Konzepte besser zu verstehen und anzuwenden. Zwei zentrale Ansätze, die sich dafür eignen, sind das E-I-S-Prinzip (Bruner, 1974, S. 49) und das 4-Phasenmodell (Wartha & Schulz, 2011, S. 11).

Das E-I-S-Prinzip sieht vor, dass mathematische Inhalte zunächst enaktiv (durch Handeln mit Materialien), dann ikonisch (durch bildliche Darstellungen) und schließlich symbolisch erarbeitet werden (Bruner, 1974, S. 49). In Abbildung 9 wird das E-I-S-Prinzip für den Aufbau des Stellenwertverständnisses verwendet.

enaktiv	ikonisch	symbolisch
	Welche Zahl wird dargestellt? 	Schreibe als Zahl! 4 H 3 Z 2 E = <input type="text"/> 7 Z 3 T = <input type="text"/> 1 ZT 1 E = <input type="text"/>

Abbildung 9: E-I-S-Prinzip nach Bruner (1974, S. 49) am Beispiel Stellenwertverständnis

Das 4-Phasen-Modell nach Wartha und Schulz (2011, S. 11) gründet auf der Idee, dass Kinder in der Lage sein sollten, konkrete Materialhandlungen auch gedanklich nachzuvollziehen. In der ersten Phase befasst sich das Kind mit dem geeigneten Material, um eine konkrete Erfahrung zu sammeln. In der zweiten Phase beschreibt das Kind die Materialhandlung, wobei der Fokus auf dem Material selbst liegt. In der dritten Phase erfolgt eine abstraktere Darstellung, bei der das Kind die Handlung ohne Sicht auf das Material erklärt. In der letzten Phase arbeitet das Kind auf symbolischer Ebene, wobei es die erlernten Handlungen übt und automatisiert, sodass sie zunehmend unabhängig vom Material werden.

Da Fördermaßnahmen in der Sekundarstufe I vor allem auf das Verständnis des Stellenwertsystems und der Rechenoperationen abzielen, wird im Folgenden aufgezeigt, wie mögliche Angebote für diese beiden Bereiche inhaltlich gestaltet werden können.

5.2.1. Verständnis für das Stellenwertsystem

Die Idee des Stellenwertsystems kann im Zuge der Fördermaßnahmen mithilfe des Bündelungsprinzips verdeutlicht werden. Wie bereits in Kapitel 3.2 beschrieben, werden zehn Einer zu einem Zehner gebündelt, der dann an der nächsthöheren Stelle angegeben wird.

Dieses Prinzip bildet die Grundlage für das 10-er-System und ermöglicht es den Schüler*innen, die Struktur und die Beziehungen zwischen den einzelnen Stellenwerten besser zu verstehen. Der Einsatz von Mehrsystemblöcken (Dienes-Material) veranschaulicht diese Regel.

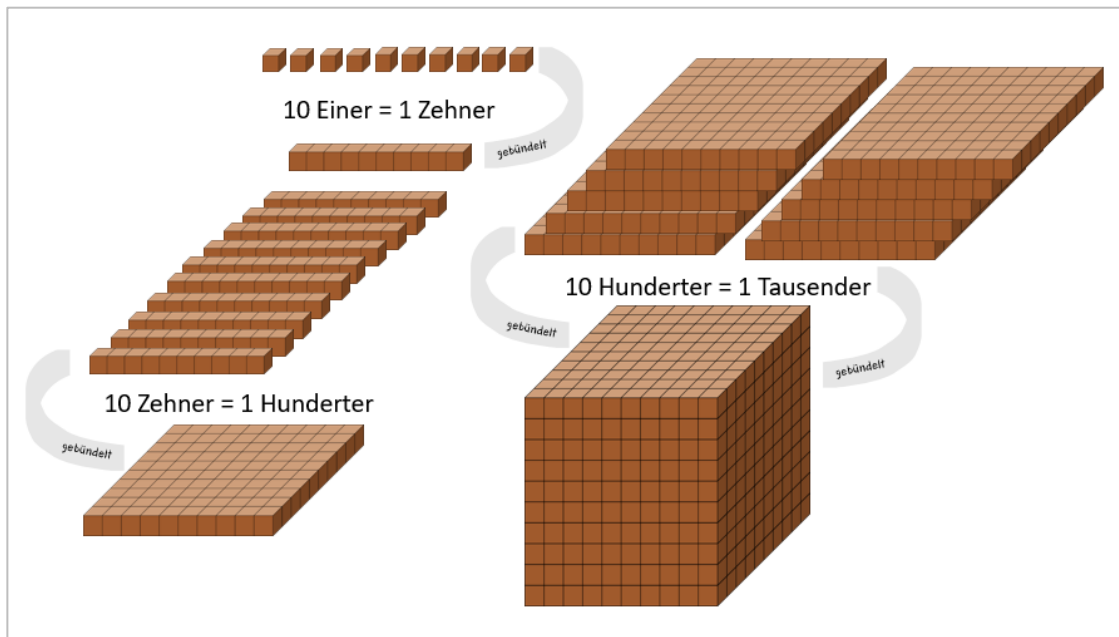


Abbildung 10: Das Bündelungsprinzip dargestellt mit Mehrsystemblöcken

Ziel dieses handlungsorientierten Ansatzes ist es, die dezimale Struktur der Zahlen und die Beziehungen zwischen den einzelnen Stellenwerten zu erkennen (Häsel-Weide & Schöttler, 2021, S. 3). Diese Auseinandersetzung kann durch das 4-Phasenmodell unterstützt werden, indem der Vorgang des stellenwertgerechten Tauschens von den Schüler*innen sprachlich begleitet wird. Dadurch werden die Prinzipien nach und nach so verinnerlicht, dass sie schließlich gedanklich abgerufen werden können.

5.2.2. Verständnis für Rechenoperationen

Auch die vier Grundrechenarten können mit Mehrsystemblöcken veranschaulicht werden. In diesem Beitrag werden exemplarisch die Division und die Subtraktion dargestellt. Die Grundvorstellung des Verteilens wird durch die Materialhandlung verdeutlicht, indem die unterschiedlichen Mehrsystemblöcke auf die Kegel verteilt werden.

Wie in Abbildung 11 zu sehen ist, werden zunächst die neun Zehner auf drei Kegel verteilt, gefolgt von den sechs Einern. Das Ergebnis zeigt, wie viel jeder Kegel erhält. Diese Materialhandlung ermöglicht es außerdem, das schriftliche Rechenverfahren parallel durchzuführen.

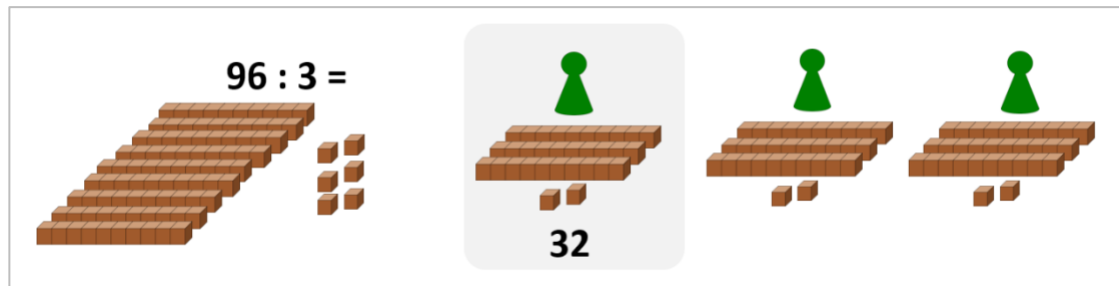


Abbildung 11: Division dargestellt mit Mehrsystemblöcken

Eine weitere Möglichkeit, das Verständnis für Rechenoperationen aufzubauen, ist das Markenspiel, welches den Mehrsystemblöcken ähnelt. Da sich die Marken aber nicht in der Größe, sondern nur in der Farbe und dem Wert unterscheiden, findet hier bereits eine erste Abstraktion statt. Während der Tausender bei den Zehnersystemblöcken durch die Größe als auch die Anzahl der Einer repräsentiert wird, ist das bei der 1000er-Marke nicht mehr der Fall.

In Abbildung 12 wird die Subtraktion $241 - 118$ mithilfe von Material veranschaulicht. Zum Einsatz kommt das Verfahren *Wegnehmen und Entbündeln* unter der Verwendung von Marken (Schulz & Wartha, 2021, S. 102–103).

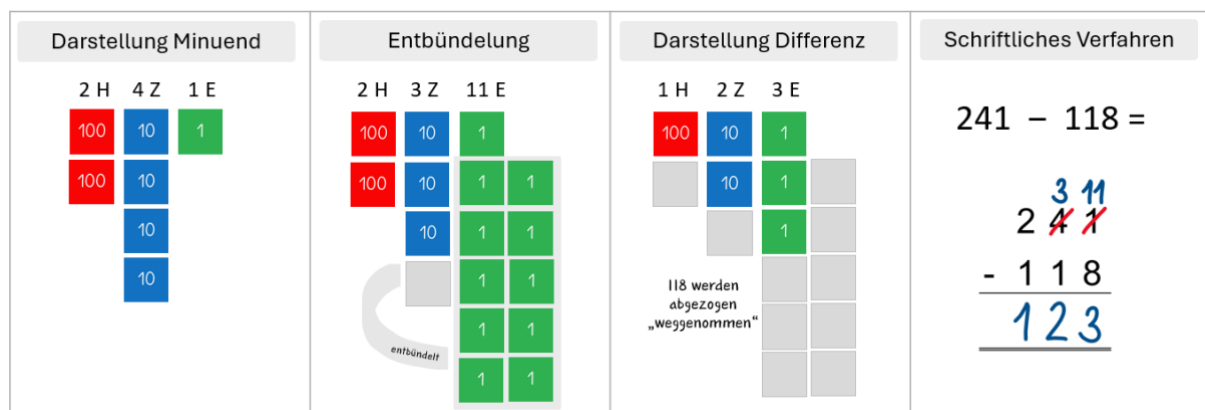


Abbildung 12: Subtraktion mit dem Markenspiel

Zu Beginn wird nur der Minuend (hier 241) mit Marken dargestellt. Der Subtrahend wird Stelle für Stelle abgezogen. Dies wird durch die grauen Felder symbolisiert.

Um die Acht an der Einerstelle abziehen, muss ein Zehner entbündelt werden. Nachdem acht Einer, ein Zehner und ein Hunderter weggenommen wurden, bleibt die Differenz, also das Ergebnis, übrig.

Der Materialeinsatz und die Anwendung des Verfahrens *Wegnehmen und Entbündeln* ermöglichen es, die Grundvorstellung des Subtrahierens zu veranschaulichen. So kann das Operationsverständnis im Bereich der Subtraktion (wie zum Beispiel in Kapitel 4.2. dargestellt) nachhaltig aufgebaut werden.

6 Zusammenfassung

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Entwicklung mathematischer Kompetenzen in der schulischen Bildung, insbesondere im Übergang von der Primar- zur Sekundarstufe I, von zentraler Bedeutung ist. Die Diskrepanz zwischen den hohen Erwartungen an die Schüler*innen und deren tatsächlichen mathematischen Fähigkeiten unterstreicht die Dringlichkeit, geeignete diagnostische und fördernde Maßnahmen zu implementieren. Die Differenzierung zwischen Dyskalkulie (Rechenstörung), Rechenschwäche und allgemeinen Rechenschwierigkeiten ist dabei entscheidend für eine gezielte Unterstützung der betroffenen Schüler*innen.

Die Ergebnisse der Leistungsmessungen zeigen zudem, dass ein erheblicher Teil der Schüler*innen in ihrer mathematischen Entwicklung eingeschränkt ist. Auch wenn die Grundlagen bereits in der Primarstufe hätten gelegt werden sollen, muss Schüler*innen der Sekundarstufe I Raum und Zeit gegeben werden, ein solides Verständnis für natürliche Zahlen, das Stellenwertsystem und die Rechenoperationen aufzubauen.

Die im Beitrag vorgestellten diagnostischen Instrumente sowie die darauf basierenden Fördermaßnahmen bieten wertvolle Ansätze zur Optimierung des mathematischen Kompetenzerwerbs. Methoden, die auf dem E-I-S-Prinzip und/oder dem 4-Phasen-Modell beruhen, gewährleisten, dass Schüler*innen ein tiefgehendes Verständnis für mathematische Konzepte entwickeln und damit eine nachhaltige Lernbasis geschaffen werden kann.

Die Forschung hat die Aufgabe, Best-Practice-Ansätze zu entwickeln und aufzuzeigen, wie eine gezielte Förderung effektiv in den Schulalltag integriert werden kann.

Literatur

- Benölken, R., & Hoiboom, N. (2024). Raus aus dem Klassentakt—Drehtürmodelle geben Raum für Begabungen. *Mathematik lehren*, 245, 13–16.
- BIFIE (2019). *Standardüberprüfung 2018. Mathematik, 4. Schulstufe. Bundesergebnisbericht*. BIFIE.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) (2023a). *Lehrplan Mathematik Sekundarstufe 1*.
<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850>
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) (2023b). *Lehrpläne der Volksschule und der Sonderschulen*. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung.
<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10009275>
- Bruner, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin-Verlag.
- Dögnitz, S. (2022). *Diagnostik von besonderen Rechenschwierigkeiten in der Sekundarstufe I*. Springer Spektrum.

- Dögnitz, S. (2023). *Allgemeine Informationen zum LeDi-Arithmetik*. <https://www.math.uni-leipzig.de/~didaktik/LeDi/Allgemeine%20Infos.pdf>
- Fischbach, A., Schuchardt, K., Brandenburg, J., Kleszczewski, J., Balke-Melcher, C., Schmidt, C., Büttner, G., Grube, D., Mähler, C., & Hasselhorn, M. (2013). Prävalenz von Lernschwächen und Lernstörungen: Zur Bedeutung der Diagnosekriterien. *Lernen und Lernstörungen*, 2(2), 65–76.
- Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen - oder auch nicht: Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Peter Lang.
- Gaidoschik, M. (2018). Schwächen im Rechnen vorbeugen—Durch Mathematikunterricht! *Erziehung und Unterricht*, 3–4, 280–288.
- Gaidoschik, M., Opitz, E. M., Nührenbörger, M., Rathgeb-Schnierer, E., & Götze, D. (2021). *Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.15952.64004>
- Haberstroh, S., & Schulte-Körne, G. (2019). The Diagnosis and Treatment of Dyscalculia. *Deutsches Ärzteblatt international*, 116, 107–114.
- Häsel-Weide, U., & Schöttler, C. (2021). Das Dezimalsystem verstehen – Bedeutung, Erkenntnisse, Anregungen. *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung & Praxis (ZMFP)*, 2.
- Landerl, K., Vogel, S., & Kaufmann, L. (2022). *Dyskalkulie: Modelle, Diagnostik, Intervention* (4. Aufl.). Ernst Reinhardt Verlag.
- Lorenz, J. H. (2008). *Lernschwache Rechner fördern: Ursachen der Rechenschwäche, Frühhinweise auf Rechenschwäche, diagnostisches Vorgehen* (5. Aufl.). Cornelsen Scriptor.
- Moser Opitz, E., Freesemann, O., & Prediger, S. (2016). *BASIS-MATH-G 4+-5 Gruppentest zur Basisdiagnostik Mathematik für das vierte Quartal der 4. Klasse und für die 5. Klasse*. Hogrefe.
- Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer.
- Resnick, L. B. (1983). A Developmental Theory of Number Understanding. In H. P. Ginsburg (Hrsg.), *The development of mathematical thinking* (S. 110–151). Academic Press New York.
- Schaupp, H., Lenart, F., & Holzer, N. (2020). *ERT 4+ Eggenberger Rechentest 4+*, überarbeitete Auflage mit erweiterten Normen. Hogrefe.
- Schipper, W. (2005). *Lernschwierigkeiten erkennen—Verständnisvolles Lernen fördern. Modulbeschreibungen des Programms SINUS-Transfer Grundschule. Mathematik*. Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN).
- Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schroedel.
- Schulz, A., & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/ Sekundarstufe: Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Springer Spektrum.
- Steinecke, A., & Martin, M. (2022). Bayreuther Testpaket zur Erfassung von Rechenschwäche in der Sekundarstufe. *Mathematikdidaktik im Kontext*, 8.
- Steinecke, A., & Ulm, V. (2025). *Rechenschwäche in der Sekundarstufe. Spezifische Schwierigkeiten verstehen, erkennen und überwinden*. Cornelsen.
- Wartha, S., & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_WarthaSchulz.pdf
- World Health Organisation (WHO) (2025). *International Classification of Diseases, 11th edition: ICD-11*, version 01/25. <https://icd.who.int/browse/2025-01/mms/en#308101648>

Negative Zahlen in der 6. Schulstufe

Eine aktive Erarbeitung neuer Grundvorstellungen

Andrea Karner¹, Lisa Meyer², Gabriele Sickl³

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1431>

Zusammenfassung

Der neue Lehrplan sieht vor, dass negative Zahlen bereits in der 6. Schulstufe erarbeitet werden. Neben dem Interpretieren, Darstellen und Vergleichen ganzer Zahlen sollen auch Summen und Differenzen der Form „ganze Zahl \pm natürliche Zahl“ gebildet werden. In diesem Beitrag wird ein didaktisch-methodischer Ansatz vorgestellt, der auf die aktive Erarbeitung von Grundvorstellungen setzt. Ein Temperaturmodell bildet die Grundlage, um den Zahlenraum mit verschiedenen Sinnen zu erfassen. Durch gezielte Vorstellungsübungen und Aktivitäten entwickeln die Schüler*innen tragfähige Grundvorstellungen, die ihnen helfen, Rechenoperationen als Bewegung auf der Zahlengeraden zu visualisieren und sicher durchzuführen.

Stichwörter: Negative Zahlen, Temperaturmodell, Zahlengerade

1. Einleitung

Viele Lehrpersonen bestätigen, dass die Einführung in das Thema der negativen Zahlen anfänglich oft auf positive Resonanz stößt. Doch die Leichtigkeit, die zu Beginn durch Alltagsbezüge wie Temperaturangaben, Stockwerke oder Meereshöhe entsteht, verliert sich schnell, sobald die Komplexität des Themas zunimmt. Dies wird spätestens bei der Einführung der Multiplikation von negativen Zahlen deutlich, da zu den Rechenregeln nur schwer Alltagsbezüge hergestellt werden können (Malle, 2007, S. 57). Verwirrungen treten häufig auf, wenn die Regel „Minus mal Minus ergibt Plus“ für Multiplikationen, nicht jedoch für Addition oder Subtraktion, bzw. nur lediglich im Kontext der Klammerauflösung angewendet werden kann. Um zu verstehen, dass eine Addition wie $(-1) + (-2)$ nicht zu einem positiven Ergebnis führt, müssen tragfähige Grundvorstellungen entwickelt werden, die es den Schüler*innen ermöglichen, sich sicher im Themenfeld zu bewegen.

¹ Pädagogische Hochschule Steiermark, Hasnerplatz 12, 8010 Graz.

E-Mail: andrea.karner@phst.at

² Praxismittelschule der Pädagogischen Hochschule Steiermark, Hasnerplatz 12, 8010 Graz.

³ Praxismittelschule der Pädagogischen Hochschule Steiermark, Hasnerplatz 12, 8010 Graz.

Hier setzt die Lehrplanänderung an. Die nun frühere Einführung negativer Zahlen soll den Schüler*innen helfen, negative Zahlen zu interpretieren, darzustellen sowie zu vergleichen und sie auf das Rechnen mit diesen vorbereiten. Ein besonderer Schwerpunkt liegt dabei auf der Darstellung von Additionen und Subtraktionen der Form „ganze Zahl \pm natürliche Zahl“ als Bewegungen auf der Zahlengeraden. Ziel ist es, nicht nur die Rechenoperationen zu üben, sondern auch grundlegende mathematische Vorstellungen zu entwickeln.

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit der didaktischen Vermittlung des Themas und dem gezielten Einsatz von praktischen Beispielen und Modellen zur Unterstützung des Lernprozesses.

2. Negative Zahlen im Lehrplan der 6. Schulstufe

Der neue Lehrplan für die Sekundarstufe 1 wurde zu Beginn des Jahres 2023 verabschiedet und trat mit dem Schuljahr 2023/24 in Kraft. Im Fach Mathematik wurden darin inhaltliche Anpassungen vorgenommen, die unter anderem das Themenfeld der ganzen Zahlen betreffen. Während im bisherigen Lehrplan die negativen Zahlen erst in der 7. Schulstufe behandelt wurden, ist ihre Einführung nun für die 2. Klasse der Sekundarstufe 1 vorgesehen (BMBWF, 2023).

Das Ziel in der 6. Schulstufe ist es, den Schüler*innen das Interpretieren, Darstellen und Vergleichen negativer Zahlen zu vermitteln sowie sie auf das Rechnen mit negativen Zahlen vorzubereiten. Dies erfolgt durch das Bilden von Summen und Differenzen in der Form „ganze Zahl \pm natürliche Zahl“, wobei die Operationen als Bewegungen auf der Zahlengeraden verstanden werden sollen. Die Schüler*innen sollen diese Berechnungen nicht nur durchführen, sondern auch deren Bedeutung begreifen. Ein praktisches Beispiel für die Anwendung stellt das Verschieben von Figuren im Koordinatensystem dar (BMBWF, 2023).

Die zeitlich vorverlegte Einführung des Inhalts beruht auf der Annahme, dass Schüler*innen bereits früh Vorkenntnisse zu diesem Thema haben und ein Alltagsverständnis entwickeln. Dieses Verständnis soll in der 6. Schulstufe genutzt werden, um „tragfähige flexible mentale Modelle“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 3) zu schaffen, und die Grundlage für die Objektivierung negativer Zahlen zu bilden (Malle, 2007, S. 52 f.). Durch den frühzeitigen Aufbau dieser Grundlagen wird eine stabile Basis für die 7. Schulstufe geschaffen, die ein nahtloses Weiterarbeiten ermöglicht. Dadurch werden auch fehlerhafte Überlagerungen von Vorstellungen über die Bewegung auf der Zahlengeraden bei der Addition und Subtraktion und anderen Rechenregeln für ganze Zahlen vermieden.

3. Die Entstehung negativer Zahlen nach Malle (2007)

Malle (2007, S. 52 f.) beschreibt in einem vierstufigen Modell die Entstehung negativer Zahlen (siehe Abbildung 1). Zu Beginn werden negative Zahlen noch nicht als eigenständige Denkobjekte betrachtet, sondern als spezielle Interpretation natürlicher Zahlen verstanden. Erst durch das Durchlaufen aller vier Stadien wird eine Objektivierung erreicht, die negative Zahlen als eigenständige Denkobjekte in die mathematischen Prozesse integriert.



Abbildung 1: Die vier Entwicklungsstadien negativer Zahlen nach Malle (2007, S. 52 f.)

Im Folgenden werden die vier Entwicklungsstadien nach Malle (2007) beschrieben und zugehörige Herausforderungen aufgezeigt.

3.1 Vorkenntnisse und Alltagsverständnis negativer Zahlen

Kinder entwickeln frühzeitig ein Alltagsverständnis für negative Zahlen (Malle, 2007, S. 52). Dies geschieht beispielsweise, wenn sie ein Thermometer mit Minusgraden betrachten oder der Lift im 2. Untergeschoss stehen bleibt. Sie sind auch sehr früh in der Lage, die entsprechenden Werte zu interpretieren und in einigen Fällen einfache Rechenoperationen wie „Ausgangszustand + Veränderung = Endzustand“ durchzuführen (Malle, 2007, S. 52).

Obwohl es den Anschein hat, dass Kinder die Komplexität der negativen Zahlen erfasst haben, denken sie zunächst in den ihnen vertrauten natürlichen Zahlen und nehmen Interpretationen vor, die ihrem Alltagsverständnis entsprechen. Ein Beispiel dafür ist „ein Stockwerk über und ein Stockwerk unter dem Erdgeschoss“. Dazu ist nicht einmal ein Vorzeichen erforderlich.

Malle (2007, S. 54) leitet aus eigenen empirischen Daten ab, dass Kinder anfangs abstrakte Schemata zur Lösung von Aufgaben mit negativen Zahlen entwickeln. Dazu zählen primär Richtungsschemata aus ihren Alltagserfahrungen (z.B. „Wenn die Temperatur von 3°C um 4°C sinkt, dann ist sie unter Null.“). Diese Richtungsschemata führen jedoch nicht automatisch zu den Eigenschaften ganzer Zahlen, die die Grundlage für die Addition und Subtraktion in diesem Zahlbereich bilden.

Trotz des vorhandenen Vorwissens und Alltagsverständnisses darf fälschlicherweise nicht davon ausgegangen werden, dass mit der Verwendung eines Thermometers auch automatisch der Bezug zur Zahlengerade hergestellt und Temperaturveränderungen dargestellt werden können.

So zeigt auch das Beispiel von Malle (2007, S. 53), dass die Schüler*innen im Allgemeinen Aufgaben zu Temperaturveränderungen „zwar sofort lösen konnten, aber die größten Schwierigkeiten hatten, ihre Lösung auf einer Zahlengeraden darzustellen“. Zum Beispiel stellten sie die Anfangs- und Endtemperatur auf zwei verschiedenen Thermometern dar. Manchmal versuchten sie sogar, die Temperaturveränderung auf einem dritten Thermometer einzutragen. Dieses Beispiel zeigt, dass ein bewusstes Erarbeiten der Zahlengeraden und damit eine Hinführung zur Entwicklungsstufe 2 notwendig ist.

3.2 Erster Anstoß zur Objektivierung der negativen Zahlen (Ordnung)

Die zweite Entwicklungsstufe nach Malle (2007) stellt die Ordnung der ganzen Zahlen in den Mittelpunkt. Während es bei den natürlichen Zahlen eine klare Wertvorstellung von „links – kleiner“ und „rechts – größer“ gibt, ist diese bei den ganzen Zahlen nicht mehr gegeben. Zudem ist ein verändertes Verständnis von mehr und weniger erforderlich (Ulovec, 2007, S. 16), da im Bereich der negativen Zahlen andere Wertigkeiten vorliegen. Dies wird besonders beim Vergleich ganzer Zahlen deutlich (Malle, 2007, S. 54). Die Frage, welche Zahl kleiner ist – „-6 oder -3?“ –, lässt sich mit dem Alltagsverständnis beantworten, indem darauf hingewiesen wird, dass -6°C kälter ist als -3°C . Beim Vergleich der Zahlenwerte auf der Zahlengeraden kann es jedoch zu Irritationen kommen, da im gewohnten System der natürlichen Zahlen eine andere Ordnung herrscht als im Bereich der negativen Zahlen, die spiegelbildlich verläuft.

Geht es um die Ordnung ganzer Zahlen, so spielt der Umgang mit der Zahlengeraden eine entscheidende Rolle. Ein Beispiel hierfür ist das *divided number line model*, das bei vielen Schüler*innen zu Verständnisschwierigkeiten führt (Peled et al., 1989, S. 108).

Bei diesem Modell wird die Zahlengerade in zwei Bereiche unterteilt – links und rechts der Null (siehe Abbildung 2). Bei der Verwendung dieser Sichtweise neigen Schüler*innen dazu, die Zahlen anhand ihres Abstands zur Null zu interpretieren bzw. zu vergleichen (Peled et al., 1989, S. 108). Diese Fokussierung auf die Null kann jedoch dazu führen, dass die Zahlengerade dauerhaft als zweigeteilt wahrgenommen wird. Dies schränkt die Flexibilität im Umgang mit der Zahlengeraden ein.

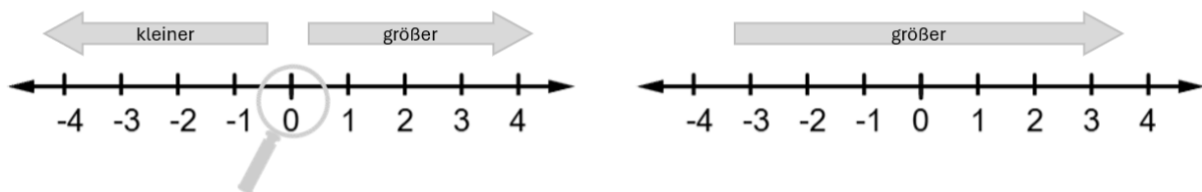


Abbildung 2: *divided number line* & *continuous number line model* nach Peled et al. (1989, S. 108)

„Erst die Vorstellung, das Vorwärtszählen durchgehend von unten/links nach oben/rechts zu betreiben, bringt es wieder mit der Ordnung in Einklang“ (Winter, 1989, S. 23). Daher sollte das *continuous number line model* (siehe Abbildung 2) angestrebt werden (Peled et al., 1989, S. 108), bei dem die Schüler*innen die Zahlengerade als durchgehende Einheit begreifen und kontinuierlich von links nach rechts zählen. Dies vereinfacht den Größenvergleich (Dögnitz, 2022, S. 279).

Grundsätzlich fördert diese Vorstellung die Entwicklung tragfähiger und flexibler mentaler Modelle für mathematische Konzepte, die den Schüler*innen in ihrem weiteren Lernen zugutekommen (Padberg & Wartha, 2017, S. 3).

3.3 Addition und Subtraktion negativer Zahlen

Während im zweiten Stadium negative Zahlen als Größen und Zählzahlen verstanden werden, werden sie im dritten Stadium als Operatoren interpretiert (Dögnitz, 2022, S. 280). Mit der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen wird auch die Unterscheidung zwischen Rechenzeichen und Vorzeichen relevant. Diese Differenzierung wird durch die Einführung von Klammernausdrücken verdeutlicht.

Bei der Unterscheidung von Rechenzeichen und Vorzeichen können Darstellungen oder Bewegungen auf der Zahlengerade hilfreich sein. Schließlich zeigt die Bewegung, die in die entgegengesetzte Richtung durchgeführt wird, dass die Subtraktion einer ganzen Zahl auf die Addition der Gegenzahl zurückgeführt werden kann (Malle, 2007, S. 55).

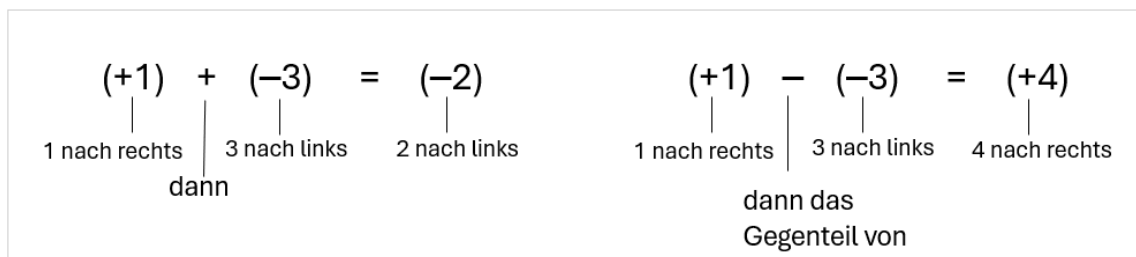


Abbildung 3: Additionen ganzer Zahlen mit Bewegungshinweisen (Malle, 2007, S. 55)

Laut Malle (2007, S. 54) wird häufig die einfachere Schreibweise ohne Klammern bevorzugt, da mit dieser noch in den „alten Zahlen“ (natürlichen Zahlen mit Interpretation) gedacht werden kann. Diese Vorgehensweise ist jedoch mathematisch nicht korrekt, denn die Summe von 3 und -7 kann nicht mit $3 - 7$ dargestellt werden, weil dieser Ausdruck eine Subtraktion beschreibt.

Wenn die zugehörigen Grundvorstellungen fehlen, kann es bei der Bearbeitung der Aufgaben zu falschen Lösungen kommen. Dies wird in Abbildung 4 deutlich, in der $(-5) + (-3)$ nicht Minus, sondern Plus 8 ergibt. Hier kann davon ausgegangen werden, dass die Rechenregel aus der Multiplikation „Minus mal Minus ergibt Plus“ angewendet wurde. Darüber hinaus können undifferenzierte Vorgehensweisen im Umgang mit Rechenoperationen und Vorzeichen die Folge sein (siehe Abbildung 4 links).

$$(-5) + (-3) = +8$$

$$(-5) + (-3) =$$

$$+5 - 3 = \underline{+2}$$

Abbildung 4: Addition ganzer Zahlen – fehlerhafte Lösungen

3.4 Der endgültige Anstoß zur Objektivierung (Multiplikation)

Während bei der Ordnung sowie der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen negative Zahlen noch als eigenständige Denkobjekte vermieden werden können, trifft dies bei der Multiplikation ganzer Zahlen nicht mehr zu. In diesem Bereich sind die Vorzeichenregeln (z. B. Minus mal Minus ergibt Plus) mit der Auffassung von negativen Zahlen als „alte Zahlen mit einer zusätzlichen Interpretation“ nicht mehr vereinbar. Dies führt zu einem entscheidenden Schritt hin zur Objektivierung der negativen Zahlen (Malle, 2007, S. 57). Da nach Malle keine Alltagsbezüge mehr hergestellt werden können, müssten die Vorzeichenregeln der Multiplikation per Definition festgelegt werden.

Für das „Zauberkessel“-Temperaturmodell ist dies jedoch möglich, weil sich die Multiplikation als wiederholtes Hinzufügen oder Wegnehmen von Wärme- und Kältesteinen veranschaulichen lässt. Da sich dieser Beitrag auf die 6. Schulstufe des österreichischen Lehrplans konzentriert, wird dieser Aspekt hier nicht weiter behandelt. Im Folgenden wird eine unterrichtspraktische Reihe mit dem „Zauberkessel“-Temperaturmodell vorgestellt.

4. Das „Zauberkessel“-Temperaturmodell

Mit dem „Zauberkessel“-Temperaturmodell bietet sich eine Möglichkeit, die Schüler*innen bei ihren Vorstellungen abzuholen und zu der Ordnung ganzer Zahlen hinzuführen. Temperaturen lassen sich über ein Thermometer ablesen, welches dann als Zahlengerade interpretiert werden kann. Temperaturen „im Minus“ bedeuten Werte unter dem Gefrierpunkt (z. B. unter 0°C) und werden als negative Zahlen betrachtet. Temperaturen „im Plus“ liegen über dem Gefrierpunkt und werden als positive Zahlen aufgefasst.

Es ist wichtig zu betonen, dass dieser Ansatz eine vereinfachte (teilweise unzulässige) Darstellung der physikalischen Gesetze erfordert. Beispielsweise könnte für das Element Wasser der Zahlenbereich von -100°C bis +100°C verwendet werden. Bicker und Schütte-Seitz (2020, 16 f.) schlagen in ihrem Unterrichtsentwurf „Der Zauberkessel“ vor, eine Fantasiewelt zu nutzen, um den physikalischen Gesetzen zu entkommen.

Allgemeingültige Temperaturmodelle können in vielen Fällen jedoch nur für den Einstieg in die Thematik verwendet werden, da sie nicht universell bzw. international einsetzbar sind. So

weist Schindler (2014, S. 103) in Bezug auf die Untersuchungen von Borba (1995, S. 229) darauf hin, dass es nicht auf allen Breitengraden der Erde Minusgrade gibt und es daher nicht für alle Kinder möglich ist, Alltagsbezüge zu Minusgraden herzustellen.

Bei Auseinandersetzung mit negativen Zahlen können die Schüler*innen auf verschiedene Zahlaspekte (kardinal und/oder ordinal) oder auch Darstellungsformen (kontextuell und/oder formal-symbolisch) fokussieren, die – wie die Pfeile in Abbildung 5 zeigen – miteinander in Zusammenhang stehen (Schindler, 2014, S. 85 f.).

In Bezug auf die Dimension der Darstellungsformen nimmt das Thermometer eine wichtige kontextuelle Rolle ein. Formal-symbolisch lernen die Schüler*innen, dass die negativen Zahlen mit Klammern zu versehen sind. Die Klammerschreibweise kommt vor allem dann zum Tragen, wenn Addition und Subtraktion vom Bereich der natürlichen Zahlen auf die ganzen Zahlen ausgeweitet werden (Malle, 2007, S. 54).

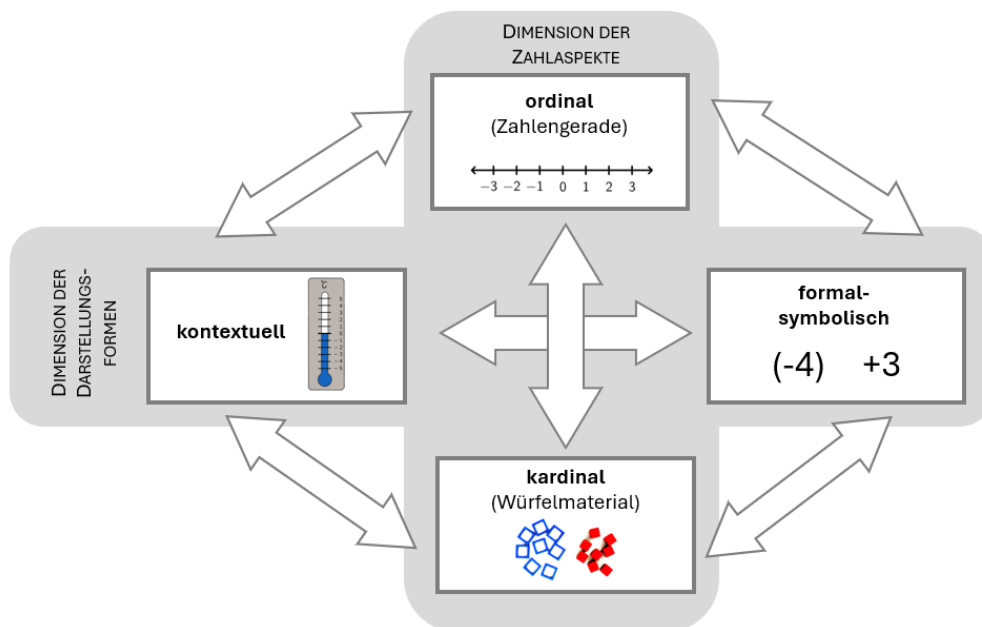


Abbildung 5: Fokussierungsebenen – Temperatur in Anlehnung an Schindler (2014, S. 93)

Auch wenn die negativen Zahlen aufgrund des Thermometers meist ordinal, d.h. nach ihrer Reihenfolge, interpretiert werden, gibt es die Möglichkeit, diesen Zahlenbereich kardinal, also mit der Darstellung von Mengen, zu betrachten.

Wittmann (2024, S. 68) greift zum Beispiel den Kardinalzahlaspekt auf, indem er ganze Zahlen mit schwarzen und roten Plättchen repräsentiert. In Anlehnung daran gibt es ein Würfelmaterial, bei dem die positiven Zahlen mit Würfeln und die negativen Zahlen mit Rahmen dargestellt werden. In Abbildung 5 werden diese Formen entsprechend der Farbcodierung der Temperaturen mit rot und blau präsentiert.

5. Eine unterrichtspraktische Reihe zum „Zauberessel“-Temperaturmodell

Im folgenden Abschnitt wird eine unterrichtspraktische Reihe vorgestellt, die auf den Arbeiten von Bicker und Schütte-Seitz (2020) basiert. In ihrem Beitrag „Was hast du dir vorgestellt?“ präsentieren die Autorinnen Vorstellungsübungen, die sich gut als Einstieg für die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen eignen. Elemente dieser Übungen werden in Abschnitt 5.3 aufgegriffen. Die Weiterentwicklung des Konzepts umfasst Unterrichtsabschnitte, die sich auf das Interpretieren, Darstellen und Vergleichen negativer Zahlen konzentrieren, um so die Schüler*innen auf das Rechnen mit negativen Zahlen vorzubereiten. Auf die Multiplikation, dargestellt durch das wiederholte Hinzufügen und Wegnehmen von Wärme- und Kältesteinen, wird verzichtet, da es sich um einen Inhalt der 7. Schulstufe handelt.

5.1 Alltagsbezüge zu Temperaturen mit Wärme- und Kältesteinen

Wird der Fokus auf einzelne Temperaturwerte gelegt, können diese in einem handlungsorientierten Unterricht anhand von Wärme- und Kältesteinen repräsentiert werden (siehe Abbildung 6). Sie lassen sich mit verschiedenen Sinneswahrnehmungen verbinden. So kann nicht nur zwischen blau und rot unterschieden werden, sondern es können auch Assoziationen wie blau – kalt – negativ und niedrige Temperatur sowie rot – warm – positiv und höhere Temperatur hergestellt werden.

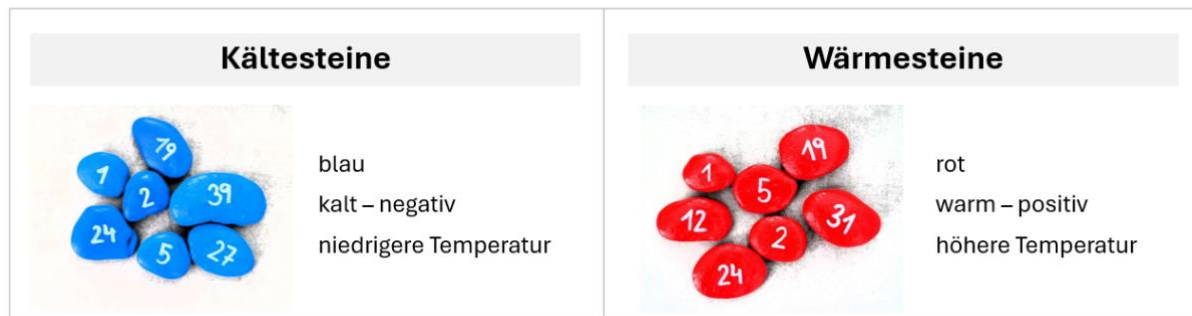


Abbildung 6: Kälte- und Wärmesteine

Zu Beginn der Unterrichtsreihe lernen die Schüler*innen die Wärme- und Kältesteine kennen. Sie erfahren, dass die roten Steine warm und die blauen Steine kalt sind. Die Zahlen auf den Steinen geben den Temperaturwert an und zeigen, wie warm oder kalt jeder Stein ist.

Um die Aktivierung der Sinne und den Bezug zu Alltagserfahrungen zu fördern, kann bei der Einführung ein Stein schauspielerisch fallengelassen werden, um zu verdeutlichen, dass er besonders warm oder sogar heiß ist.

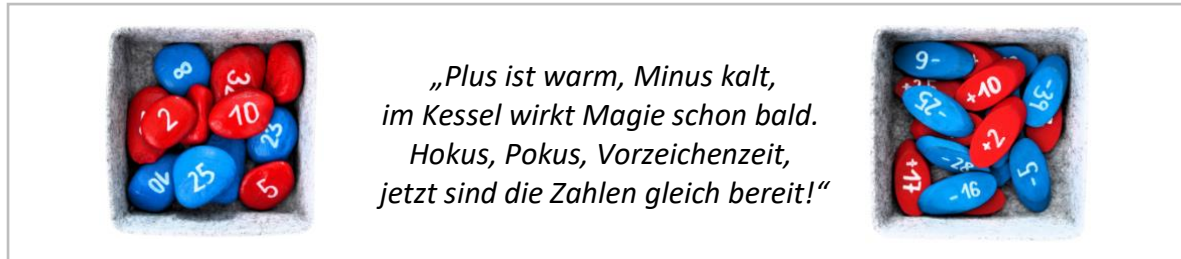


Abbildung 7: Wärme- und Kältesteine mit und ohne Vorzeichen

Auch wenn dies nicht dem Entwicklungsmodell von Malle (2007) entspricht, können bereits am Beginn der Unterrichtsreihe die Vorzeichen eingeführt werden. Mit einem Zauber, der durch einen passenden Spruch begleitet wird, erhalten die Steine ihre Vorzeichen. Dazu werden zwei verschiedene Sets an Steinen vorbereitet (siehe Abbildung 7).

5.2 Aufbau der Ordnung mit Wärme- und Kältesteinen

Im „Zauberkessel“-Temperaturmodell wird die Ordnung ganzer Zahlen durch die Aneinanderreihung von Wärme- und Kältesteinen repräsentiert. Durch diese Darstellung, die der Zahlengeraden ähnelt, können Schüler*innen negative Zahlen in einer kontinuierlichen, linearen Anordnung begreifen und erkennen, „dass die Ordnung ganzer Zahlen eine Definition ist“ (Malle, 2007, S. 54). Die Grundlage der Erkenntnis bildet der Vergleich von Wärme- und Kältesteinen und der Aufbau der Zahlengeraden.

5.2.1 Wärmer oder kälter? – Ganze Zahlen vergleichen

Zu Beginn wird eine Impulsfrage gestellt, um ganze Zahlen miteinander zu vergleichen: „Welche Steine sind angenehm kühl, welche sind eiskalt?“ Dies dient als Vorübung für den Aufbau der Zahlengeraden.



Abbildung 8: Vergleich von Kältesteinen

Verschiedene weitere Fragen regen die Schüler*innen an, die Steine hinsichtlich ihrer Eigenschaften zu vergleichen und zu beschreiben. Zunächst werden nur rote oder nur blaue Steine miteinander verglichen. Im nächsten Schritt erfolgt der Vergleich zwischen roten und blauen Steinen.

5.2.2 Von der Anordnung von Wärme- und Kältesteinen zur Zahlengeraden

Alle Schüler*innen erhalten einen Wärme- bzw. einen Kältestein und werden aufgefordert, zunächst die roten Steine entsprechend ihres Wertes der Reihe nach auf dem Boden

aufzulegen. Im zweiten Durchgang kommen die blauen Steine dazu und der Zahlenstrahl wird zu einer Zahlengeraden erweitert. Dadurch wird den Schüler*innen der gespiegelte Aufbau der Werte auf der Geraden veranschaulicht.

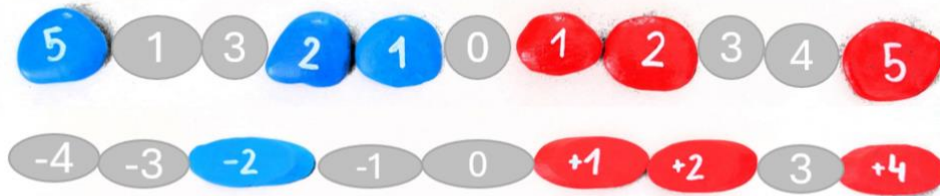


Abbildung 9: „Auffüllen“ der Zahlengerade mit Wärme- und Kältesteinen mit und ohne Vorzeichen

Da unterschiedliche Steine zur Verfügung stehen, muss die Zahlengerade „aufgefüllt“ werden (siehe Abbildung 9). Dies ist „ein erster Schritt zu einer tragfähigen ordinalen Zahlvorstellung“ (Schulz & Wartha, 2021, S. 30).

Ein weiterer Legedurchgang, bei dem auf die fortlaufende Struktur und Anordnung der ganzen Zahlen geachtet wird, hilft den Schüler*innen, die Zahlengerade als kontinuierliches System (*continuous number line model*) zu verstehen (Peled et al., 1989, S. 108).

Im Anschluss folgt der Übergang zur Definition und Objektivierung des Gelernten. Auf der Tafel wird die 0 festgelegt und daraufhin die Zahl +1 auf der Zahlengeraden eingezeichnet. Auf der gegenüberliegenden Seite wird die Gegenzahl -1 gekennzeichnet. Diese Schritte werden dann in das Heft übertragen, sodass die Schüler*innen die Zahlengerade mit den definierten Zahlen und deren Beziehungen nachvollziehen können.

Zur Festigung eignen sich verschiedene Vergleichs- und Ordnungsübungen, wie zum Beispiel der Gegenüberstellung von Wärme- und Kältesteinen, wobei der Fokus auf die Zahlwerte gelegt wird. Eine weitere Übung ist „Wärmer oder Kälter“ – ein Rechenspiel von Bicker und Schütte-Seitz (2020). Zudem können Arbeitskärtchen mit unterschiedlichen Aufgabenstellungen zum Thema Zahlengerade eingesetzt werden.

5.3 Addition und Subtraktion mit dem Zauberkessel: Wärme- und Kältesteine hinzufügen oder wegnehmen

Der Unterrichtsabschnitt zur Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen baut auf der Vorstellungsübung von Bicker und Schütte-Seitz (2020) auf. Dabei ist die Verbindung mit der Bewegung auf der Zahlengeraden ein zentrales Element im vorliegenden Unterrichtsvorschlag.

5.3.1 Ganze Zahlen mit dem „Zauberkessel“-Temperaturmodell addieren und subtrahieren

Um das Addieren und Subtrahieren ganzer Zahlen mit dem „Zauberkessel“-Temperaturmodell darstellen zu können, sind in Anlehnung an den Unterrichtsentwurf von Bicker und Schüttele-Seitz (2020) Kälte- und Wärmesteine sowie ein Kessel in Form einer Schale erforderlich. Im Fokus steht die Temperatur im Zauberkessel, die einen bestimmten Ausgangswert annimmt.

Eine Veränderung der Temperatur erfolgt durch das Hinzufügen oder Wegnehmen eines Wärmesteins (oder Kältesteins in der 7. Schulstufe). Das Ergebnis wird durch den Endzustand beschrieben, also die endgültige Temperatur im Zauberkessel.

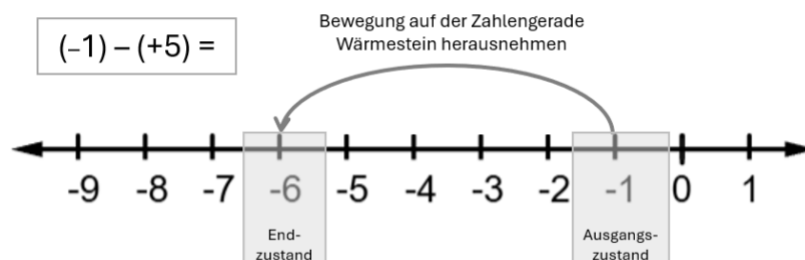


Abbildung 10: Subtraktion ganzer Zahlen – Zauberkessel in Verbindung mit der Zahlengeraden

Diese Zustandsänderungen können gleichzeitig auf der Zahlengerade abgebildet werden, wobei das Hinzufügen oder Wegnehmen eines Steins einer Bewegung auf der Zahlengerade entspricht. Wie aus der Darstellung in Abbildung 10 hervorgeht, wird bei der Entnahme eines Wärmesteins die Temperatur im Zauberkessel noch niedriger.

5.3.2 Wärme- und Kältesteine und die Temperatur im Zauberkessel

Im Rahmen einer Vorstellungsübung reisen die Kinder in einen Wald, in dem sich ein Zauberkessel mit Temperaturanzeige befindet. Sie beobachten einen Zauberer, der aus dem Zauberkessel Wärme- und Kältesteine entnimmt oder ihm hinzufügt.

Nach der Vorstellungsübung folgt eine Reflexionsphase, in der die Schüler*innen im Heft folgendes festhalten: „Was passiert, wenn ich einen roten oder blauen Stein in den Zauberkessel hineingebe oder aus ihm herausnehme?“ Ebenso notieren sie ihre Erkenntnisse im Heft und haben auch die Möglichkeit, einen Zauberkessel zu zeichnen (siehe Abbildung 11).



Abbildung 11: Hefteintrag

In der 6. Schulstufe werden einer Ausgangstemperatur im Bereich der ganzen Zahlen nur Wärmesteine hinzugefügt oder weggenommen, da laut Lehrplan in dieser Stufe nur Additionen und Subtraktionen der Form „ganze Zahl \pm natürliche Zahl“ vorgesehen sind. Leistungsstärkere Schüler*innen können selbstverständlich zum Weiterdenken angeregt werden und alle möglichen Fälle (siehe Abbildung 12) durchspielen.

Schulstufe	Veränderung
6.	$+$ (+) $+$ Wärmestein hinzufügen \rightarrow Ausgangstemperatur wird höher
	$-$ (+) $-$ Wärmestein wegnehmen \rightarrow Ausgangstemperatur wird niedriger
7.	$+$ (-) $-$ Kältestein hinzufügen \rightarrow Ausgangstemperatur wird niedriger
	$-$ (-) $+$ Kältestein wegnehmen \rightarrow Ausgangstemperatur wird höher

Abbildung 12: Zustandsveränderungen im Zauberkessel

5.3.3 Von den Wärme- und Kältesteinen zur Bewegung auf der Zahlengerade

Im nächsten Unterrichtsabschnitt werden ausgehend von den Bewegungen der Wärme- und Kältesteine Additionen und Subtraktionen als Bewegungen auf der Zahlengerade dargestellt.

Dazu wird eine (Zahlen)gerade mit Klebeband auf dem Gang markiert. Die Schüler*innen versammeln sich um diese, während die Lehrperson neben dem Zauberkessel steht und die Vorgehensweise erklärt: Die Ausgangstemperatur liegt beispielsweise bei -2°C . Die Lehrperson begibt sich auf diese Position auf der Zahlengerade. Ein Wärmestein, zum Beispiel $+3$, wird nun „weggenommen“, und die Lehrperson bewegt sich drei Abschnitte nach links, sodass sie bei -5 steht. Danach sind die Schüler*innen an der Reihe. Sie erhalten Aufträge bzw. Auftragskarten und führen die Additionen und Subtraktionen eigenständig auf der Zahlengerade durch. Als zusätzliches Spiel können die Schüler*innen die Bewegungen auf einer ausgedruckten Zahlengeraden ausführen, die auf dem Tisch liegt. Dabei werden Spielkegel entsprechend der gewürfelten Augenzahl bewegt.

Eine besondere Beachtung sollen dabei „Übergänge über die 0“ finden, damit die Schüler*innen die Zahlengerade als durchgehende Einheit begreifen.

Resümee

Mit dem neuen Lehrplan ist das Thema der negativen Zahlen nun in der 6. Schulstufe fest verankert. Die Schüler*innen sollen negative Zahlen darstellen, interpretieren sowie vergleichen und grundlegende Vorstellungen entwickeln, um erste Additionen und Subtraktionen als Bewegungen auf der Zahlengeraden durchzuführen. Der Übergang von Alltagsvorstellungen zu mathematischen Definitionen spielt in dieser Stufe eine entscheidende Rolle und unterstützt das Weiterlernen im 7. Schuljahr.

Allerdings stoßen die Schüler*innen auch bei der Einführung der ganzen Zahlen auf Verständnisschwierigkeiten. Trotz vorhandenem Alltagswissen verstehen Kinder die Komplexität der negativen Zahlen zunächst nicht, was sich im Umgang mit der Zahlengerade oder der Anwendung von Rechenregeln zeigt.

Das „Zauberkessel“-Temperaturmodell stellt eine didaktisch-methodische Unterrichtsreihe dar, die die Schüler*innen an diesem Punkt abholt. Es entspricht dem Alltagsverständnis der Schüler*innen und unterstützt den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen. Wärme- und Kältesteine mit unterschiedlichen Temperaturwerten sprechen verschiedene Sinne an und können für den Aufbau der Ordnung ganzer Zahlen auf der Zahlengeraden verwendet werden. Durch Übungen wie das korrekte Anordnen der Steine auf der Zahlengeraden, das Vergleichen von Steinen hinsichtlich ihrer Eigenschaften, das Verändern der Ausgangstemperatur im Zauberkessel durch Hinzufügen oder Wegnehmen von Wärmesteinen sowie dazu passende Bewegungen auf der Zahlengeraden können Schüler*innen nachhaltige Grundvorstellungen für die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen aufbauen.

Literatur

- Bicker, U., & Schütte-Seiz, D. (2020). Was hast du dir vorgestellt? Mit einer mathematischen Vorstellungsübung zu den negativen Zahlen, *Mathematik 5-10*, 51, 15–19.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) (2023). *Lehrplan Mathematik Sekundarstufe 1*.
<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850>
- Borba, R. E. (1995). Understanding and Operating with Integers: Difficulties and Obstacles. In L. Meira & D. Carraher (Hrsg.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (226–231).
- Dögnitz, S. (2022). *Diagnostik von besonderen Rechenschwierigkeiten in der Sekundarstufe I*. Springer Spektrum.
- Malle, G. (2007). Die Entstehung negativer Zahlen. Der Weg vom ersten Kennenlernen bis zu eigenständigen Denksystemen, *Mathematik lehren*, 142, 52–57.
- Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer.
- Peled, I., Mukhopadhyay, S., & Resnick, L. B. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Hrsg.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (106–110).
- Schindler, M. (2014). *Auf dem Weg zum Begriff der negativen Zahl: Empirische Studie zur Ordnungsrelation für ganze Zahlen aus inferentieller Perspektive*. Springer.
- Schulz, A., & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/ Sekundarstufe: Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Springer Spektrum.
- Ulovec, A. (2007). Wenn sich Vorstellungen wandeln. Ebenen der Zahlbereichserweiterungen, *Mathematik lehren*, 142, 14–16.
- Winter, H. (1989). Da ist weniger mehr. Die verdrehte Welt der negativen Zahlen, *Mathematik lehren*, 35, 22–25.

mathektiv

Monika Musilek¹

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1416>

Zusammenfassung

Der Beitrag „mathektiv“ zeigt Wege auf, wie Mathematikunterricht durch den gezielten Einsatz von Spielen und Rätseln bereichert werden kann, um Lernende aktiv einzubinden und kognitiv zu fordern. Der Begriff „mathektiv“ verbindet „Mathematik“ und „aktiv“ und betont die Bedeutung eines forschenden und entdeckenden Lernens, ähnlich einem Detektiv, der Muster aufspürt und logische Zusammenhänge erkennt. Der Artikel stützt sich auf fünf Qualitätsprinzipien – kognitive Aktivierung, Verstehensorientierung, Durchgängigkeit, Lernendenorientierung & Adaptivität sowie Kommunikationsförderung – und zeigt anhand konkreter Beispiele, wie diese Prinzipien umgesetzt werden können. Kartentricks, oder Würfelspiele fördern sowohl mathematische als auch überfachliche Kompetenzen. Sie schaffen motivierende Lernumgebungen, regen zum Nachdenken an und ermöglichen differenzierte Lernwege. Der Beitrag hebt hervor, dass solche Spiele nicht nur mathematische Kompetenzen fördern, sondern Lernende auch dazu einladen, Mathematik als lebendige und spannende Disziplin zu erleben.

Stichwörter: Spiele im Mathematikunterricht, Entdeckendes Lernen

1 Einleitung

Der Titel dieses Beitrags, *mathektiv*, mag auf den ersten Blick ungewöhnlich erscheinen. Welche Assoziationen weckt er? Einige denken möglicherweise sofort an einen Detektiv – eine Person, die systematisch recherchiert, beobachtet und aus ihren Erkenntnissen Schlussfolgerungen zieht. Interessanterweise sind genau diese Tätigkeiten essenziell für die Mathematik: Auch hier geht es darum, Strukturen zu untersuchen, Muster zu erkennen und aus Beobachtungen logische Schlüsse zu ziehen. Andere wiederum identifizieren in *mathektiv* ein Kofferwort, eine Wortneuschöpfung, die durch die Verschmelzung zweier Begriffe entsteht – ähnlich wie „Brunch“ (aus breakfast und lunch) oder „Denglisch“ (aus Deutsch und Englisch). In diesem Fall lassen sich die Wörter *mathe* (als allgemein gebräuchliche Abkürzung für Mathematik) und *aktiv* erkennen. Diese Interpretation betont die zentrale Idee dieses

¹ Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.

E-Mail: monika.musilek@phwien.ac.at

Beitrags: Mathematik soll nicht passiv rezipiert, sondern aktiv erlebt werden. Beide Lesarten – das detektivische Aufspüren mathematischer Muster und die aktive Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten – stehen im Zentrum dieses Artikels. Ziel ist es, Wege aufzuzeigen, wie durch den gezielten Einsatz mathematischer Spiele und Rätsel ein Unterricht gestaltet werden kann, der kognitive Aktivierung fördert und Lernende dazu einlädt, Mathematik als eine forschende, entdeckende Disziplin zu erleben.

2 Qualitätsvoll Mathematik unterrichten

Die in diesem Artikel vorgestellten Lerngelegenheiten basieren auf den fünf zentralen Aspekten eines qualitativollen Mathematikunterrichts: kognitive Aktivierung, Verstehensorientierung, Durchgängigkeit, Lernendenorientierung & Adaptivität sowie Kommunikationsförderung (Holzäpfel et al., 2024).

Diese Prinzipien dienen als Leitlinien für die Konzeption und Auswahl der Aufgaben, um sicherzustellen, dass sie nicht nur mathematisch reichhaltig sind, sondern auch zum entdeckenden und aktiven Lernen anregen – ganz im Sinne von „*mathektiv*“. Jede Aufgabe wurde so gestaltet, dass sie die Lernenden herausfordert, zum Nachdenken anregt und nachhaltige Lernprozesse ermöglicht. Dabei spielen die gezielte Einbettung in bestehende Lernstrukturen, die Nutzung verschiedener Darstellungsformen sowie adaptive und kommunikative Elemente eine zentrale Rolle. Im Folgenden werden diese fünf Qualitätsmerkmale in Anlehnung an Holzäpfel et al. (2024) näher erläutert, um die didaktische Grundlage hinter den Aufgaben transparent zu machen.

qualitätsvoll Mathematik unterrichten

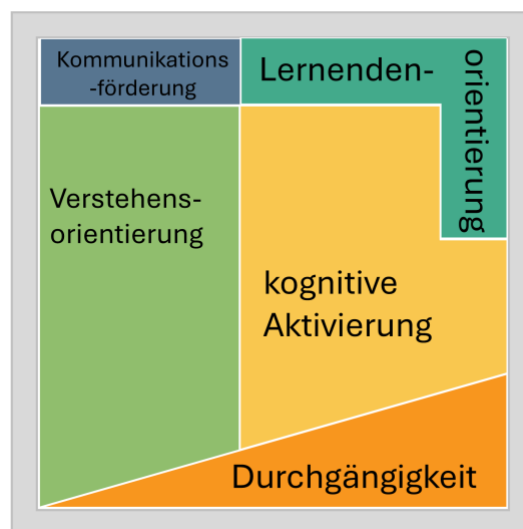


Abbildung 1: Rahmen für qualitativollen Mathematikunterricht
(eigene Darstellung in Anlehnung an Holzäpfel et al., 2024)

Ein kognitiv aktivierender Mathematikunterricht ermutigt Lernende dazu, sich aktiv und intensiv mit mathematischen Inhalten auseinanderzusetzen. Im Vordergrund steht dabei nicht nur das bloße Reproduzieren von Wissen, sondern vielmehr das eigenständige Erkunden, Strukturieren und Hinterfragen mathematischer Zusammenhänge. Ein Mathematikunterricht, der kognitive Aktivierung fördert, zeichnet sich durch herausfordernde und vielfältige Lerngelegenheiten aus. Diese regen die Lernenden dazu an, Probleme zu lösen, ihre Überlegungen zu begründen und Wissen miteinander zu vernetzen (Leuders & Holzäpfel, 2011).

Die Verstehensorientierung zielt darauf ab, dass Lernende nicht nur Regeln und Algorithmen anwenden, sondern die zugrunde liegenden mathematischen Konzepte tiefgehend durchdringen und flexibel auf neue Situationen übertragen können (Krauthausen & Scherer, 2010). Für die Entwicklung eines fundierten Verständnisses von Konzepten, Strategien und Verfahren ist eine adäquate Unterrichtsgestaltung sowie eine unterstützende Begleitung durch die Lehrperson erforderlich. In diesen Phasen sollten geeignete Darstellungsformen, wie Tabellen, Diagramme und Materialien, angeboten werden, um das konzeptuelle Verständnis zu fördern. Gleichzeitig muss den Lernenden ausreichend Raum gegeben werden, damit sie ihre eigenen Denkwege reflektieren, begründen und alternative Strategien diskutieren können.

Das Kommunizieren über Mathematik ist aber auch eine Fähigkeit, die erlernt werden muss. Die damit verbundenen sprachlichen Handlungen und notwendigen Sprachmittel sind daher Teil des Lernprozesses. Im Unterricht wird die Sprache gezielt gefördert, unterstützt und schrittweise aufgebaut, um die Lernenden auf die jeweiligen fachlich relevanten sprachlichen Anforderungen vorzubereiten.

Lernendenorientierung und Adaptivität basiert darauf, dass unterschiedliche Lernvoraussetzungen und -bedarfe angemessen berücksichtigt werden. Lernpfade werden so konzipiert, dass die Lernenden auf der Grundlage ihrer bestehenden Vorstellungen eigenständig mathematische Konzepte erschließen können. Ein adaptiver Unterricht geht noch einen Schritt weiter und berücksichtigt die individuelle Heterogenität der Lernenden. Mittels diagnostischer Verfahren werden die individuellen Lernstände erfasst, um darauf basierend die nächsten Schritte im individuellen Lernprozess gezielt zu fördern.

Durchgängigkeit im Mathematikunterricht bezieht sich auf langfristiges und aufbauendes Lernen. Da Lernen ein fortlaufender Prozess ist, baut es auf bereits erworbenem Wissen auf und führt schrittweise zu neuen Lernzielen. Grundlegende mathematische Ideen, Inhalte, Aufgaben und Darstellungsformen werden im Verlauf der Schulzeit wiederholt aufgegriffen – auf unterschiedlichen Niveaus und aus verschiedenen Perspektiven –, um das Verständnis zu vertiefen und Zusammenhänge herzustellen. Für die Unterrichtsgestaltung bedeutet dies, gezielt zu überlegen: Welche Darstellungen und Vorstellungen eignen sich, weil sie gut weitergeführt werden können? Welche Anknüpfungen an vorherige Lernstufen sollten explizit hergestellt werden? Welche Verstehenslücken müssen rechtzeitig aufgearbeitet werden, damit alle Lernenden auf tragfähige und durchgängig nutzbare Vorstellungen und Darstellungen zurückgreifen können? (Prediger et al., 2023)

„Die mathematische Bildung von Kindern und Jugendlichen wird entscheidend von den Lerngelegenheiten geprägt, die sie im Mathematikunterricht und bereits in den Kindertagesstätten erhalten. Mathematisches Lernen ist dann am nachhaltigsten, wenn aktives Denken gezielt angeregt wird, an den Lernstand der Lernenden angeknüpft wird und ein Verständnis nicht nur für Konzepte, sondern auch für Strategien und Verfahren aufgebaut wird.“ (DZLM, 2025)

Spiele bieten im Mathematikunterricht eine spannende Möglichkeit, mathematische Konzepte auf lebendige und motivierende Weise zu erleben und zu erforschen. Im Folgenden wird eine Auswahl vorgestellt, die sich von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe einsetzen lassen und die als Ausgangspunkt für reichhaltiges mathematisches Lernen genutzt werden können.

3 Spiel mit Karten!

3.1 Ein Kartentrick

Der Ablauf des Kartentricks ist in nachfolgender Abbildung dargestellt.

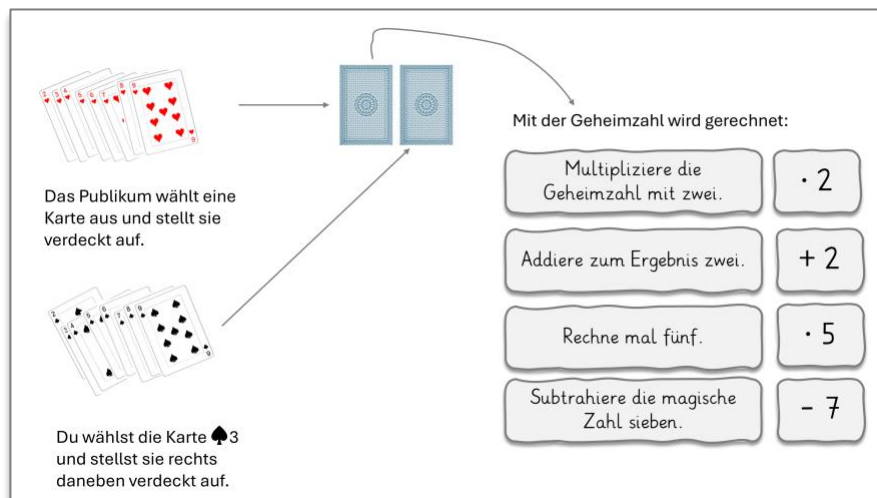


Abbildung 2: Ablauf des Kartentricks

Bei der Durchführung des Zaubertricks spielt die Inszenierung eine entscheidende Rolle. Besonders bei der Auflösung sollte betont werden, dass die Zehnerstelle als „uninteressant“ betrachtet wird, weil sie ja ohnehin (wieder-)erkannt wird. Ziel eines Zaubertricks ist es, den Lernenden die Möglichkeit zu geben, wie Detektive zu beobachten und zu staunen. Es ist jedoch wichtig, nicht nur im Staunen zu verharren, sondern auch die Frage nach dem „Warum“ zu stellen: Warum funktioniert der Trick?

Je nach Altersstufe stehen unterschiedliche mathematische Werkzeuge zur Verfügung, um die Funktionsweise des Tricks zu begründen. In der Volksschule ist ein symbolischer Beweis noch nicht möglich, jedoch können alle möglichen Fälle überprüft werden. Um den Lernenden

zu helfen, das Muster des Tricks zu erkennen, kann ein Streifen mit den auszuführenden Operationen als Scaffolding bereitgestellt werden. Der Vorteil solcher Hilfsmittel liegt darin, dass sie beim kollaborativen Arbeiten beim Sortieren und Ordnen der Ergebnisse unterstützen und das Aufdecken des Tricks erleichtern. Zudem wird sichergestellt, dass keine Fehler beim Aufschreiben des mathematischen Sachverhalts auftreten (siehe auch Abbildung 3).

In der Sekundarstufe, wo die mathematischen Werkzeuge der Termumformung zur Verfügung stehen, kann gezeigt werden, dass dieser Trick immer funktioniert. Hierbei ist das Interpretieren der letzten Zeile von Bedeutung: Was bedeutet $x \cdot 10 + 3$?

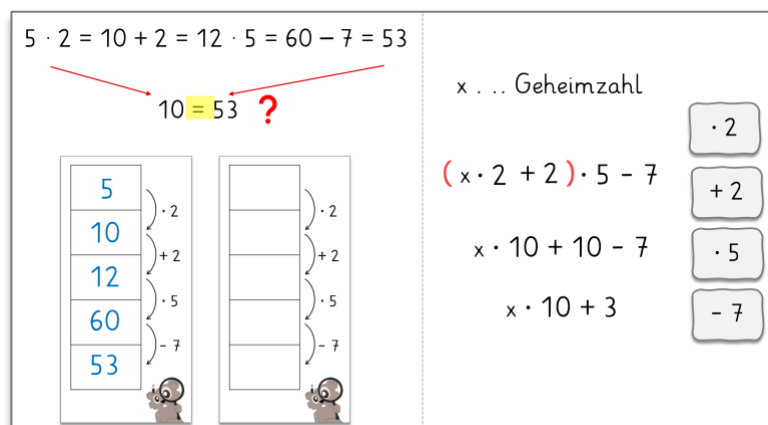


Abbildung 3: links: oben: fehlerhafter Anschrieb, unten: Scaffolding durch Material;
rechts: symbolischer Beweis

Wenn man Vermutungen in der Mathematik überprüft, dann ist auch ein Weiterdenken interessant, in diesem Zusammenhang gibt es zahlreiche Optionen:

- Funktioniert der Trick auch, wenn ich Grenzen auslote, d.h. wenn ich bei den Karten auch Bub (mit elf Punkten), Dame (mit zwölf Punkten) und König (mit 13 Punkten) als Geheimzahlen zulasse? Wie sehen die Ergebnisse hier aus? Verändert sich der Trick?
- Was passiert, wenn eine Karte mit dem Zahlenwert Null verwendet wird?
- Wie kann ich den Zahlentrick variieren? Woran erkenne ich die Variationsmöglichkeiten am Term?

Es gibt eine Vielzahl von mathematischen Tricks, die ähnlich wie dieser funktionieren. Dabei stellt die Kombination aus verbaler Anweisung, Übersetzung in einen Term und das Ergebnis (vereinfachter Term) immer ein Trio dar. Zu Beginn ist es sicher notwendig, genau mit diesen Zuordnungen und auch in dieser Reihenfolge zu arbeiten. Eine Umsetzung mit GeoGebra ist in Abbildung 4 dargestellt.

	Denk an eine Zahl. Addiere 3. Verdopple. Zieh „deine“ Zahl ab. Zähle 4 dazu. Zieh „deine“ Zahl ab.	Denk an eine Zahl. Subtrahiere 4. Multipliziere mit 3. Zähle 12 dazu. Dividiere durch „deine“ Zahl.	Denk an eine Zahl. Rechne mal 2. Gib 8 dazu. Halbiere. Vermindere um „deine“ Zahl.
Term:			
Ergebnis:			

Das Ergebnis ist immer 4. Das Ergebnis ist immer 3.

Das Ergebnis ist immer 10. $(x + 3) \cdot 2 - x + 4 - x$

$\frac{x \cdot 2 + 8}{2} - x$ $\frac{(x - 4) \cdot 3 - x + 12}{x}$

Abbildung 4: Drei Kartentricks in GeoGebra¹

Es bietet sich aber auch an, die Reihenfolge umzukehren. Der Ausgangspunkt könnte eine Zuordnung von Ergebnis zu Term sein, auf deren Basis dann verbale Anweisungen formuliert werden. Abbildung 5 zeigt weitere Tricks. Im Unterricht werden die Ergebnisse und Terme ungeordnet den Lernenden zur Verfügung gestellt, und die Entwicklung einer verbalen Anweisung liegt dann in den Händen der Lernenden.

Ordne die Terme den Ergebnissen richtig zu!
Erfinde eine Anweisung für den Zahlentrick, so dass der Term richtig ist.

Das Ergebnis ist immer 16.	Das Ergebnis ist immer 2.	Das Ergebnis ist immer „deine“ Zahl.
$(x + 7) \cdot 2 - x + 2 - x$	$\frac{(x - 5) \cdot 2 - x + 10}{x}$	$(x \cdot 2 + 8 + 3 - 11) : 2$
Denk an eine Zahl. Addiere 7. Multipliziere mit 2. Zieh „deine“ Zahl ab. Zähle 2 dazu. Zieh „deine“ Zahl ab.	Denk an eine Zahl. Subtrahiere 5. Verdopple. Zähle 10 dazu. Dividiere durch „deine“ Zahl.	Denk an eine Zahl. Rechne mal 2. Gib 8 dazu. Addiere 3. Subtrahiere 11. Nimm die Hälfte.

Abbildung 5: weitere Zahlentricks

3.2 Kaprekar-Konstante

Dattatreya Ramchandra Kaprekar, auch bekannt als D. R. Kaprekar, war ein indischer Mathematiklehrer, der sich mit der Unterhaltungsmathematik beschäftigte und einige

bemerkenswerte Entdeckungen machte, die sich im schulischen Kontext nachvollziehen, nachentdecken und begründen lassen. Eine seiner bekanntesten Entdeckungen ist die Kaprekar-Konstante (Bhattacharjee, 2020; Kaprekar, 1955).

Die Kaprekar-Konstante für dreistellige Zahlen ist 495. Der Algorithmus zum Auffinden dieser Konstanten ist in Abbildung 6 dargestellt. Als Ausgangspunkt wählt man eine dreistellige Zahl, die mindestens zwei verschiedene Ziffern hat. Dies kann mit einem vorbereiteten Kartendeck geschehen: Ein Set in Rot, ein Set in Schwarz und beide enthalten jeweils nur Karten mit einstelligen Zahlenwerten. Damit bei der Inszenierung dieser Trick für viele unterschiedliche Startzahlen durchgeführt werden kann, die zufällig den Lernenden zugeteilt werden, kann auch das GeoGebra Applet „3 Ziffern ziehen“² verwendet werden.



Abbildung 6: Algorithmus zum Auffinden der Kaprekar-Konstanten für dreistellige Zahlen

Das Erproben dieses Algorithmus an vielen Beispielen führt dann zum Formulieren von Entdeckungen. Durch Sammeln und Ordnen der hierbei auftretenden Differenzen können schon einige Entdeckungen gemacht werden, siehe Abbildung 7:

- Die Kaprekar-Konstante 495 steht genau in der Mitte.
- Die Anzahl der Hunderter nimmt in der geordneten Darstellung von oben nach unten um eins zu, die Anzahl der Einer nimmt um eins ab.
- Die Zehnerstelle ist in jeder auftretenden Differenz stets neun.

Welche Differenz zu jeweils weiteren Differenzen führt, ist in Abbildung 7 rechts dargestellt. Auch lässt sich entdecken, dass der Algorithmus nach höchstens sechs Schritten abgeschlossen ist.

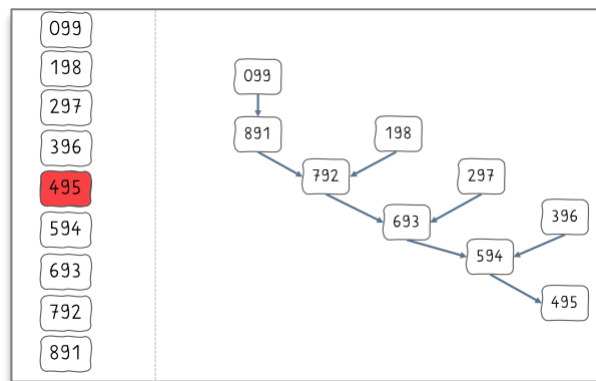


Abbildung 7: Ordnung und Struktur der auftretenden Differenzen beim Kaprekar-Algorithmus

Mögliche weitere Entdeckungen sind in Abbildung 8 angeführt. Will man eine Vielzahl von berechneten Kaprekar-Ketten erzeugen, kann das je nach Lernziel mit Papier und Stift passieren, oder man stellt den Schüler*innen (beispielsweise als GeoGebra Applet) eine Rechenhilfe³ zur Verfügung.








	$\begin{array}{r} 887 \\ - 788 \\ \hline 99 \end{array}$	$\begin{array}{r} 990 \\ - 99 \\ \hline 891 \end{array}$	$\begin{array}{r} 981 \\ - 189 \\ \hline 792 \end{array}$	$\begin{array}{r} 972 \\ - 279 \\ \hline 693 \end{array}$	$\begin{array}{r} 963 \\ - 369 \\ \hline 594 \end{array}$	$\begin{array}{r} 954 \\ - 459 \\ \hline 495 \end{array}$	<p>Es entstehen unterschiedlich lange Ketten. Die längste Kette braucht 6 Schritte.</p> <p>Nach dem 1. Schritt ist die Zehnerziffer immer 9. Bei den weiteren Schritten bleibt die Zehnerziffer immer 9.</p> <p>Addiert man Hunderterziffer und Einerziffer, so ist ihre Summe immer 9.</p> <p>Alle Ergebnisse sind durch 9 teilbar. Alle Ergebnisse sind durch 11 teilbar. Alle Ergebnisse sind durch 99 teilbar.</p> <p>Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es? Ordne sie der Größe nach.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; color: red; font-weight: bold;">Warum ist das so?</div>
	$\begin{array}{r} 543 \\ - 345 \\ \hline 198 \end{array}$	$\begin{array}{r} 981 \\ - 189 \\ \hline 792 \end{array}$	$\begin{array}{r} 972 \\ - 279 \\ \hline 693 \end{array}$	$\begin{array}{r} 963 \\ - 369 \\ \hline 594 \end{array}$	$\begin{array}{r} 954 \\ - 459 \\ \hline 495 \end{array}$		
	$\begin{array}{r} 981 \\ - 189 \\ \hline 792 \end{array}$	$\begin{array}{r} 972 \\ - 279 \\ \hline 693 \end{array}$	$\begin{array}{r} 963 \\ - 369 \\ \hline 594 \end{array}$	$\begin{array}{r} 954 \\ - 459 \\ \hline 495 \end{array}$			
	$\begin{array}{r} 421 \\ - 124 \\ \hline 297 \end{array}$	$\begin{array}{r} 972 \\ - 279 \\ \hline 693 \end{array}$	$\begin{array}{r} 963 \\ - 369 \\ \hline 594 \end{array}$	$\begin{array}{r} 954 \\ - 459 \\ \hline 495 \end{array}$			
	$\begin{array}{r} 652 \\ - 256 \\ \hline 396 \end{array}$	$\begin{array}{r} 963 \\ - 369 \\ \hline 594 \end{array}$	$\begin{array}{r} 954 \\ - 459 \\ \hline 495 \end{array}$				
	$\begin{array}{r} 761 \\ - 167 \\ \hline 594 \end{array}$	$\begin{array}{r} 954 \\ - 459 \\ \hline 495 \end{array}$					
	$\begin{array}{r} 873 \\ - 378 \\ \hline 495 \end{array}$						

Abbildung 8: Mögliche Entdeckungen beim Auffinden der Kaprekar-Konstanten 495

Um nicht nur bei Entdeckungen zu verbleiben, wird hier exemplarisch der Beweis gezeigt, dass nach dem 1. Schritt die Zehnerziffer immer 9 ist und dass sie bei allen weiteren Schritten 9 bleibt. Basierend auf der Darstellung in Abbildung 9 können die weiteren Beweise geführt werden.

o.B.d.A gilt: $a \geq b \geq c$

①

	H	Z	E
		10	
	$a-1$	$b-1$	10
	a	b	c
	-	c	b a

$a-1-c$ 9 $10+c-a$

② Die Ziffern der Größe nach sortieren.
9 ist sicher die größte Ziffer.
 $a-1-c$
 $10+c-a$?

$c-a$ geht nicht.
Ich entbündele einen Zehner, sind 10 Einer.
 $(b-1)-b$ geht nicht.
Ich entbündele einen Hunderter, sind 10 Zehner.

③ Sei x die größere der beiden Ziffern und y die kleinere.
 $x > y$

④

	H	Z	E
		10	
	8	$x-1$	10
	9	x	y
	-	y	x 9

$8-y$ 9 $y+1$

$10+y-9=y+1$
 $10+x-1-x=9$

$y-9$ geht nicht.
Ich entbündele einen Zehner, sind 10 Einer.
 $(x-1)-x$ geht nicht.
Ich entbündele einen Hunderter, sind 10 Zehner.

Abbildung 9: Beweisschritte mit sprachlichen Hinweisen zum Durchführen der Subtraktion mit dem Abziehverfahren

In einem kognitiv aktivierenden Mathematikunterricht können auch Fehler als Lernanlässe eingesetzt werden: Aufgaben, bei denen Schüler*innen vorgegebene Lösungen analysieren und Fehler entdecken sollen, fördern kritisches Denken. Sie setzen sich mit Lösungsprozessen auseinander und überlegen, welche Schritte richtig oder falsch sind. Bei einer Anfrage an chatGPT ergab sich ein Gespräch, das im Zusammenhang mit der Kaprekar-Konstanten 495 genutzt werden kann:

Gibt es noch andere dreistellige Zahlen, die in zwei Schritten zur Kaprekar-Konstante 495 führen?

🔒 📄 🌐

⬆

Ja, es gibt noch andere dreistellige Zahlen, die in zwei Schritten zur Kaprekar-Konstante 495 führen. Lassen wir uns eine weitere finden.

Vorgehen:

1. Wähle eine dreistellige Ausgangszahl.
2. Wende den Kaprekar-Algorithmus an:
 - Sortiere die Ziffern in **absteigender** und **aufsteigender** Reihenfolge.
 - Subtrahiere die kleine Zahl von der großen Zahl.
3. Prüfe, ob nach zwei Iterationen 495 erreicht wird.

Beispiel:

Ausgangszahl 546:

1. Erste Iteration:

große Zahl: 654, kleine Zahl: 456

$654 - 456 = 198$

2. Zweite Iteration (mit 198):

große Zahl: 981, kleine Zahl: 189

$981 - 189 = 495$

Ergebnis:

Die Ausgangszahl 546 führt in genau zwei Schritten zur Kaprekar-Konstante 495.

Falls du noch weitere Zahlen möchtest, lass es mich wissen! 😊

Abbildung 10: Kommunikation mit ChatGPT über die Kaprekar-Konstante 495: Fehlersuche

4 Spiel mit Würfeln!

Neben Spielkarten können auch Zahlenwürfel als Ausgangspunkt für mathematische Spiele und das Aufspüren von Mustern dienen.

4.1 Ein faires Spiel?

Der Dreischritt,

1. Spielen und Wahrscheinlichkeit als subjektiver Vertrauensgrad,
2. Datensammlung und relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit,
3. Spielanalyse und klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff,

der Spiele in mathematische Lerngelegenheiten transformiert, wird auch bei diesem Setting berücksichtigt (Musilek, 2024, S. 110–111). Abbildung 11 zeigt links die Spielanleitung und als wichtiges Darstellungsmittel eine Tabelle, um die Spielergebnisse festzuhalten. Aufgrund der ersten Spielerfahrungen kommen die Lernenden rasch zum Schluss, dass das Spiel nicht fair ist.

Durchgängigkeit bei der Wahl von Darstellungen lässt sich hier gut illustrieren. Eine „gute“, langfristig nutzbare Darstellung ist eine Verknüpfungstabelle. Im Lernsetting „ein faires Spiel“ bietet sich die Maltabelle an. Durch farbige Hervorhebungen, kann sichtbar gemacht werden, dass das Spiel nicht fair ist. Rot hat eindeutig eine höhere Wahrscheinlichkeit, einen Punkt zu erhalten, erkennbar im größeren, roten Anteil der Fläche. Durch Abzählen der roten und blauen Kästchen und der Berechnung nach dem Laplace-Prinzip (Anzahl der günstigen Fälle durch Anzahl der möglichen Fälle) lässt sich die Wahrscheinlichkeit bereits im Anfangsunterricht der Stochastik von der Lernenden in der Sekundarstufe 1 eigenständig ermitteln. In der Volksschule ist der Weg denkbar, alle roten und blauen Kästchen in einem $4 \cdot 9$ Rechteck anzuordnen. Dann kann man sehen, dass ein Streifen (9 Kästchen) blau ist und drei Streifen rot. Dies entspricht der Gewinnwahrscheinlichkeit von „nur“ einem Viertel für Blau, ein unfaires Spiel.

Das Bild zeigt die Spielanleitung und eine Ergebnistabelle für ein Würfelspiel. Links ist die Spielanleitung in deutscher Sprache dargestellt, die die Regeln und die Punktevergabe beschreibt. Rechts daneben befindet sich eine 6x6-Matrix, die die Ergebnisse der Würfelkombinationen darstellt. Die Zellen der Matrix sind farblich hervorgehoben: Rot für 'gerade' und Blau für 'ungerade'. Die Matrix zeigt, dass es 18 rote und 18 blaue Zellen gibt, was auf ein faires Spiel hindeutet.

Spielanleitung:

Entscheidet, wer und wer ist.
 Würfelt mit beiden Würfeln.
 Ist das Produkt der Augenzahlen gerade?
☒ + 1 Punkt für ☐ + 1 Punkt für
 Wer zuerst 10 Punkte hat, gewinnt.

Ergebnistabelle:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Legende:

gerade.
 ungerade.

Abbildung 11: Ein faires Spiel?

4.2 Mein genialer Würfel

Das Spiel basiert auf einer Idee von Wälti et al. (2022, S. 86) und wurde angepasst und erweitert. Zu Beginn dieses Lernsettings hat jede Person die Möglichkeit, einen eigenen genialen Würfel zu entwerfen. Das einzige Kriterium, das erfüllt sein muss, ist, dass die Summe aller Punkte auf dem genialen Würfel genau 120 sein muss. Die Spielregeln sind in Abbildung 12 dargestellt.

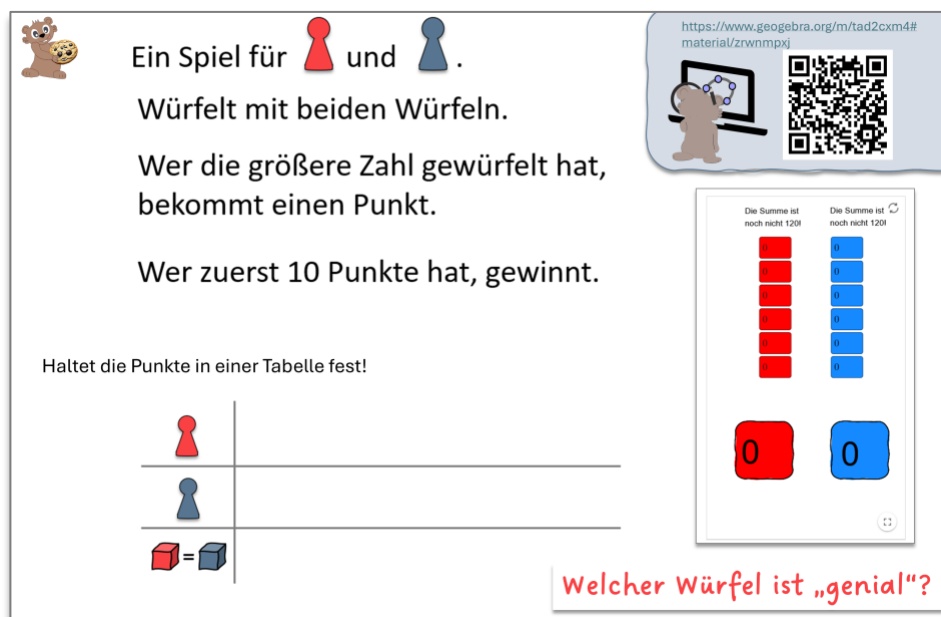


Abbildung 12: Mein genialer Würfel – Spielregel und GeoGebra Applet zum Würfeln⁴

Im Verlauf des Spiels können die Lernenden erste Erfahrungen sammeln, um zu ermitteln, welcher der beiden genialen Würfel, die gegeneinander antreten, die größeren Gewinnchancen bietet. Um festzustellen, welcher Würfel überlegen ist, kann, wie bereits in Abschnitt 4.1 erläutert, eine Verknüpfungstabelle verwendet werden. Nachdem die Lernenden die Verknüpfungstabelle „händisch“ ausgefüllt und ihren genialen Würfel in „ihrem“ Team ausgewählt haben, treten sie mit diesem gegen ein anderes Team an. Für weiterführende Untersuchungen kann das GeoGebra Applet⁵ „Mein genialer Würfel gewinnt immer?“ genutzt werden.

Ziel dieses Spiels in höheren Jahrgangsstufen ist es, die Nichttransitivität zu veranschaulichen. Nichttransitive Würfel sind eine spezielle Art von Würfeln, bei denen die Gewinnwahrscheinlichkeit nicht den klassischen transitiven Eigenschaften folgt. Dies bedeutet, dass es eine zyklische Überlegenheit gibt: Ein Würfel A schlägt Würfel B häufiger, Würfel B schlägt Würfel C häufiger, jedoch schlägt Würfel C wiederum Würfel A häufiger – ähnlich dem Prinzip von Schere, Stein, Papier.

Wie in Abschnitt 3.1 vorgestellt, bietet sich auch in diesem Lernsetting wieder an, die Richtung umzukehren. Die ausgefüllten Verknüpfungstabellen werden wie beispielsweise in Abbildung 13 zur Verfügung gestellt, und die Lernenden sollen beurteilen, welcher dieser

Würfel ein genialer Würfel ist. Bei der Diskussion wird man schnell zum Urteil kommen, dass hier immer nur ein Vergleich von zwei Würfeln stattfinden kann und keine generelle Aussage getroffen werden kann.

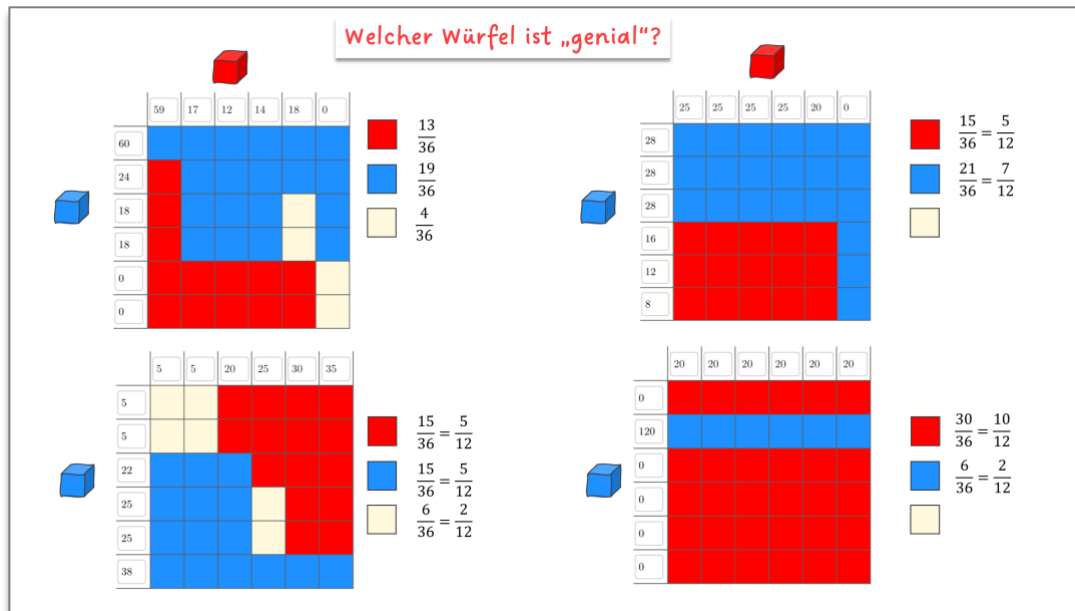


Abbildung 13: Wege umkehren: Verknüpfungstabellen untersuchen

Um Würfel miteinander vergleichen zu können, könnte man in der Sekundarstufe 2 auch auf die Idee verfolgen, die Erwartungswerte zu ermitteln. Beispielhaft zeigt dies Abbildung 14, und erneut kann ein Muster entdeckt werden, das es zu begründen gilt.

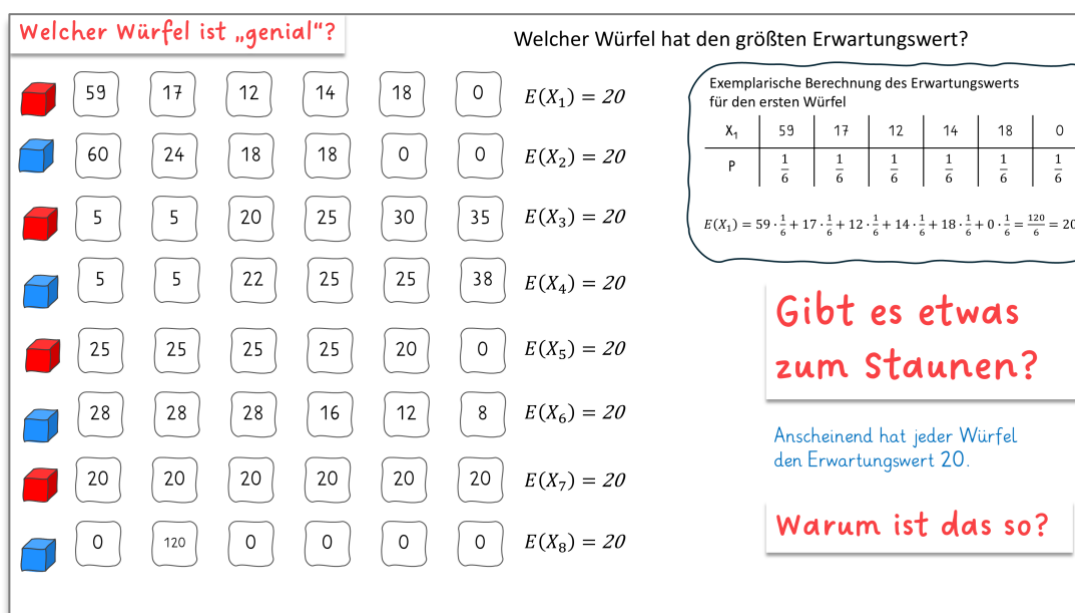
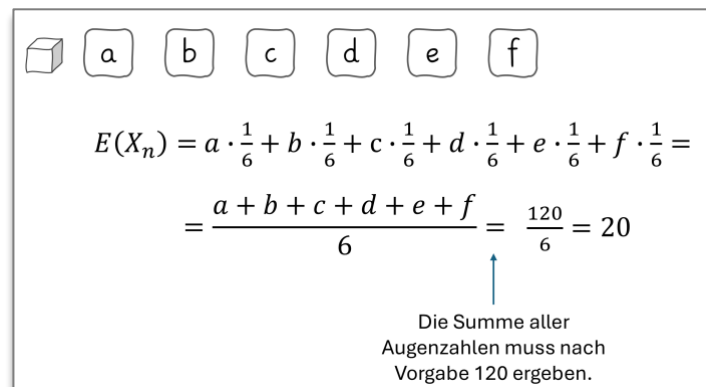


Abbildung 14: Erwartungswerte von genialen Würfeln



The diagram shows a die with faces labeled a, b, c, d, e, and f. Below the die, the expected value formula is written:

$$E(X_n) = a \cdot \frac{1}{6} + b \cdot \frac{1}{6} + c \cdot \frac{1}{6} + d \cdot \frac{1}{6} + e \cdot \frac{1}{6} + f \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{a + b + c + d + e + f}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

An arrow points from the text below to the denominator 6 in the second equation:

Die Summe aller Augenzahlen muss nach Vorgabe 120 ergeben.

Abbildung 15: Beweis, dass alle Würfel denselben Erwartungswert haben

Die Aufgabenstellung Mein genialer Würfel kann leicht an die Zielgruppe der Lernenden angepasst werden. Man kann die zu erreichende Summe variieren (z.B. im Zahlenraum 20, oder 1000), vorgeben, dass die Augenzahlen Dezimalzahlen sein müssen, die Anzahl der Würfelseiten verändern, und die Spielregel „größere Zahl gewinnt“ austauschen. Alle diese Variationen können dann wieder als Ausgangspunkt für reichhaltiges mathematisches Lernen dienen und erneut im Hinblick auf Muster untersucht werden.

5 Zurück zum Anfang

Die in diesem Beitrag vorgestellten Ansätze für einen qualitätsvollen Mathematikunterricht basieren auf fünf zentralen Qualitätsprinzipien: kognitive Aktivierung, Verstehensorientierung, Durchgängigkeit, Lernendenorientierung & Adaptivität sowie Kommunikationsförderung. Diese Prinzipien wurden als Leitlinien herangezogen, um Lernmaterialien und Aufgaben zu gestalten, die nicht nur mathematisch reichhaltig sind, sondern auch eine aktive und entdeckende Auseinandersetzung mit den Inhalten ermöglichen. Doch eine zentrale Erkenntnis dieses Beitrags ist die Bedeutung von Spielen als wesentlicher Bestandteil, um Lernumgebungen zu bereichern und die genannten Prinzipien noch stärker zu fördern. Deshalb soll hier das Qualitätsprinzip um eine sechste Komponente erweitert werden: den gezielten Einsatz von Spielen für reichhaltige Lernumgebungen.

Die Zerlegung, die zu Beginn vorgestellt wurde, lässt sich also um das rote Quadrat erweitern und nimmt einen wichtigen Platz im „alten“ qualitätsvollen Rahmen ein, siehe Abbildung 16.

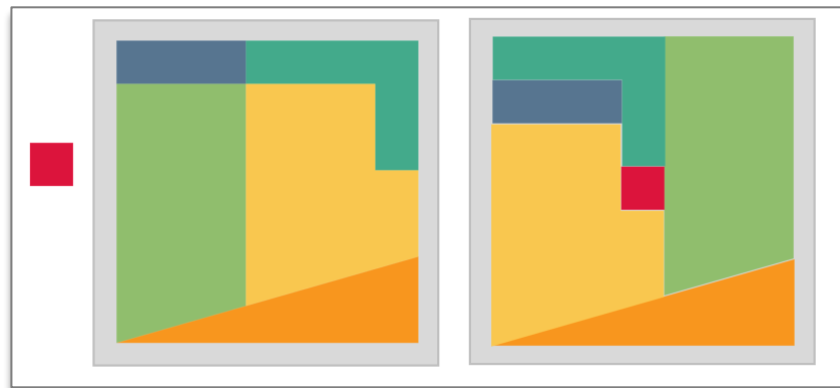


Abbildung 16: Platz für neues im alten Rahmen

Hier sei erneut darauf hingewiesen: mathektiv bedeutet, mathematisch aktiv zu sein. Das detektivische Aufspüren mathematischer Muster und die aktive Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten – stehen im Zentrum eines qualitätsvollen Mathematikunterrichts. Zuerst sehen wir etwas, dann staunen wir. Und wichtig ist es hier nach dem Warum zu fragen. Auch in Abbildung 16 zeigt sich ein Rätsel versteckt. Warum passt das rote Quadrat in den „alten“ quadratischen Rahmen? Abbildung 17 gibt einen Hinweis zur Lösung dieses letzten Rätsels.

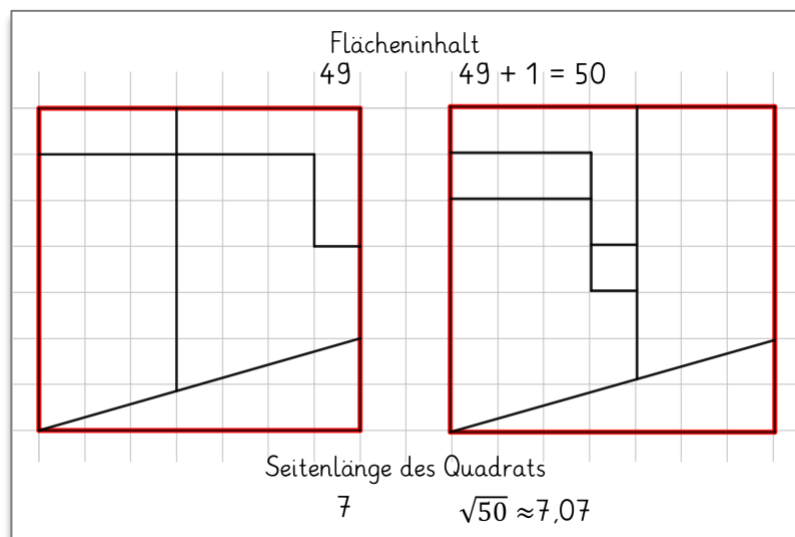


Abbildung 17: Lösungshinweis zum Zerlegungsrätsel

Spiele als Lernumgebungen schaffen nicht nur eine motivierende Atmosphäre, sondern laden Lernende dazu ein, Mathematik auf lebendige und forschende Weise zu erleben. Sie bieten vielfältige Anknüpfungspunkte für die Förderung kognitiver Aktivierung, indem sie Probleme in einem spielerischen Kontext präsentieren und dabei die Lernenden zum Nachdenken, Entdecken und Begründen anregen. Gleichzeitig ermöglichen Spiele eine Verstehensorientierung, da sie oft auf grundlegenden mathematischen Strukturen und Mustern basieren, die

Lernende durch eigenes Handeln und Experimentieren erforschen können. Die adaptiven Möglichkeiten von Spielen – etwa durch die Anpassung von Regeln oder Schwierigkeitsgraden – erlauben eine gezielte Differenzierung, sodass Lernende mit unterschiedlichen Voraussetzungen individuell gefördert werden können. Schließlich unterstützen Spiele die Kommunikation, indem sie kooperative Szenarien schaffen, in denen Lernende über ihre Strategien und Entdeckungen sprechen und argumentieren. Die vorgestellten Beispiele aus dem Beitrag zeigen, wie Spiele als Ausgangspunkt für reichhaltiges mathematisches Lernen genutzt werden können. Sie laden dazu ein, Muster zu erkennen, eigene Hypothesen zu formulieren und diese schließlich zu überprüfen. Durch die gezielte Einbettung solcher Spiele in den Unterricht entsteht eine Lernumgebung, die sowohl die fachliche als auch die überfachliche Kompetenzentwicklung fördert.

„mathektiv“ – ein Kofferwort aus „Mathematik“ und „aktiv“ – bringt den Kern des Ansatzes auf den Punkt: Mathematik soll aktiv und forschend erlebt werden, vergleichbar mit einem Detektiv, der durch gezieltes Beobachten und Analysieren Muster aufspürt und logische Schlüsse zieht.

Literatur

- Bhattacharjee, P. K. (2020). Kaprekar's Constant 6174 for Four Digits Number Reality to Other Digits Number. *International Journal of Chemistry, Mathematics and Physics*, 4(5), 92–94.
<https://doi.org/10.22161/ijcmp.4.5.1>
- DZLM. (2025). *QuaMath. Unterrichts- und Fortbildungsqualität in Mathematik entwickeln*.
<https://quamath.de/>
- Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2024). Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien. *Mathematik Lehren*, 242, 2–8.
- Kaprekar, D. R. (1955). An Interesting Property of the Number 6174. *Scripta Mathematica*, 15, 244–245.
- Krauthausen, G., & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule*. IPN Leibniz-Inst. für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Univ. Kiel.
- Leuders, T., & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft*, 39(3), 213–230.
- Musilek, M. (2024). Wahrscheinlich gewinne ich. Mit einfachen Überlegungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung über Gewinnstrategien bei Spielen nachdenken. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, 56, 107–123.
- Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2023). Durchgängigkeit von Darstellungen und Vorstellungen für den nachhaltigen Verständnisaufbau: Spiralcurriculum praktisch gewendet. *MNU-Journal*, 05, 421–427.
- Wälti, B., Schütte, M., & Friesen, R.-A. (2022). *Mathematik kooperativ spielen, üben, begreifen. Band 1b: Lernumgebungen für heterogene Gruppen: (Schwerpunkt 3. bis 5. Schuljahr)* (2. Auflage). Kallmeyer.

¹ Drei Kartentricks in GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/tad2cxm4#material/bbndwuje>

² 3 Ziffern ziehen: <https://www.geogebra.org/m/tad2cxm4#material/auc6bsuj>

³ Rechenhilfe: <https://www.geogebra.org/m/tad2cxm4#material/zsgyj4uv>

⁴ Mit zwei Würfeln würfeln: <https://www.geogebra.org/m/tad2cxm4#material/zrwnmpxi>

⁵ Mein genialer Würfel gewinnt immer? <https://www.geogebra.org/m/tad2cxm4#material/vepkunx9>

Wenn die Welt ein Dorf wäre ...

Ein handlungsorientierter Zugang zur Prozentrechnung von der Primarstufe zur Sekundarstufe I

Lukas Prenner¹

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1418>

Zusammenfassung

Die Prozentrechnung ist ein zentrales mathematisches Konzept mit hoher Alltagsrelevanz, stellt für Lernende jedoch oft eine Herausforderung dar. Trotz vielfältiger Vermittlungsansätze fehlt es häufig an enaktiven Zugängen, die ein nachhaltiges Verständnis fördern. Dieser Artikel stellt eine Methode vor, die bereits in der Primarstufe ansetzt, gezielt Wortschatzerweiterungen integriert und schrittweise einen handlungsorientierten Zugang zur Prozentrechnung entwickelt. Dabei spielen unterschiedliche Darstellungsformen eine zentrale Rolle: Durch die Verknüpfung enaktiver, ikonischer und symbolischer Repräsentationen wird der Lernprozess unterstützt und das Verständnis für proportionale Zusammenhänge vertieft. Die Verhältnisgleichung dient in der Sekundarstufe I als Brücke zu abstrakteren mathematischen Konzepten, wodurch die Prozentrechnung anwendungsnah und ganzheitlich vermittelt wird.

Stichwörter: Verhältnisgleichung, Prozentrechnung, Prozente, Darstellungsformen

1 Die Prozentrechnung im schulischen Kontext

Die Alltagsrelevanz des Themas Prozente und Prozentrechnung steht außer Frage. In der Literatur wird auf die Notwendigkeit im Umfeld von täglichen Herausforderungen eindeutig hingewiesen. „Die Prozentrechnung hat mit [sic!] die größte Relevanz für Alltag und Beruf“ (Sill, 2010, S. 2).

„Unumstritten zählen national und international die kerncurricularen Bereiche Proportionalität und Prozentrechnung zu den wichtigsten alltagsrelevanten Themen des Mathematikunterrichts“ (Hafner, 2011, S. 35).

¹ Pädagogische Hochschule Niederösterreich, Mühlgasse 67, 2500 Baden.

E-Mail: lukas.prenner@ph-noe.ac.at

1.1 Von der Primarstufe zur Sekundarstufe I

Im österreichischen Bildungssystem sind die Zielsetzungen in den inhaltlichen Kompetenzen der Lehrpläne vorgeschrieben. Diese wurden sowohl im Bereich der Primarstufe als auch der Sekundarstufe I in Bezug auf die Prozentrechnung bzw. auf die Verhältnisrechnung und Proportionalität untersucht. Das Thema Prozentrechnung und deren Begrifflichkeiten sind im Lehrplan der Sekundarstufe I klar und eindeutig identifizierbar. Die Berechnung von Prozenten wird in der Primarstufe nicht thematisiert. Jedoch die Proportionalität und die Begrifflichkeiten, die dazu notwendig sind, sind in der vierten Schulstufe, wie folgt, formuliert:

*„Die Schüler*innen können vielfältige Sachsituationen modellieren; direkt proportionale Zusammenhänge erkennen, tabellarisch darstellen und für Berechnungen nutzen“ (Lehrplan der Volksschule 2023, S. 83).*

Im Rahmen des Pädagogikpakets NEU, welches 2018 im Ministerrat beschlossen wurde, entstand der Kompetenzraster für das Fach Mathematik. In diesem wird darauf eingegangen, dass Schüler*innen „... direkt proportionale Zusammenhänge erkennen, tabellarisch darstellen und für Berechnungen nutzen“ (BMBWF 2023b).

Gerade der Aufbau eines adäquaten Wortschatzes, die Verwendung des Fachvokabulars und der schrittweise Aufbau von Satzphrasen wird in der Primarstufe angestrebt und auch dementsprechend im Lehrplan beschrieben:

„Kommunizieren meint das Darstellen und Interpretieren mathematischer Sachverhalte unter Nutzung altersadäquater Fachsprache und geeigneter Repräsentationsformen sowie das Beschreiben und Vergleichen von Denk- und Vorgangsweisen bzw. Lösungswegen“ (BMBWF 2023a, S. 32).

Keine Phase des Lernprozesses, sei es im mathematischen Argumentieren, Modellieren und Darstellen, Problemlösen oder Interpretieren, kommt ohne Sprache aus (vgl. Barzel & Ehret 2009, S. 4).

*„Die Schüler*innen werden angeleitet, Fachsprache produktiv zu nutzen, indem sie beispielsweise Konstruktionen und Lösungswege verbal beschreiben. Sie erkennen und verstehen altersadäquate fachsprachliche Elemente als Teil der Bildungssprache und nutzen diese aktiv zur unmissverständlichen Kommunikation“ (BMBWF 2023a, S. 4).*

Im Lehrplan der Sekundarstufe I wird erst ab der 6. Schulstufe der Prozentbegriff im Unterricht thematisiert. Dabei wird auch die Komplexität der Prozentrechnung bewusst, da dies in unterschiedlichen Kompetenzbereichen passiert. Einerseits befindet sich die Erarbeitung der

Prozentrechnung im Kompetenzbereich Zahlen und Maße, wörtlich „mit *Proportionalitäten und Prozenten arbeiten*“ (BMBWF 2024, S. 61), andererseits wird das Aufstellen von Zusammenhängen zwischen Termen, Gleichungen und Formeln und der Proportionalität und den Prozenten verlangt (BMBWF 2024, S. 61).

In den Anwendungsbereichen des Lehrplans der Mittelschule sind Präzisierungen der Kompetenzbeschreibungen formuliert und können Aufschluss darauf geben, welche konkreten Ziele im Fokus stehen.

1.2 Allgemeine Grundvorstellungen und Begriffe der Prozentrechnung

Das Thema der Prozente und der Prozentrechnung stellt ein komplexes mathematisches Konzept dar, das auf vielfältige Weise erarbeitet und dargestellt werden kann. Eine differenzierte Auseinandersetzung mit verschiedenen Zugängen und Darstellungsformen ist erforderlich, um ein tiefgehendes Verständnis zu fördern. Durch die Verknüpfung anschaulicher, kontextbezogener und formaler Zugänge können nachhaltige Erkenntnisse gewonnen und ein fundiertes Verständnis der Thematik entwickelt werden.

1.2.1 Zum Aufbau von Grundvorstellungen

Pöhler 2017 kategorisiert zu Prozenten zwei zentrale Unterscheidungen. Dabei identifiziert er einerseits „Prozente als Zahlen“ und andererseits „Prozente als relative Größen“. Diese Grundvorstellungen können aus seiner Sicht nicht klar voneinander getrennt werden. Vielmehr gibt es bei diesen Kategorisierungen eine Überlappung. (Pöhler 2017, S.12)

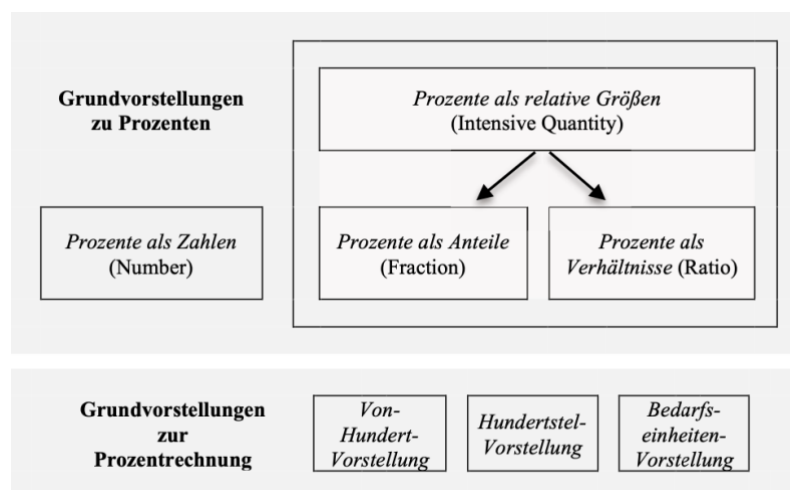


Abbildung 1: Grundvorstellungen zu Prozenten (Pöhler 2017, S. 12)

In Abbildung 1 wird diese Unterscheidung der „Grundvorstellungen zu Prozenten“ veranschaulicht. Um diese Darstellungen besser zu verstehen, lohnt es sich, einen genaueren Blick

auf die drei grundlegenden Interpretationen von Prozentangaben, nämlich als Zahlen, als Anteile und als Verhältnisse, zu werfen.

Wenn Prozentsätze als Zahlen dargestellt werden, erfolgt dies meist in Form von Dezimalzahlen oder Brüchen. So entspricht beispielsweise 75 % der Dezimalzahl 0,75 oder dem Bruch $\frac{3}{4}$. Entscheidend bei dieser Darstellung ist die Angabe einer Bezugsgröße – also des Ganzen, auf das sich der Prozentsatz bezieht. Ohne diese Information bleibt die Angabe unvollständig und kann zu Missverständnissen führen.

Eine häufige Nutzung von Prozenten ist die Darstellung von Anteilen. Hierbei wird ein Teil einer Gesamtmenge ins Verhältnis zur Gesamtmenge gesetzt. Ein Beispiel hierfür ist die Aussage „25 % von 200“, was bedeutet, dass ein Viertel dieser Gesamtmenge betrachtet wird. Solche Darstellungen sind in Diagrammen wie Kreis- oder Balkendiagrammen besonders anschaulich. Auch im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden Prozentsätze verwendet, um die Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ereignisses auszudrücken. Wenn beispielsweise die Regenwahrscheinlichkeit mit 40 % angegeben wird, bedeutet das, dass in 40 von 100 Fällen mit Regen zu rechnen ist. (Pöhler, 2017, S.12–16)

Prozente können auch genutzt werden, um das Verhältnis zwischen zwei Größen darzustellen. Diese Betrachtung kann entweder statisch sein, also einen Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreiben, oder eine Veränderung über die Zeit oder in verschiedenen Räumen verdeutlichen. Ein Beispiel für eine statische Darstellung ist der Vergleich der Bevölkerungsdichte zweier Städte in Prozenten. Dynamische Vergleiche hingegen finden sich häufig in der Wirtschaft, wenn es etwa um die prozentuale Veränderung des Bruttoinlandsprodukts oder die Entwicklung von Preisen geht. (ebd.)

Zu den Grundvorstellungen zur Prozentrechnung beschreiben Hafner (2011, S. 37f) bzw. Pöhler (2017, S. 18f) drei Kategorisierungen:

Die **Von-Hundert-Vorstellung** „... basiert auf der ursprünglichen Wortbedeutung des %-Zeichens im Sinne von pro/je hundert. Demnach stellt man sich vor, eine Grundmenge G bestehe aus lauter Teilen zu je 100 Einheiten. Unter dem Anteil p % von G versteht man p Einheiten von jedem dieser 100er-Päckchen“ (Hafner 2011, S. 37).

Bei der **Hundertstel- oder Prozentoperator-Vorstellung** „... wird der Anteil p % als Bruch $\frac{p}{100}$ interpretiert. Dieser kann wiederum als multiplikativer Operator aufgefasst werden, der auf eine Bezugsgröße G bezogen ist. Der Prozentwert entspricht also dem $\frac{p}{100}$ -fachen des Grundwerts G “ (Hafner 2011, S.38).

Bei der **Bedarfseinheitenvorstellung oder quasikardinale Vorstellung** „... lassen sich eindeutige Zuordnungen zwischen diesen Größenbereichen derart herstellen, dass die Größe 100 % dem Bezugswert bzw. dem Grundwert G entspricht. 1 % entspricht demnach dem hundertsten Teil von G “ (Hafner 2011, S. 38).

1.2.2 Lösungsverfahren zur Prozentrechnung

Lösungsverfahren	Prozentwert gesucht Wieviel Euro sind 75 % von 200 €?	Prozentsatz gesucht Wieviel Prozent sind 150 € von 200 €?	Grundwert gesucht Wieviel sind 100 %, wenn 75 % 150 € entsprechen?								
Proportionales Hoch- und Runterrechnen	$\begin{array}{l} :100 \quad 100\% \triangleq 200\text{€} \\ \quad \quad 1\% \triangleq 2\text{€} \\ \cdot 75 \quad 75\% \triangleq 150\text{€} \end{array}$	$\begin{array}{l} 200\text{€} \text{ sind } 100\% \\ 100\text{€} \text{ sind } 50\% \\ 50\text{€} \text{ sind } 25\% \\ 100\text{€} + 50\text{€} \text{ sind } 50\% + 25\% \\ 150\text{€} \text{ sind } 75\% \end{array}$	<table><tr><th>Prozente</th><th>Werte (€)</th></tr><tr><td>75 %</td><td>150 €</td></tr><tr><td>25 %</td><td>50 €</td></tr><tr><td>100 %</td><td>200 €</td></tr></table>	Prozente	Werte (€)	75 %	150 €	25 %	50 €	100 %	200 €
Prozente	Werte (€)										
75 %	150 €										
25 %	50 €										
100 %	200 €										
Operator	$\begin{array}{c} 200\text{€} \\ 200\text{€} \cdot \frac{75}{100} = 150 \end{array} \rightarrow ?\text{€}$	$\begin{array}{c} 150 \\ 200 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 200\text{€} \\ 150\text{€} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 100\% \\ x\% \end{array}$ $\frac{100}{200} = \frac{150}{x} = 75$	$\begin{array}{c} ?\text{€} \cdot 0,75 = 150\text{€} \\ : 0,75 \end{array}$ $150 : 0,75 = 200$								
Formel	$\text{Prozentwert} = \text{Grundwert} \cdot \text{Prozentsatz}$ $x = 200\text{€} \cdot \frac{75}{100}$ $x = 150\text{€}$	$\text{Prozentsatz} = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}}$ $x = \frac{150\text{€}}{200\text{€}}$ $x = 75\%$	$\text{Grundwert} = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Prozentsatz}}$ $x = \frac{150\text{€}}{\frac{75}{100}}$ $x = 200\text{€}$								
Gleichung	$\begin{array}{l} 75\% \text{ von } 200\text{€} = x \\ \frac{75}{100} \cdot 200\text{€} = x \\ 150\text{€} = x \end{array}$	$\begin{array}{l} x\% \text{ von } 200\text{€} = 150\text{€} \\ \frac{x}{100} \cdot 200\text{€} = 150\text{€} \\ 2\text{€} \cdot x = 150\text{€} \\ x = 75 \end{array}$	$\begin{array}{l} 75\% \text{ von } x = 150\text{€} \\ \frac{75}{100} \cdot x = 150\text{€} \\ x = 200\text{€} \end{array}$								
Verhältnisgleichungen	$\frac{\text{Grundwert}}{100} = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Prozentsatz}}$ $\frac{200\text{€}}{100} = \frac{x}{75}$ $2\text{€} \cdot 75 = x$ $150\text{€} = x$	$\frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}} = \frac{\text{Prozentsatz}}{100}$ $\frac{150\text{€}}{200\text{€}} = \frac{x}{100}$ $150\text{€} = x$ $75 = x$	$\frac{\text{Grundwert}}{\text{Prozentwert}} = \frac{100}{\text{Prozentsatz}}$ $\frac{x}{150\text{€}} = \frac{100}{75}$ $x = \frac{100}{75} \cdot 150\text{€}$ $x = 200\text{€}$								

Abbildung 2: Darstellung häufiger Lösungsverfahren nach Pöhler (2017, S. 24)

In Abbildung 2 werden häufig verwendete Lösungsverfahren nach Pöhler (2017, S. 24) zur Prozentrechnung dargestellt. Das **proportionale Hoch- und Runterrechnen** erfolgt meist in zwei Schritten über eine geeignete Einheit, die entweder 1 % im Sinne des klassischen Dreisatzes oder ein größerer gemeinsamer Teiler der Eingangs- und Ausgangswert sein kann. Dieses Vorgehen entspricht dem klassischen Dreisatz. Eine weitere Methode ist die Verwendung von **Operatormethoden**, bei denen ein Proportionalitätsfaktor (z. B. der Prozentoperator in Hundertstelbruchschreibweise) genutzt wird, um direkt von einer Ausgangsgröße zur Zielgröße zu gelangen. Dabei dient der Hundertstelbruch als multiplikatives Rechenverfahren. Alternativ können **Formeln** herangezogen werden, die durch Äquivalenzumformungen ineinander überführt werden können. Die Grundformel lautet: Prozentwert ist gleich Grundwert mal Prozentsatz. Eine weitere Möglichkeit ist die Nutzung von **Gleichungen**, bei denen zwei bekannte Werte in eine Grundgleichung eingesetzt und durch Äquivalenzumformungen aufgelöst werden. Schließlich bieten **Verhältnisgleichungen** eine alternative Herangehensweise, indem sie wertgleiche Verhältnisse ableiten und damit die proportionalen Zusammenhänge der Prozentrechnung verdeutlichen. (Pöhler, 2017, S. 23)

Dabei wird deutlich, wie vielfältig die Herangehensweisen und Berechnungsmethoden für Prozentaufgaben sind. Im Rahmen der Materialpräsentation steht die Methode der Verhältnisgleichung im Fokus.

1.3 Herausforderungen im Aneignungsprozess

Um die Funktionsweise der Prozentrechnung nachhaltig und verständnisorientiert vermitteln zu können, beschreiben vom Hofe und Blum (2016, S.230) drei zentrale Aspekte, die Sinnkonstituierung, die Verinnerlichung und letztlich die Anwendung.

Die Sinnkonstituierung eines Begriffs erfolgt durch die Anknüpfung an das Umfeld des Lernenden. Dies bedeutet, dass der Begriff durch konkrete Handlungszusammenhänge verständlich gemacht wird, die für den Lernenden relevant und nachvollziehbar sind. Beispielsweise kann ein mathematisches Konzept wie die Prozentrechnung durch alltägliche Situationen wie das Berechnen von Rabatten oder Zinsen eingeführt werden. (vom Hofe und Blum 2016, S. 230)

Die Verinnerlichung des Begriffs wird anhand des eigenen, operativen Handelns vertieft. Dies kann durch den Einsatz visueller Hilfsmittel wie Diagramme, Grafiken oder interaktive Übungen geschehen, die es dem Lernenden ermöglichen, den Begriff aktiv zu erforschen und anzuwenden. Durch diese praktischen Erfahrungen wird das Verständnis des Begriffs gefestigt und vertieft. (ebd.)

Schließlich wird der Begriff auf die Wirklichkeit angewendet, oft durch die Modellierung realer Situationen. Dies bedeutet, dass Lernende den Begriff in verschiedenen Kontexten und Szenarien anwenden, um seine Relevanz und Nützlichkeit zu erkennen. Durch diese Anwendung wird das Wissen nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch verankert. (ebd.)

Das Verständnis des Prozentbegriffs und die Fähigkeit, einfache Prozentaufgaben sicher zu lösen, gehören zu den größten Defiziten in der mathematischen Allgemeinbildung unserer Gesellschaft. Ein weiteres Problem ist die Anwendung von Regeln und mathematischen Formeln, die nicht vollständig verstanden wurden. Oft werden Formeln verwendet, ohne zu prüfen, ob sie überhaupt zur Beschreibung der jeweiligen Situation geeignet sind. Dieser unreflektierte Umgang mit Rechenformeln und -regeln ist wahrscheinlich auf fehlende adäquate Vorstellungen zur Prozentrechnung und den entsprechenden mathematischen Methoden zurückzuführen. (Sill, 2010, S. 4 und Hafner, 2011, S. 171)

1.4 Zum Wechsel der Darstellungsebenen

Zum Wechsel der Darstellungsebenen der Prozentrechnung gehört es, zwischen verschiedenen Repräsentationen wie grafischen Darstellungen, symbolischen Ausdrücken und realen Kontexten zu wechseln, um ein umfassendes Verständnis und eine flexible Anwendung der Konzepte zu fördern.

„Die genutzten Darstellungen können zum einen vorgegeben sein, beispielsweise von der Lehrperson oder von Schulbüchern, zum anderen auch selbst von den Lernenden entwickelt werden, um beispielsweise eigene Ideen mitzuteilen oder Rechenwege zu veranschaulichen“ (Kuhnke, 2013, S. 8).

Dem von Jerome Bruner (1974) geprägten EIS – Prinzip unterliegen unterschiedliche Modelle der Darstellungsebenen. Es werden drei Ebenen unterschieden, die enaktive (handelnd), die ikonische (bildlich) und die symbolische Darstellung von Inhalten.

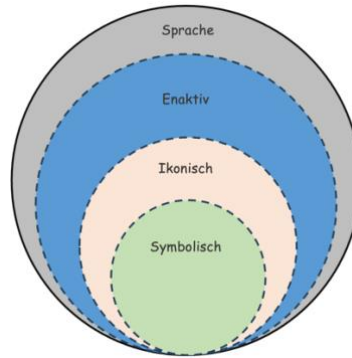


Abbildung 3: Das EIS – Prinzip nach Bruner (eigene Darstellung)

In Abbildung 3 wird eine mögliche Interpretation des EIS – Prinzips dargestellt. Dabei wurden die Darstellungsformen nach Kuhnke (2013, S. 9) und der mögliche Wechsel zwischen den vier von der Autorin formulierten Darstellungsformen berücksichtigt.

Die Vermittlung mathematischer Konzepte erfordert den Einsatz unterschiedlicher Repräsentationsebenen, um ein tiefgehendes Verständnis zu ermöglichen. Eine erste Ebene bildet das handelnde Operieren mit Materialien, wobei Lernende durch eigene Aktivitäten mathematische Strukturen erfahren. Dies kann durch den Umgang mit Naturmaterialien (z. B. das Holen von zweimal vier Kastanien) oder mit didaktischen Materialien (z. B. das Nehmen von zweimal vier Wendeplättchen) erfolgen.

Ergänzend dazu dienen bildliche Darstellungen der Veranschaulichung mathematischer Zusammenhänge. Diese können entweder lebensweltliche Situationen (z. B. zwei Gruppen mit jeweils vier Mädchen) oder didaktische Materialien (z. B. zweimal vier Wendeplättchen) abbilden. Die formale Ebene der mathematisch-symbolischen Repräsentation wird durch die Schreibweise $2 \cdot 4$ realisiert, wodurch die mathematische Struktur prägnant dargestellt wird.

Eine weitere zentrale Repräsentationsform stellt die sprachlich-symbolische Ebene dar, die sowohl kontextbezogen als auch kontextfrei formuliert werden kann. Beispielsweise kann die Multiplikation als narrative Beschreibung („Timo geht zweimal in den Keller und holt jeweils vier Flaschen“) oder als sprachlich verkürzte Form („zweimal vier“) ausgedrückt werden. Die gezielte Verknüpfung dieser verschiedenen Darstellungsformen unterstützt den Prozess der Konzeptbildung und erleichtert den Übergang von konkreten Handlungserfahrungen zu abstrakten mathematischen Symbolen.

„Diese Darstellungen sollen als Lernhilfe fungieren und werden mit der Prämisse eingesetzt, dass sie die Lernenden beim Aufbau von tragfähigen Vorstellungen zu mathematischen Begriffen unterstützen.“ (Kuhnke, 2013, S. 10)

Durch den Einsatz vielfältiger Darstellungsformen sollen demnach Lernende dabei unterstützt werden, ein möglichst umfassendes Verständnis eines mathematischen Begriffs zu entwickeln. Die Bereitstellung mehrerer Darstellungen eröffnet ihnen die Möglichkeit, Verbindungen zwischen diesen herzustellen, wodurch die zugrunde liegende Struktur des abstrakten Begriffs erkennbar wird.

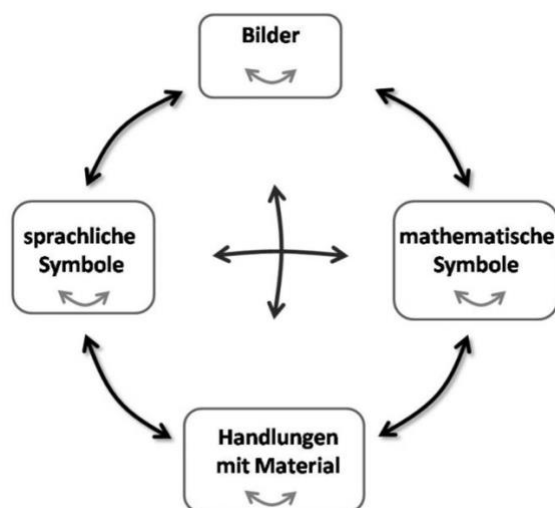


Abbildung 4: Wechsel zwischen Darstellungen nach Kuhnke (2013, S. 32)

2 Wenn die Welt ein Dorf wäre – ein handlungsorientierter Zugang

Das vorliegende Material ist in mehrere aufeinander aufbauende Stufen gegliedert, die eine systematische Erarbeitung des Prozentbegriffs und der Prozentrechnung ermöglichen. Die Lernschritte orientieren sich am bewährten EIS-Prinzip (enaktiv – ikonisch – symbolisch) und führen die Lernenden schrittweise an die Thematik heran. Dabei wurde gezielt darauf geachtet, Materialien auszuwählen, die den Schüler*innen aus dem Mathematikunterricht bereits vertraut sein sollten, um an bestehendes Wissen anzuknüpfen und eine kohärente Weiterentwicklung ihrer mathematischen Kompetenzen zu gewährleisten.

2.1 Vom Bilderbuch zu den ersten Begriffen und Phrasen

Im Buch „Wenn die Welt ein Dorf wäre“ von Smith und Armstrong (2024) wird die Zahl der Gesamtbevölkerung auf die Größe eines Dorfs gerechnet.



Abbildung 5: Buch „Wenn die Welt ein Dorf wäre ...“ (Smith und Armstrong, 2024)

Es wird die Vorstellung aufgezeigt, die gesamte Weltbevölkerung würde in einem Dorf mit nur 100 Bewohner*innen leben. Somit ergibt sich ein Verhältnis von 8 000 000 000 : 100. Eine Person aus dem Weltdorf steht für 80 000 000 Menschen aus der realen Welt.

*Wie würde dieses Dorf aussehen? Welche Nationalitäten wären vertreten? Welche Sprachen würden gesprochen werden? Wie alt wären die Bewohner*innen, was würden sie essen und wie viele von ihnen würden lesen und schreiben können?* Diesen Fragen wird im Buch nachgegangen.

Anhand dieser Überlegungen kann nun auf sprachliche und mathematische Problemstellungen mit Hilfe von zusätzlichen Materialien eingegangen werden.

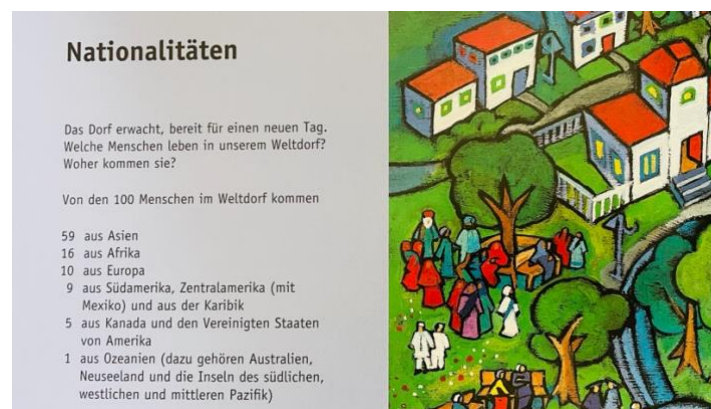


Abbildung 6: Auszug aus dem Buch „Wenn die Welt ein Dorf wäre ...“ (Smith und Armstrong, 2024)

Für die weitere Bearbeitung der Begrifflichkeiten eignet sich das Hunderterfeld. Da es zumeist aus dem Unterricht und der Bearbeitung vom Zahlenraum Hundert bekannt ist.

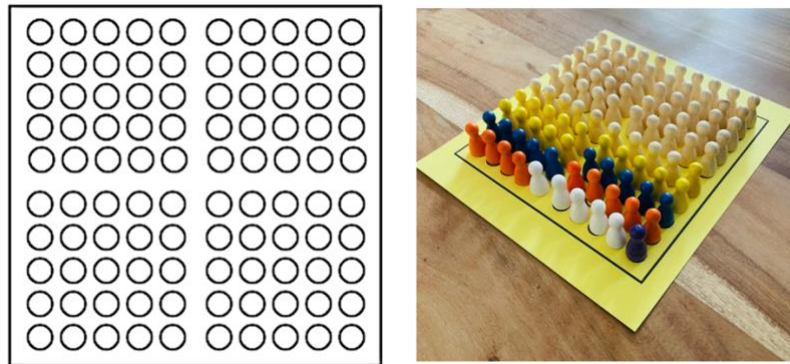


Abbildung 7: Enaktiver Zugang über das Hunderterfeld

Die im Buch zu Verfügung gestellten Zahlen und Verhältnisse eignen sich hervorragend für den Unterricht in der Primarstufe, um diese (siehe Abbildung 7) mit Spielfiguren aufzustellen und anschließend zu untersuchen.

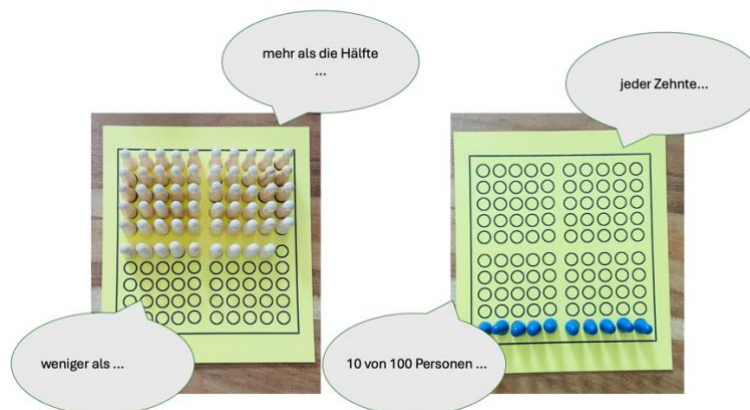


Abbildung 8: Wortschatzerweiterung

„Fachbegriffe nehmen im fachlichen Lernprozess eine Schlüsselstellung ein“ (Verboom, 2017, S. 25). Anhand des aufgezeigten Beispiels in Abbildung 8 können bedeutende themenbezogene Satzbausteine optimal erarbeitet, wiederholt und gefestigt werden.

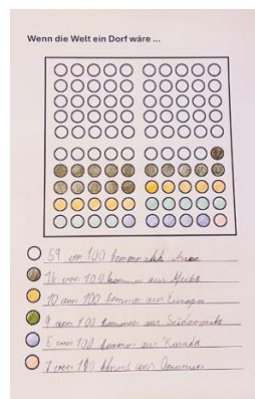


Abbildung 9: Eine Möglichkeit zur ikonischen Darstellung

Das in Abbildung 9 dargestellte Arbeitsblatt kann genutzt werden, um erste Erkenntnisse einzuzeichnen und Satzphrasen zu notieren. In einem weiteren Schritt sollen dann erste Ergebnisse und Interpretationen getätigt werden.

2.2 Übergang zur Sekundarstufe I

Mit Hilfe des Hunderterfelds und der Figuren können auch in der Sekundarstufe I die ersten Begriffe und deren Bedeutung erarbeitet werden. So entspricht eine Spielfigur der Prozentzahl 1 und das Hunderterfeld bildet die „von Hundert“ Vorstellung.

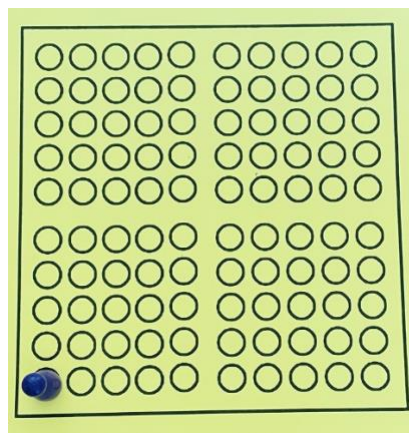


Abbildung 10: Prozent - per cento - p%

So können erste Berechnungen durchgeführt werden, indem man mehrere Hunderterfelder als Ganzes zusammenfügt. Damit wird der Grundwert erhöht und es können die Prozentwertveränderungen nachvollzogen werden (siehe Abbildung 11).

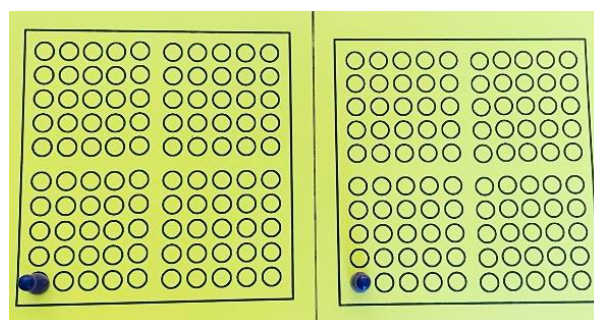


Abbildung 11: Grundwert beträgt 200

Diese Übung wird im Rahmen des Lernprozesses mit einer Schulklasse für mehrere Grundwertänderungen durchgeführt. Bei dieser Methode werden bald Grenzen aufgezeigt und es bedarf einer Erweiterung des Materials. Diese Idee der Erweiterung beruht auf der Herangehensweise von Haeggqwist (2025).

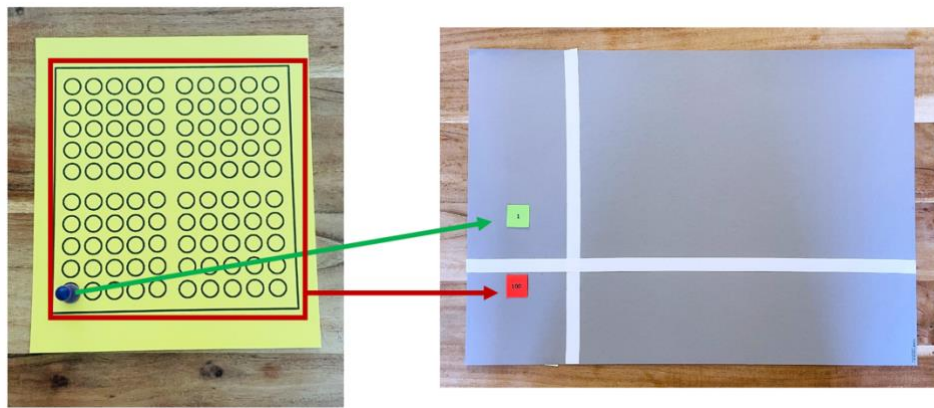


Abbildung 12: Vom Hunderterfeld zur Prozenttafel

Durch die Nutzung der enaktiven Herangehensweise über die Prozenttafel spielt vor allem die Verhältnisgleichung eine zentrale Rolle. „In der Didaktik findet dieser Ansatz wenig Anklang. Inhaltlich basiert er aber weitestgehend auf den Ideen der Prozentformel.“ (Gudladt, 2020, S.19)

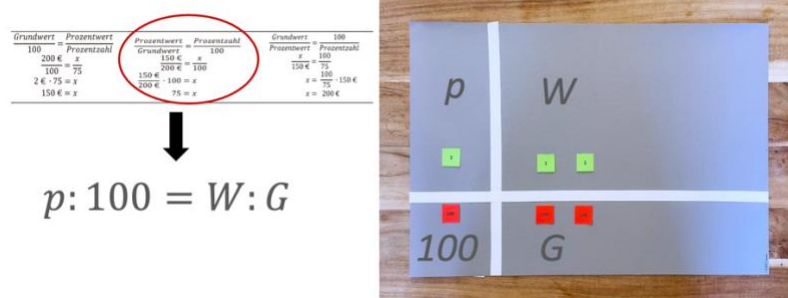


Abbildung 13: Von der Verhältnisgleichung zur Prozenttafel

Mit Hilfe der Prozenttafel können durch Auflegen der Marken die Verhältnisse eindeutig dargestellt und auch berechnet werden (siehe Abbildungen 14–16). Die Prozenttafel wird in vier Bereiche unterteilt, wie in Abbildung 13 dargestellt. Diese Unterteilung folgt der Struktur der Verhältnisgleichung und umfasst die Elemente Prozentsatz (p), Prozentwert (W) und Grundwert (G).

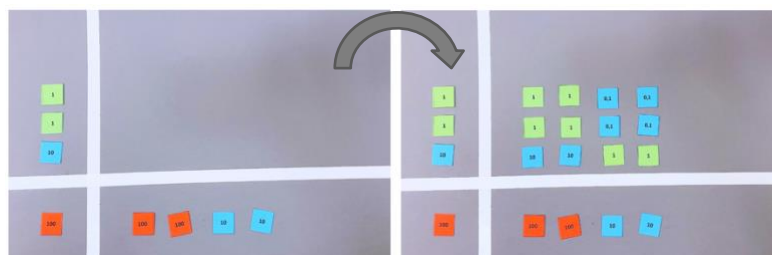


Abbildung 14: Berechnung des Prozentwerts

Das in Abbildung 14 dargestellte Beispiel lautet „12 % von 220“. Mithilfe der Legemethode kann der Prozentwert durch das Einhalten des entsprechenden Verhältnisses visualisiert werden.

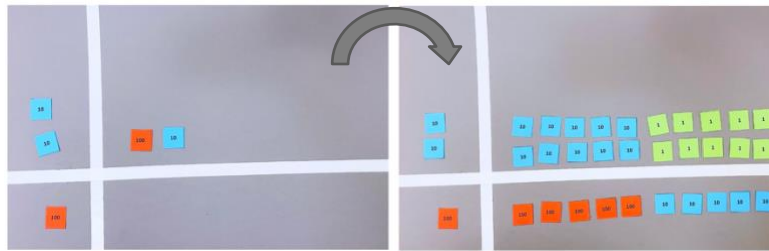


Abbildung 15: Berechnung des Grundwerts

In Abbildung 15 wird der Grundwert ermittelt. Die Formulierung der Aufgabe lautet „20 % sind 110“. Um bei dieser Aufgabe auf ein korrektes Ergebnis zu kommen, wird die Entbündelung der Hundertermarke und auch die Entbündelung der Zehnermarke benötigt.

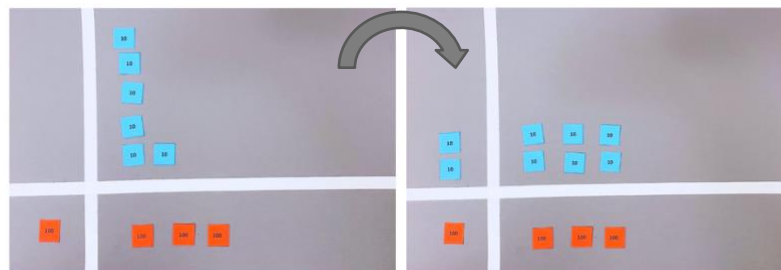


Abbildung 16: Berechnung des Prozentsatzes

Für alle Aufgaben lässt sich zusammenfassend feststellen, dass der Schwierigkeitsgrad durch die gezielte Auswahl der Aufgaben angepasst werden kann. Auf diese Weise kann der Zugang zu komplexeren Herausforderungen sowohl individuell als auch differenziert gestaltet werden.

3 Zusammenfassung und Ausblick

Die Prozentrechnung ist ein zentrales Thema im Mathematikunterricht, das sowohl im Alltag als auch im Beruf von großer Bedeutung ist. Sie wird in verschiedenen Bildungsstufen, von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe I, thematisiert. Es gibt zwei zentrale Unterscheidungen bei Prozenten, einerseits Prozente als Zahlen und andererseits Prozente als relative Größen. Diese Grundvorstellungen können nicht klar voneinander getrennt werden und überlappen sich oft. Prozentsätze können als Dezimalzahlen oder Brüche dargestellt werden, als Anteile einer Gesamtmenge oder als Verhältnis zwischen zwei Größen.

Es gibt verschiedene Lösungsverfahren zur Prozentrechnung, die je nach Kontext und Aufgabenstellung angewendet werden können. Diese Verfahren werden oft durch visuelle Hilfsmittel wie Diagramme und Grafiken unterstützt. Die Vermittlung der Prozentrechnung umfasst drei zentrale Aspekte: Sinnkonstituierung, Verinnerlichung und Anwendung. Diese Aspekte helfen den Lernenden, den Begriff durch konkrete Handlungszusammenhänge zu

verstehen, durch eigenes Handeln zu vertiefen und schließlich auf reale Situationen anzuwenden.

Zum Wechsel der Darstellungsebenen der Prozentrechnung gehört es, zwischen verschiedenen Repräsentationen wie grafischen Darstellungen, symbolischen Ausdrücken und realen Kontexten zu wechseln. Dies fördert ein umfassendes Verständnis und eine flexible Anwendung der Konzepte. Praktische Beispiele und Übungen sollen den Lernenden helfen, die Prozentrechnung in verschiedenen Kontexten anzuwenden. Dazu gehören handlungsorientierte Zugänge und die Nutzung von Materialien wie Hunderterfeldern und Prozenttafeln. Das didaktische Konzept „Wenn die Welt ein Dorf wäre“ (Smith & Armstrong, 2024) ist ein ausgezeichnetes Beispiel dafür, wie der Mathematikunterricht zum Themenbereich „Prozentrechnung“ handlungsorientiert und höchst lehrreich gestaltet werden kann.

Eine zukünftige Wirksamkeitsforschung zu den vorgestellten Materialien im Kontext der Primar- und Sekundarstufe erscheint naheliegend. Im Rahmen einer bereits geplanten Untersuchung ist der Einsatz der Materialien in einer Mittelschule vorgesehen, wobei der Prozentbegriff in drei Parallelklassen unter Verwendung dieser erarbeitet und vermittelt wird.

Literatur

Barzel, E., & Ehret, C. (2009): Mathematische Sprache entwickeln. *mathematik lehren* 156, S. 4–9.

BMBWF (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung) (2023a). *Lehrplan der Volksschule*.

https://www.ris.bka.gv.at/eli/bgbl/II/2023/1?fbclid=IwAR1iMLXHC2W_V85NnBxNw-Yk3z5WCTINCskkkaG1c0QBwhLxNdZiRrJKAbs

BMBWF (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung) (2024). *Lehrplan der Mittelschule*.

<https://www.ris.bka.gv.at/NormDokument.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007820&Artikel=&Paragraf=&Anlage=1&Uebergangsrecht=>

BMBWF (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung) (2025, 3. März).

Kompetenzraster der Sekundarstufe I.

<https://www.paedagogikpaket.at/massnahmen/kompetenzraster.html>

Gudladt P. (2020), Inhaltliche Zugänge zu Anteilsvergleichen im Kontext des Prozentbegriffs, Perspektiven der Mathematikdidaktik, https://doi.org/10.1007/978-3-658-32447-6_1

Hafner, T. (2011). *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I. Empirische Untersuchung und didaktische Analysen*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner/Springer Fachmedien.

Haeggqwist, L. (2025, 4. März). Anleitung Prozentrechnung mit dem Markenspiel.

https://mathematte.de/wp-content/uploads/2019/08/anleitung_prozentrechnung.pdf

Kuhnke, K. (2012). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel – Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

- Maier, H. (1986): Empirische Arbeiten zum Problemfeld Sprache im Mathematikunterricht. *ZDM* 18 (4), S. 137–147.
- Pöhler, B. (2018). *Konzeptuelle und lexikalische Lernpfade und Lernwege zu Prozenten Eine Entwicklungsstudie*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Sill, H.-D. (2010). Probleme im Umgang mit Prozenten. In W. Herget & K. Richter (Hsg.), *Mathematische Kompetenzen entwickeln und erfassen. Festschrift für Werner Walsch zum 80. Geburtstag* (S. 37–149). Hildesheim: Franzbecker.
- Smith, D. J. und Armstrong, S. (2024). *Wenn die Welt ein Dorf wäre ...* Wien: Jungbrunnen Verlag.
- Verboom, L. (2017). Fachbezogene Sprachförderung im Mathematikunterricht. Das WEGE-Konzept: ein übersichtlicher Weg durch den Sprachförder-Dschungel. *Grundschule aktuell: Zeitschrift des Grundschulverbandes* 137, S. 25-28
- Vom Hofe, R. und Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik* 37.1, S. 225–254.

Nachdenken statt Nach-Denken

Wie kann Problemlösen im Regelunterricht realisiert werden?

Felix Woltron¹

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1374>

Zusammenfassung

Das Motto „Mathematik aktiv“ steht für eine aktive Gestaltung des Mathematikunterrichts. Doch was bedeutet es, „aktiv“ Mathematik zu betreiben? Eine mögliche Antwort darauf ist die eigenständige Auseinandersetzung mit noch unbekannten Problemstellungen. Das zugrunde liegende didaktische Konzept des Problemlösens ist seit Jahrzehnten ein wesentlicher Bestandteil der mathematischen Fachdidaktik. Die kontinuierliche Umsetzung im Regelunterricht gelingt jedoch aufgrund verschiedener Hürden oft nur unzureichend. Ziel dieses Artikels ist es, mithilfe aktueller theoretischer Überlegungen und evidenzbasierter Strategien eine praxisnahe Grundlage zu bieten, um diese Hindernisse zu überwinden und den kontinuierlichen Einsatz von Problemlösungsprozessen zu fördern. Lehrpersonen sollen dabei nicht nur von theoretischen Konzepten profitieren, sondern aktiv in die Entwicklung und Umsetzung des Problemlösens im Regelunterricht eingebunden werden, um die Umsetzung im Mathematikunterricht zu erleichtern und zu verbessern.

Stichwörter: Problemlösen, Beliefs, Umsetzungsstrategien

1 Einleitung

Das fachdidaktische Konzept des „Problemlösens“, welches sich mit der Bewältigung nicht-routinemäßiger Aufgaben ohne vorgefertigte Lösungsstrategien befasst, steht seit Jahrzehnten im Fokus der mathematischen Fachdidaktik (Liljedahl & Cai, 2021, S. 723 ff.). Die erfolgreiche Implementierung dieses Konzepts in den regulären Unterricht erfordert nicht nur spezielle Vorgehensweisen, sondern auch spezifische Wissensdimensionen der Lehrpersonen. Ziel dieses Artikels ist es, Voraussetzungen und Hürden für die Realisierung des Problemlösens im Regelunterricht zu thematisieren und daraus Umsetzungsstrategien abzuleiten. Ebenso

¹ Universität Wien, Universitätsring 1, 1010 Wien.
E-Mail: felix.woltron@univie.ac.at

werden beispielhaft Problemstellungen für die Primar- und Sekundarstufe aufgezeigt und besprochen.

2 Theorie

2.1 Definition

In der mathematischen Fachdidaktik wird von einem „Problem“ gesprochen, wenn eine Aufgabe eine kognitive Barriere enthält, die über bekannte Lösungswege hinausgeht. Im deutschsprachigen Raum unterscheidet man zwischen (Routine-)Aufgaben, bei denen die Lösungsstrategie bekannt ist, und Problemen, die von den Lernenden als ungewohnt und nicht unmittelbar lösbar wahrgenommen werden (Bruder & Collet, 2011, S. 11). Das Lösen solcher Probleme erfordert die Neukombination vorhandenen Wissens oder den Einsatz neuer Methoden, die als „Heurismen“ bezeichnet werden. Nach Pólya (1949) sind Heurismen Denkprozesse, die typischerweise beim Problemlösen unterstützen.

Schoenfeld (1985) beschreibt vier wesentliche Komponenten des Problemlösens: Ressourcen (fachliches Vorwissen), Beliefs (Überzeugungen der Lernenden über Mathematik), Heuristiken (strategische Lösungsansätze) und Kontrolle (bewusste Steuerung des eigenen Vorgehens).

Beliefs setzen sich nach Maaß (2006, S. 119) „[...] aus relativ überdauerndem subjektivem Wissen von bestimmten Objekten oder Angelegenheiten sowie damit verbundenen Emotionen und Haltungen zusammen [...]“ und „[...] können bewusst oder unbewusst sein“. Überzeugungen von Schüler*innen wie „nur Genies können kreative Lösungswege entwickeln“, „Probleme müssen schnell lösbar sein“ oder „es gibt immer nur eine richtige Lösung“ können die Bereitschaft zum Problemlösen im Unterricht erheblich beeinträchtigen (Schoenfeld, 1992, S. 359).

Die Komponente „Kontrolle“ beschreibt die bewusste Zuweisung von Zeit und Anstrengung zu verschiedenen Lösungsansätzen (Schoenfeld, 1985, S. 232). Auch der Umgang mit Frustration spielt eine entscheidende Rolle für den Erfolg des Problemlöseprozesses (Herold-Blasius et al., 2019, S. 299).

2.2 Gründe für den Einsatz des Problemlösens

Der Einsatz des didaktischen Konzepts des Problemlösens im Mathematikunterricht kann nach Rott (2015, S. 10 ff.) aufgrund vielfältiger Aspekte begründet werden. Aus innermathematischer Sicht steht das Problemlösen im Zentrum fachmathematischer Tätigkeit. Nach Halmos (1980, S. 519) ist „[...] the mathematician’s main reason for existence [...] to solve problems [...]“. Die Realisierung von problemlösenden Prozessen im Regelunterricht kann und soll ein

möglichst wissenschaftsnahes Vorgehen ermöglichen und somit zur Ausprägung eines adäquaten Bildes der Mathematik und ihrer Arbeitsweise beitragen.

Aus mathematisch didaktischer Sicht spricht die dritte Winter'sche Grunderfahrung („in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben“), welche den allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterrichts legitimiert, für den Erwerb von Problemlösefähigkeiten im Mathematikunterricht (Winter, 1995, S. 37).

Weitere Gründe für die Behandlung von Problemen im Mathematikunterricht können nach Rott (2015, S. 10 ff.) folgendermaßen aufgelistet werden:

- Pädagogische Gründe: Mathematikunterricht soll einen breiten, gesellschaftlichen Konsens anstreben, „entdeckendes Lernen“ solle an ausgewählten Problemen stattfinden.
- Lernpsychologische Gründe: Jeder Lernende muss sich durch aktive Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand sein Wissen selbst konstruieren; zur Gestaltung einer entsprechenden Unterrichtskultur gehört das Problemlösen.
- Empirische Gründe: Neben Studien wie TIMSS und PISA, die Schüler*innen Defizite auf dem Gebiet des Problemlösens nachweisen und damit Handlungsbedarf nahelegen, gibt es auch Lehrer*innenbefragungen, die zeigen, dass ein starkes Interesse an einem problemorientierten Mathematikunterricht besteht.
- Gesellschaftliche Gründe: Eine dringende Forderung an den heutigen Unterricht (u.a. von TIMSS und PISA) ist die Vorbereitung der Lernenden auf das Lösen von (komplexen) Problemen und die Emanzipation von ihren Lehrpersonen.
- Motivatorische Gründe: Problemlösen kann Spaß an der Mathematik vermitteln; durch Problemaufgaben und den Einbezug von Erfahrungen der realen Welt könne man bei Schüler*innen Motivation erzeugen.

Des Weiteren ist die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten eine zentrale Forderung der österreichischen Lehrpläne, sowohl fachübergreifend als auch fachspezifisch für die mathematische Ausbildung. Es sei jedoch angemerkt, dass neben den zahlreichen Quellen, die das Problemlösen legitimieren, auch Artikel existieren, die dieses Konzept sowie verwandte fachdidaktische Ansätze kritisch hinterfragen (z. B. Kollosche, 2017).

2.3 Anforderungen an Lehrpersonen für die Realisierung des Problemlöseprozesses

Die Umsetzung dieses didaktischen Konzepts im regulären Unterricht erfordert von Lehrkräften umfassende Kenntnisse in verschiedenen Bereichen, die von Clivaz et al. (2023, S. 3) in folgende Kategorien unterteilt werden:

1. Knowledge of mathematical Problem solving (PS)
2. Knowledge of mathematical problems
3. Knowledge of problem posing
4. Knowledge of students as mathematical problem solvers
5. Knowledge of affective factors and beliefs (teacher/student)
6. Knowledge of instructional practices for PS

Die ersten drei Kategorien werden als „PS-Content Knowledge“ zusammengefasst, während die restlichen als „Pedagogical PS-Knowledge“ bezeichnet werden. Dieser Artikel konzentriert sich auf die Kategorien 2, 3 und 6, da Lehrkräfte häufig folgende Herausforderungen bei der Implementierung von PS im Unterricht äußern (vgl. Herold-Blasius et al., 2019, S. 297 ff.):

- I. Dabei lernt man nicht genug.
- II. Das ist nur was für die Guten.
- III. Das lässt sich im Unterricht nicht realisieren.
- IV. Problemlösen – das mache ich doch schon (wobei Problemlösen mit dem Lösen komplexer Routineaufgaben gleichgesetzt wird).

Diese Aussagen verdeutlichen ein mangelndes Verständnis von problemlösenden Prozessen im Regelunterricht (IV, 2) sowie darüber, wie dieses Konzept im Unterricht umgesetzt werden kann (I, II, III, 2, 3, 4). Spezielle Lehrer*innenausbildungsprogramme sollen diese Defizite beheben und Wissen in allen genannten Kategorien stärken. Da das Erstellen von Problemlöseaufgaben laut Chapman (2015) zeitaufwendig und anspruchsvoll ist, sollten Lehrkräfte mit Materialien unterstützt werden, die eine Integration in den Lehrplan ermöglichen und gleichzeitig eine interne Differenzierung bieten („low floor, high ceiling tasks“).

3 Realisierungsmöglichkeiten im Mathematikunterricht

Die theoretische Beschreibung von Problemlöseprozessen wurde von mehreren Autor*innen in Phasenmodellen bereits vorgenommen (Rott et al., 2021, S. 739). Auch für die Realisierung im Regelunterricht gibt es bereits Modelle und Ideen (z. B. Heuristentraining, Bruder & Collet, 2011, S. 114). Aus Sicht des Autors ist es jedoch zielführender bzw. nachhaltiger, Umsetzungsstrategien nicht nur vorzugeben, sondern sie mit den umsetzenden Lehrpersonen (weiter) zu entwickeln. Dies soll im Rahmen eines Projektes im kommenden Schuljahr auch durchgeführt werden. Als Grundlage dazu dient der „Building Thinking Classrooms Approach“ von Liljedahl (2016). Darin werden neun „Elemente“ eines Unterrichtssettings beschrieben, welche Schüler*innen dabei unterstützen bzw. motivieren sollen, eigenaktiv und selbst-denkend Problemstellungen zu lösen. Die folgenden Kriterien sollen somit auch die Implementierung von

Problemlöseprozessen im Regelunterricht fördern und lauten folgendermaßen (Liljedahl, 2016, S. 381 f.):

- The type of tasks used and when and how they are used.
- Lessons need to begin with good problem-solving tasks.
- The way in which tasks are given to students.
- How groups are formed, both in general and when students work on tasks.
- Student workspace while they work on tasks.
- Room organization, both in general and when students work on tasks.
- How questions are answered when students are working on tasks.
- The ways in which hints and extensions are used while students work on tasks.
- When and how a teacher levels their classroom during or after tasks.
- Assessment, both in general and when students work on tasks.

In einem „Thinking Classroom“ stehen problemlösende, ansprechende Aufgaben im Mittelpunkt, die mündlich gestellt werden, um sofortige Diskussionen zu fördern. Schüler*innen arbeiten in zufällig gebildeten Gruppen an vertikalen, nicht-permanenten Flächen, während die Lehrperson den Raum flexibel nutzt. Fragen werden nur beantwortet, wenn sie das Weiterdenken unterstützen, und Hinweise oder Erweiterungen halten die Aufgaben anspruchsvoll, aber machbar. Sobald alle Gruppen ein Grundverständnis erreicht haben, wird das Thema gemeinsam reflektiert und formalisiert. Die Bewertung fokussiert sich auf den Lernprozess und die aktive Beteiligung, statt nur auf das Endprodukt.

3.1 Aufgabenkategorien

Ein weiterer Ansatzpunkt für die gemeinsame Erarbeitung von Realisierungsmöglichkeiten liefern Herold-Blasius et al. (2019, S. 299 ff.). Die Autor*innen sprechen sich für den Einsatz von Problemlösen als Ergänzung zu Routineaufgaben vor allem in Einstiegsphasen und Übungsphasen aus. Inhaltlich muss jedoch noch geklärt werden, welches mathematisches Themengebiet sich für das Konzept des Problemlösens in welchen Phasen eignet und wie die Ausarbeitungen der Schüler*innen bewertet/benotet werden können. Ein potentiell Bewertungsmuster findet sich ebenso bei Herold-Blasius et al. (2019, S. 307).

Eine weitere Aufgabenkategorie stellen aus Sicht des Autors dieses Artikels themenunabhängige Probleme dar. Diese können in unterschiedlichen Schulstufen und zu unterschiedlichen Phasen des Unterrichts eingesetzt werden und dienen dem Kennenlernen bzw. dem Vertiefen von heuristischen Prinzipien, Strategien und Hilfsmitteln.

3.2 Beispielhafte Problemstellungen

Eine mögliche (je nach Betrachtungsweise themenunabhängige) Aufgabe für die Sekundarstufe 1, die sich gemäß Liljedahl (2016, S. 381) sowohl als Einstiegsaufgabe zu Beginn einer Unterrichtsstunde als auch als erster Zugang zum Problemlösen eignet, lautet wie folgt:

Max und Moritz spielen ein einfaches Spiel. Dazu haben sie hundert 1-Cent-Münzen auf dem Tisch zu einem Kreis ausgelegt. Wer am Zug ist, darf eine Münze oder zwei Münzen aus dem Kreis nehmen. An welcher Stelle ein Spieler die Münze oder die Münzen entfernt, spielt keine Rolle. Entscheidet er sich für zwei Münzen, müssen diese aber direkt nebeneinander liegen. Wer zuerst keine Münze mehr nehmen kann, hat verloren. Max macht den ersten Zug. Beide Spieler sind perfekte Logiker und machen keine Denkfehler. Wer wird das Spiel gewinnen und welcher Strategie sollte er folgen? (Hemme, 2018)

Die Lösung dieses Problems wird, so wie jene der folgenden, nicht in diesem Artikel verschriftlicht. Sie kann jedoch gerne bei Interesse durch Kontaktaufnahme mit dem Autor erhalten werden.

Die folgende Problemstellung (konzipiert von Musilek) ist nach Herold-Blasius et al. (2019) in Übungsphasen einsetzbar. Inhaltlich zielt sie auf die Festigung der Addition im Zahlenraum 1 bis 100 bzw. auf die Eigenschaften von natürlichen Zahlen (gerade/ungerade) in der Primarstufe ab:

*In jedem dieser Säcke sind unendlich viele Zahlen von der darauf vermerkten Sorte.
Nimm genau vier Zahlen und addiere sie. Die Summe soll 16 sein!
Nimm genau zehn Zahlen und addiere sie. Die Summe soll 37 sein!*

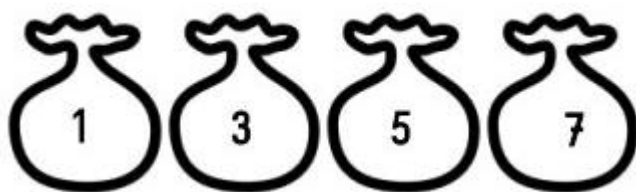


Abbildung 1: Problemstellung Primarstufe

Ist der Vorgang des Problemlösens im Unterricht etabliert, können auch komplexere bzw. umfangreichere Aufgabenstellungen behandelt werden (Liljedahl, 2016). Ein mögliches Beispiel dazu entstammt dem Projekt „MFU!“ („Mathe Fans an die Uni!“) der Universität Wien und wurde für die 8 Schulstufe konzipiert:

Finde für alle Zahlen größer als 1 und kleiner als 20 alle Möglichkeiten, sie als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (Treppenzahlen) größer als 0 zu schreiben. Was fällt dir auf? Begründe deine Antwort.

Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 100 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (Treppenzahlen) größer als 0 zu schreiben. (Hinweis: Anhand der Summe $1+2+3+\dots+14$ erkennt man, dass es höchstens 13 Summanden sein können.)

4 Ausblick

Den diskutierten Gründen für den Einsatz des fachdidaktischen Konzepts des Problemlösens im Regelunterricht stehen ebenso Herausforderungen in der praktischen Umsetzung gegenüber. Um diese zu bewältigen, bedarf es durchdachter Strategien, die von den unterrichtenden Lehrkräften mitgetragen und idealerweise aktiv mitgestaltet werden.

Das übergeordnete Ziel des gehaltenen Vortrags ist die Implementierung des Problemlösens im Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe. Zu diesem Zweck wurden Lehrkräfte eingeladen, die neben theoretischen Impulsen künftig mit geeigneten Materialien unterstützt werden. Zudem wird ihr Unterricht empirisch begleitet und theoriegeleitet analysiert.

Neben der Förderung bereits tätiger Lehrkräfte sollen auch Studierende während ihrer Ausbildung die Möglichkeit erhalten, ihre Expertise in den genannten Wissensdimensionen des Problemlösens zu vertiefen. Sie sollen des Weiteren problemorientierten Mathematikunterricht nicht nur durch Hospitationen kennenlernen, sondern auch eigene Unterrichtseinheiten nach diesem Konzept in der Praxis erproben können.

Literatur

- Bruder, R., & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Cornelsen Berlin.
- Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 3 (Heft 1), 19–36.
<https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1049>
- Clivaz, S., Batteau, V., Pellet, J. P., Bünzli, L. O., Daina, A., & S. Presutti (2023). Teachers' mathematical problem-solving knowledge: In what way is it constructed during teachers' collaborative work? *The Journal of Mathematical Behavior*, 69, 1–19.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101051>
- Halmos, P. R. (1980). The Heart Of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87 (Heft 7), S. 519–524.
- Hemme, H. (2018, 3. März). Münzen im Kreis. *Spektrum.de*.
<https://www.spektrum.de/raetsel/muenzen-im-kreis/1577710>

- Herold-Blasius, R., Holzäpfel, L., & Rott, B. (2019). Problemlösestrategien lehren lernen – Wo die Praxis Probleme beim Problemlösen sieht. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht*. Springer Spektrum Wiesbaden (S. 295—309). https://doi.org/10.1007/978-3-658-24292-3_21
- Kollosche, D. (2017). Entdeckendes Lernen: Eine Problematisierung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38, 209—237. <https://doi.org/10.1007/s13138-017-0116-x>
- Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving. In P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Hrsg.), *Posing and Solving Mathematical Problems. Research in Mathematics Education*. Springer Cham (S. 361—386). https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_21
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 53, S. 723—735. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Maaß, K. (2006). Bedeutungsdimensionen nützlichkeitsorientierter Beliefs. Ein theoretisches Konzept zu Vorstellungen über die Nützlichkeit von Mathematik und eine erste empirische Annäherung bei Lehramtsstudierenden. *mathematica didactica*, 29 (Heft 2), 114—138.
- Polya, G. (1949). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Francke Bern.
- Rott, B. (2015). *Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer empirischen Studie*. WTM Münster.
- Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM Mathematics Education*, 53, S. 737—752. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press New York.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. MacMillan New York (S. 334—370).
- Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 37—46.

3. Tagung Lernvideos in Mathematik – Werkzeug der Zukunft!?

Nachlese

Elisabeth Mürwald-Scheifinger¹

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1467>

Zusammenfassung

Die dritte Tagung „Lernvideos in Mathematik“ thematisiert neben der Nachhaltigkeit von Lernvideos auch den Einsatz der Künstlichen Intelligenz. In der Nachlese wird ein Einblick in die Tagung gegeben, um Lust auf den Besuch der nächsten Tagung zu machen.

Stichwörter: Lernvideo, Mathematik, KI

1 Impulse durch Plenarinputs

Die bereits dritte Tagung „Lernvideos in Mathematik“ ist ein Teilprojekt des großen Projektes „Mathematik macht Freude“ (<https://mmf.univie.ac.at/>), der Universität Wien, und fand von 20. bis 22. Februar 2025 an der mathematischen Fakultät der Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz, 1090 Wien statt. Der intensive Austausch unter den 35 Teilnehmer*innen aus Österreich und Deutschland, der durch die ersten beiden Tagungen bereits entstanden ist, wurde durch die interessanten Impulsvorträgen noch weiter angeregt. Laufende rasche Veränderungen stellen für nachhaltige, zukunftsorientierte Lernvideos große Herausforderungen dar. Neben der Nachhaltigkeit von Lernvideos macht auch der Einsatz von Künstlicher Intelligenz in und mit Lernvideos ein weites Spannungsfeld auf. Fragen wie „Kann KI für Lernvideos sinnbringend genutzt werden?“ oder „Braucht es neben KI noch Lernvideos?“ wurden von den Teilnehmer*innen diskutiert und nach Antworten wurde gesucht.

1.1 KI – Mensch – Gegensätze ziehen einander an?!

Andreas Kunar und Lars Mehnen diskutierten in einer Podiumsdiskussion und danach mit den Teilnehmer*innen Fragen, die sich aus ihren Plenarinputs ergaben.

¹ Universität Wien, Mathematische Fakultät, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien
E-Mail: elisabeth.muerwald-scheifinger@univie.ac.at

Andreas Kunar initiierte mit seinen Ausführungen Gedanken, die während der drei Tage immer wieder in den Diskussionen auftauchten. Versteht uns KI eigentlich, oder ist sie nur ein „statistischer Papagei“ des Lernmaterials? Braucht es überhaupt ein Verständnis, oder ist dies überbewertet? KI halluziniert gelegentlich, das kennen wir von bisherigen Rechnern nicht, obwohl wir Menschen selbst zu Konfabulation neigen. Welche Ansätze helfen uns, mit all diesen Dingen besser umzugehen? Ist KI vertrauenswürdig bzw. wie einfach kann sie überlistet und ausgetrickst werden?

Lars Mehnen stellte seine Implementierungserfahrungen vor und verwies dabei auf die positiven Lernerfolge der Studierenden. Vorlesungen, die mit KI bearbeitet, durch Avatar-Darstellungen, Stimmveränderungen o.ä., und den Studierenden zur Verfügung gestellt werden, wurden vorgestellt und ihre Wirkungen diskutiert. Er erläuterte auch die Herausforderungen wie auch die möglichen zukünftigen Entwicklungen im Bereich von KI-gestützten Lehrmethoden. Diese Ausführungen wurden durch eine intensive Publikumsdiskussion abgerundet, die kaum enden wollte.

1.2 Erlaubt – nicht erlaubt – Medienrecht & Lernvideos

Meinrad Ciresa erläuterte wichtige Aspekte des Medienrechts in äußerst humorvoller und professioneller Art. Die Erstellung von Lernvideos erfordert eine sorgfältige rechtliche Analyse. Neben den Persönlichkeitsrechten der Lehrenden spielen Urheber- und Leistungsschutzrechte der präsentierten Inhalte eine zentrale Rolle. Während selbst erstellte oder lizenzfreie Inhalte (Creative Commons) problemlos verwendet werden können, ist für die Nutzung approbierter Lehrmaterialien die Zustimmung des Verlages erforderlich. Zu beachten sind im Besonderen die Regelungen des digitalen Einsatzes im Unterricht und in der Lehre, die den Bildungseinrichtungen bestimmte Freiheiten und auch Einschränkungen einräumen. Darüber hinaus müssen in diesem Zusammenhang auch dienstrechtliche Fragen berücksichtigt werden. Viele Fragen wurden aus diesem Informationsangebot an die eigenen Institutionen und Projekte mitgenommen und werden dort nun sicher weiter behandelt.

1.3 Digitale Bildung & Computational Empowerment

In seinem Input diskutierte Fares Kayali Computational Empowerment als Lernenden-zentrierte Methode der digitalen Bildung und beleuchtete damit ein weiteres Kapitel. Computational Empowerment hilft Lernenden dabei eine aktive und selbstbestimmte Rolle in der Digitalität einzunehmen. Dies geht mit einer Verschiebung des Rollenverständnisses und der Machtstrukturen zwischen Lernenden und Lehrenden einher, und hat das Ziel soziale Gerechtigkeit, Diversität und Inklusion in der digitalen Bildung zu fördern.

2 Austausch & Impulse – „Bilder unserer Lernvideo-Ausstellung“

Die Möglichkeit in „Bilder unserer Lernvideo-Ausstellung“ ihre Projekte vorzustellen, haben viele Teilnehmer*innen genutzt und so nicht nur ihre Gedanken und Ideen zu ihren Forschungsprojekten präsentiert, sondern auch wichtige Impulse von den anderen Teilnehmer*innen eingeholt und bei diesen gesetzt.

András Bátkai (PH Vorarlberg) präsentierte einen innovativen Ansatz zur Gestaltung von Hausaufgaben in der Linearen Algebra für Lehramtsstudierenden.

Henrik Floren (Universität Paderborn) stellte mathematischdidaktische Lernmaterialien vor, die im LLLV.HD-Projekt hochschulübergreifend eingesetzt werden.

Martina Greiler & Tanja Lobing (PH Kärnten) gaben einen Einblick in das Projekt „Mathematik beGreifen“, das durch die Unterstützung von Lernvideos, abstrakte mathematische Konzepte durch handlungsorientierte Erklärungen eine fachdidaktische Anleitung für Lehrer*innen geben sollen.

Roland Gunesch (PH Vorarlberg) zeigte auf, worauf es bei Lernvideos aus Sicht von Studierenden ankommt.

Roman Ledinsky (VHS Meidling-Wien) berichtete aus seiner langjährigen Erfahrung im Umgang, Einsatz und Erstellung von Lernvideos über das Problem des passiven Konsums und stellte die Entwicklung einer KI-gestützten App vor.

Lars Mehnen (FH Technikum-Wien) erläuterte das Konzept der „Micro Learning Units“ und berichtete über erste Daten zur Klärung der Frage: Wie hat sich das Verhalten der Studierenden vor und nach der Einführung generativer KI verändert?

Birte Reich (Universität Paderborn) stellte das studiVEMINT-Projekt vor und wies auf die Besonderheiten des Projekts hin, wie auf den Einsatz von H5P-Elementen.

David Schwarzkopf (Otto-Friedrich-Universität Bamberg) berichtete über erste Ergebnisse einer Qualitätsanalyse von ad-hoc-produzierten Erklärvideos im Unterricht im Mathematikunterricht im Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer 8. Schulstufe.

3 Mehrwert durch Marktplatz & Workshops

Im Frühstücks-World-Cafe und am Marktplatz wurden verschiedene Themenbereiche in unterschiedlichen Gruppenzusammensetzungen diskutiert und mögliche Antworten und Impulse zu Themenfeldern wie *KI als Ghostwriter*, *Qualitätskriterien von Lernvideos*, *Verstehensillusion*, *Organisation & Aufbewahrung von Lernvideos* uvm. gesucht. Es hat sich wieder gezeigt, dass der intensive Austausch zwischen den Teilnehmer*innen eine hervorragende Quelle für neue Ideen und auch für Antworten schon lang gestellter Fragen ist.

Abgerundet wurde die Tagung durch die Möglichkeit des Besuches von zwei Workshops.

Victoria Strehn animierte die Teilnehmer*innen, Comics in einfachen Schritten herzustellen und so Geschichten mit einfachen Mitteln in wenigen Bildern zum Leben zu erwecken.

Philipp Schrodtt bearbeitete mit den Teilnehmer*innen, welche Regeln der Sprechtechnik einfach in die Sprechstimme implementiert werden können, und gab hilfreiche Tipps für das richtige Aufwärmen der Stimme, die deutliche Artikulation und richtige Betonung im Besonderen mathematischer Begriffe nicht nur in Lernvideos.

4 Vorankündigung

Hoffentlich haben Sie nun Lust bekommen als Teilnehmer*in bei der 4. Tagung „Lernvideos in Mathematik – Kompetenzen & KI / Produktion & Konsum“ dabei zu sein. Dann notieren Sie das Datum: Donnerstag, 19. Februar 2026, 10:00 Uhr bis Freitag, 20. Februar 2026, 18:00 Uhr, wir freuen uns auf Sie!

Alle Informationen finden Sie hier: <https://mmf.univie.ac.at/lernvideo-tagung/>

Hausübungen mit Ton und Bild

Ein konstruktivistischer Ansatz in der Hochschullehre

András Bátkai¹, Brigitta Békési²

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1433>

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit präsentiert ein innovatives Konzept für Hausübungen in der linearen Algebra, bei dem Lehramtsstudierende Erklärvideos ihrer Lösungswege erstellen. Dieser Ansatz basiert auf konstruktivistischen und konstruktionistischen Lerntheorien und zielt darauf ab, Studierende aktiv in den Lernprozess einzubinden und so ein tieferes Verständnis der mathematischen Inhalte zu fördern.

Die Ergebnisse der lehrbegleitenden Forschung mit Befragungen und Interviews deuten darauf hin, dass die Videoerstellung von den Studierenden als kognitiv aktivierend erlebt wurde, sowie positive Effekte auf die technische Kompetenz, das Selbstvertrauen und die Medienkompetenz der Beteiligten hat. Die Studierenden nehmen den Austausch mit den Lehrenden und das Feedback zu ihren Videos ebenfalls positiver wahr.

Die Arbeit schließt mit einem Ausblick auf mögliche weitere Untersuchungen und Projekte, die darauf abzielen, das Lehrkonzept weiter zu optimieren und die positiven Effekte zu verstärken.

Stichwörter: Erfahrungsbasiertes Lernen, Lernen durch Erklären, Konstruktionismus, Selbstbestimmungstheorie, Lernvideos von Studierenden

1 Einleitung

In der heutigen Hochschullehre, insbesondere im anspruchsvollen Feld der linearen Algebra, stehen Lehrende vor der Herausforderung, Studierende nicht nur mit den notwendigen fachlichen Inhalten vertraut zu machen, sondern auch ihre Fähigkeit zum selbstständigen Denken und zur Problemlösung zu fördern. Die traditionelle Form der Hausübungen, oft in Form von schriftlichen Abgaben, hat sich dabei als nicht immer ausreichend herausgestellt, um diesen Zielen gerecht zu werden (Hattie, 2010, 2023).

¹ Pädagogische Hochschule Vorarlberg, Liechtensteiner Str. 33-37, 6800 Feldkirch.

E-Mail: andras.batkai@ph-vorarlberg.ac.at

² JKU, Altenberger Straße 69, 4040 Linz.

Ein möglicher Ansatz zur Gestaltung von Hausübungen ist die Integration von Erklärvideos, die von den Studierenden selbst erstellt werden, da Studierende durchs Erklären der Lerninhalte Ideen verbalisieren müssen und dies das Verständnis fördert (Kristinsdóttir, 2022; Kunter et al., 2013). Dieser Ansatz bietet die Möglichkeit, die Studierenden aktiv in den Lernprozess einzubinden und ihnen gleichzeitig die Möglichkeit zu geben, ihre mathematischen Kompetenzen auf eine neue und innovative Weise zu entwickeln (Leuders, T., & Holzäpfel, L, 2011). Weiters, dank des regelmäßigen Übens, wie man mathematische Inhalte präzise formuliert, werden die Studierende selbstsicherer, ihr Eigenbild entwickelt sich, wodurch ihre kognitiven Kompetenzen sich besser entfalten können. Wir untersuchen, wie Studierende im Stoff und Erklären sicherer geworden sind, wie sie diese Entwicklung des Eigenbildes und den Lerneffekt der Videoerstellung einschätzen.

Die Erstellung von Erklärvideos als Hausaufgabenformat ist dabei nicht nur als eine Variation der traditionellen Hausübungen zu verstehen. Vielmehr basiert dieser Ansatz auf der konstruktionistischen Lerntheorie, die besagt, dass Lernen ein aktiver Prozess ist, bei dem die Lernenden ihr Wissen selbst konstruieren (Harel, 1993). Konstruktivismus, die theoretische Grundlage von Konstruktionismus, fokussiert auf die kognitiven Prozesse (Piaget, 1996), wobei Konstruktionismus (Papert, 2000) das Erstellen eines Produkts und das aktive Handeln im Fokus hat. Das Produkt ist der Beweis oder das Erklären eines Rechenweges, das Medium ist ein Video, damit der Prozess dokumentiert wird. Mit dieser Methode werden die Studierenden dazu angeregt, sich aktiv mit den mathematischen Inhalten auseinanderzusetzen und ihr Verständnis zu vertiefen, während die Übungsvideos als Produkt entstehen.

Im Rahmen unseres Projekts wurde ein Konzept entwickelt, bei dem Lehramtsstudierende Erklärvideos zu ähnlichen, aber leicht unterschiedlichen Aufgaben erstellen. Dieser Ansatz kombiniert die Vorteile der Methode *Lernen durch Erklären* mit den Möglichkeiten moderner Technologien und bietet somit eine mögliche Alternative zu traditionellen Hausaufgabenformaten. Die intensive Beschäftigung mit den Lerninhalten fördert die Selbstsicherheit der Studierenden und trägt zu einem positiven Eigenbild als angehende Lehrperson bei. Das Projekt schließt sich an andere Schulprojekte an, wo die Schüler*innen auch Videos als Hausaufgaben erstellen mussten (Békési, 2022; Békési et al., 2023).

Erste Ergebnisse aus Befragungen und Interviews mit den Studierenden und mit den Lehrenden deuten darauf hin, dass dieser Ansatz positive Effekte auf die Motivation, Selbstsicherheit und das selbsteingeschätzte Verständnis der Studierenden hat. So berichten beide Seiten, Lernende und Lehrende, dass durch die Erstellung der Videos ein tieferes Verständnis für die mathematischen Inhalte entwickelt wird und dass die wöchentliche und individuelle Rückmeldung zu den Videos bessere Betreuung bringt, indem Studierende regelmäßig Feedback darüber erhalten, was sie gut verstanden haben oder wo es noch Verbesserungsmöglichkeiten gibt. In anderen Punkten unterscheiden sich die Sichtweisen der zwei Gruppen, wie z.B. die ideale Länge eines Videos.

In diesem Beitrag werden wir zunächst die theoretischen Grundlagen unserer Studie erläutern. Das Eigenbild und die Eigeneinschätzung kann das Lernen und die Motivation

sowohl positiv als auch negativ beeinflussen, daher basieren wir das Seminarkonzept auf die Selbstbestimmungstheorie, diese fundiert als Grundlage. Die konstruktivistische Lerntheorie mit dem Fokus auf *Lernen durch Erklären* bildet den Rahmen unserer Studie bezüglich Lernprozesse. Anschließend werden wir das entwickelte Konzept vorstellen und die ersten Ergebnisse aus der Begleitforschung präsentieren. Abschließend werden wir einen Ausblick auf mögliche weitere Entwicklungen und Einsatzbereiche geben.

2 Theoretische Grundlagen für einen effektiven Mathematikunterricht im ersten Semester

Die Konzeption eines effektiven Mathematikunterrichts im ersten Semester des Lehramtsstudiums Mathematik erfordert ein fundiertes Verständnis lerntheoretischer Grundlagen und didaktischer Methoden, die Studierende zur aktiven Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten motivieren. In diesem Kapitel werden die theoretischen Rahmenbedingungen erläutert, die unserem Kursdesign zugrunde liegen. Im Zentrum steht die Selbstbestimmungstheorie, welche die Bedeutung des Selbstkonzepts für Lernprozesse hervorhebt. Des Weiteren stützen wir uns auf das erfahrungsbasierte Lernen und den Konstruktivismus, wobei wir insbesondere den Aspekt des Lernens durch Erklären hervorheben. Diese Theorien bieten wertvolle Einsichten in die Art und Weise, wie Studierende mathematische Konzepte verstehen, konstruieren und sich aneignen können.

2.1 Selbstbestimmungstheorie als Basis für Motivation und Selbstwirksamkeit

Die Selbstbestimmungstheorie (SDT) (Ryan & Deci, 2017) postuliert, dass die Qualität der Motivation maßgeblich vom Grad der Autonomie, Kompetenz und sozialen Eingebundenheit abhängt. Für den Mathematikunterricht bedeutet dies, dass Studierende die Möglichkeit haben sollten, eigene Lösungswege zu entwickeln, ihre Fähigkeiten realistisch einzuschätzen und sich als Teil einer Lerngemeinschaft zu erleben. Das neue Hausübungskonzept, welches den Studierenden erlaubt, selbstständig Entscheidungen über Lösungswege und Darstellungsformen zu treffen, fördert autonomes Lernen im Sinne der SDT. Darüber hinaus beeinflusst das erfolgreiche Bewältigen von Aufgaben und das Erhalten von positivem Feedback die Überzeugungen (Beliefs) und Einstellungen (Attitüden) der Studierenden in Bezug auf ihre mathematischen Fähigkeiten (Thurm & Barzel, 2020). Diese positiven Erfahrungen tragen zur Entwicklung eines starken Selbstkonzepts bei, welches wiederum eine wesentliche Voraussetzung für nachhaltiges Lernen darstellt. Die Förderung von Selbstwirksamkeit und positiven Einstellungen ist daher ein zentrales Anliegen unseres Kursdesigns.

2.2 Lerntheoretische Perspektiven für die Mathematikdidaktik

2.2.1 Erfahrungsbasiertes Lernen

Das erfahrungsbasierte Lernen (Kolb, 1984) betont die Bedeutung konkreter Erfahrungen und deren Reflexion für den Wissenserwerb. In der Mathematikdidaktik bedeutet dies, dass Studierende mathematische Konzepte durch das Bearbeiten von Problemen, das Durchführen von Experimenten und die Anwendung in realen Kontexten entdecken sollten (Winter, 2016). Dieser Ansatz fördert ein tieferes Verständnis, da Studierende Mathematik als aktive geistige Tätigkeit erleben.

2.2.2 Konstruktivismus und Konstruktionismus

Der Konstruktivismus (Reich, 2012) geht davon aus, dass Lernen ein aktiver Prozess der Wissenskonstruktion ist, der auf dem Vorwissen und den Interaktionen der Lernenden basiert. Bauersfeld (Bauersfeld, 1998) hebt dabei die Bedeutung von Interaktionen hervor. Der Konstruktionismus (Papert, 2000) erweitert diese Idee, indem er die Bedeutung des aktiven Erschaffens von Artefakten im Lernprozess betont. Für den Mathematikunterricht bedeutet dies, dass Studierende ermutigt werden sollten, mathematische Ideen aktiv zu erforschen, zu diskutieren und zu konstruieren (Schoenfeld, 2016).

2.3 Lernen durch Erklären als Synthese und kognitive Aktivierung

Die Methode Lernen durch Erklären (Hörnlein, 2025; Löppenber, 2021) stellt einen didaktischen Ansatz dar, der Elemente des erfahrungsbasierten Lernens und des Konstruktionismus vereint. Hierbei schlüpfen Studierende in die Rolle von Lehrenden und erklären mathematische Sachverhalte. Dieser Ansatz fördert die kognitive Aktivierung in besonderem Maße (Fauth, B., & Leuders, T., 2018; Leuders, 2015). Um mathematische Inhalte verständlich zu erklären, müssen Studierende diese tiefgehend durchdringen und strukturieren (Leuders, T., & Holzäpfel, L., 2011). Zudem fördert das Erklären die Metakognition, da Studierende ihr eigenes Wissen reflektieren und es anderen verständlich machen müssen (Kunter et al., 2013). Dieser Prozess trägt zur Identifizierung und Schließung von Wissenslücken bei und fördert ein tieferes Verständnis abstrakter Konzepte, insbesondere in der linearen Algebra. Die Integration von erfahrungsbasiertem Lernen, Konstruktionismus und Lernen durch Erklären bietet einen wirkungsvollen Rahmen für die Mathematikdidaktik im Hochschulbereich (Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001).

2.4 Fazit für das Kursdesign

Die Selbstbestimmungstheorie bildet die Grundlage unseres Kursdesigns, da sie die Bedeutung von Motivation und Selbstwirksamkeit für erfolgreiches Lernen hervorhebt. Des Weiteren

ren nutzen wir das Lernen durch Erklären als didaktischen Ansatz, der erfahrungsbasiertes Lernen, Konstruktivismus und Metakognition vereint. Durch die Kombination dieser Theorien schaffen wir einen Mathematikunterricht, der Studierende aktiv einbezieht, ihre kognitive Aktivierung fördert und ihnen hilft, Mathematik als sinnvolle und relevante Disziplin zu erleben.

3 Methoden

3.1 Projektbeschreibung: Erklärvideos als Hausaufgabenformat in der linearen Algebra

Im Rahmen des Projekts wurde ein Konzept zur Gestaltung von Hausübungen für Lehramtsstudierende entwickelt und im Lehrbetrieb implementiert. Anstelle der traditionellen schriftlichen Bearbeitung von Übungsaufgaben sah dieses Konzept vor, dass die Studierenden ihre Lösungen in Form von selbst erstellten Erklärvideos präsentierten.

Im Verlauf des Semesters erhielten die Studierenden insgesamt zehn Hausaufgaben. Die Aufgaben waren bewusst so konzipiert, dass sie sich inhaltlich stark ähnelten, jedoch in einzelnen Details leicht variierten.

Die Studierenden wurden aufgefordert, ihre Lösungswege zu den gestellten Hausaufgaben in Form von Videos aufzuzeichnen. Dabei wurde ihnen ein großer Spielraum hinsichtlich der Wahl ihrer Aufnahmemethode eingeräumt. Diese Flexibilität sollte den unterschiedlichen Präferenzen und technischen Kompetenzen der Studierenden Rechnung tragen.

Nach der Erstellung der Videos haben die Studierenden diese auf eine Lernplattform hochgeladen. Diese hochgeladenen Videos dienten im Anschluss als Grundlage für die individuelle Rückmeldung durch die Lehrperson. Die Studierenden erhielten zu ihren Videos detaillierte und konstruktive Rückmeldungen. Diese Rückmeldungen hatten zum Ziel, den Studierenden ein differenziertes Feedback zu ihrem Verständnis der mathematischen Inhalte, zur Klarheit und Verständlichkeit ihrer Erklärungen sowie zur fachlichen Korrektheit ihrer Lösungswege zu geben. Es wurde Wert darauf gelegt, den Studierenden nicht nur auf Fehler hinzuweisen, sondern auch positive Aspekte ihrer Arbeit hervorzuheben und ihnen Anregungen für weitere Verbesserungen zu geben.

Ein wesentlicher Aspekt des Projekts war, dass die erstellten Videos und die darauf erhaltenen Rückmeldungen nicht unmittelbar in die Benotung der Studierenden einfließen. Die abschließende Bewertung der Studierenden erfolgte ausschließlich auf der Basis einer traditionellen Klausur am Ende des Semesters.

3.2 Die Datenerhebung

Die neu konzipierte Übung zur Vorlesung Lineare Algebra fand im Wintersemester 2024/25 mit 12 Lehramtsstudierenden statt. Zur Untersuchung deren Erfahrungen mit Lernvideos wurde ein Mixed-Methods-Ansatz gewählt. Die quantitative Datenerhebung erfolgte durch eine Befragung der Studierenden zu Beginn und am Ende des Semesters mittels eines Fragebogens mit einer 6-stufigen Likert-Skala. Aufgrund der geringen Stichprobengröße beschränkt sich die quantitative Analyse auf deskriptive Statistik, insbesondere die Bestimmung von Median und Standardabweichung. Ergänzend wurden halbstrukturierte Interviews mit den Studierenden sowie mit dem Übungsleiter geführt. Diese Interviews wurden transkribiert und werden mittels kodierender Verfahren analysiert, um thematische Kategorien zu identifizieren. Die Kombination aus quantitativer Umfrage und qualitativen Interviews ermöglicht eine umfassende Betrachtung des Forschungsgegenstandes.

Die Studierenden wurden sowohl am Anfang (Abbildung 1 und 2) als auch am Ende (Abbildung 3) des Semesters anonym befragt. Einige Fragen am Anfang des Semesters bezogen sich auf ihre vorherigen Erfahrungen mit Lernvideos sowie mit der Erstellung von Videos. Über die Ergebnisse der Interviews kann hier nur ein erster Eindruck dargestellt werden.

4 Ergebnisse

In den folgenden Absätzen präsentieren wir erst die Ergebnisse der Umfragen am Semesteranfang und Semesterende. Anschließend werden diese Ergebnisse mit den Ergebnissen der Interviews verglichen und dann zusammengefasst.

4.1 Fragebögen

Die Mehrheit der Studierenden gab an, bereits Erfahrung mit der Erstellung von Videos zu haben (durchschnittlich 5,14 von 6), aber weniger hatten Erfahrung mit der Erstellung von Erklärvideos (durchschnittlich 2,29 von 6), siehe Abbildung 1. Die überwiegende Mehrheit hatte eine positive Einstellung zu Lernvideos.

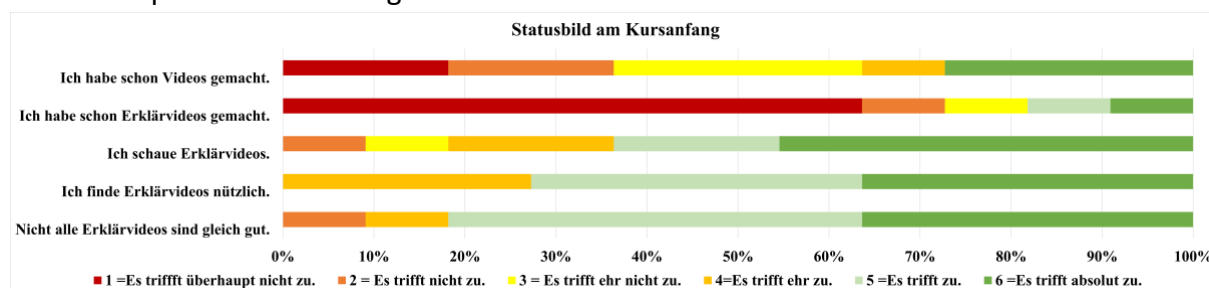


Abbildung 1: Erfahrung mit Lernvideos am Kursanfang.

Sie wurden auch zu ihren Erfahrungen mit den Aufgaben sowohl am Semesteranfang als auch am Semesterende befragt. Abbildung 2 zeigt die Ergebnisse am Semesteranfang.

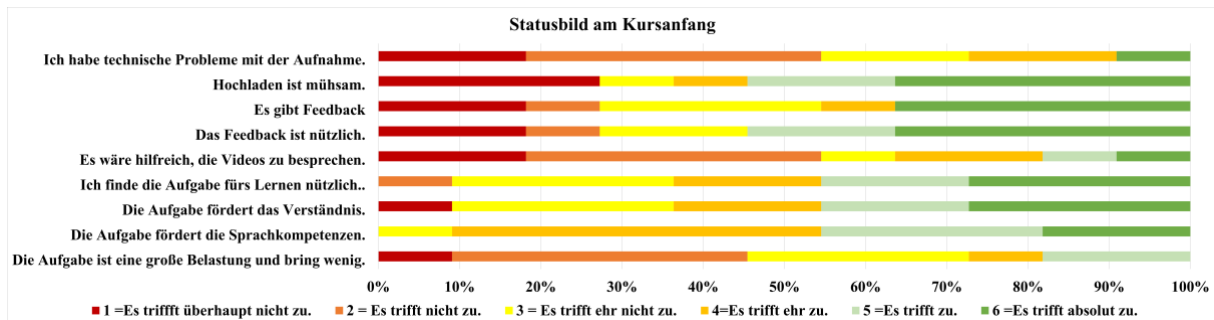


Abbildung 2: Erfahrung mit der Aufgabe am Kursanfang

Am Semesterende bekamen wir diese Antworten von den Studierenden (Abbildung 3):

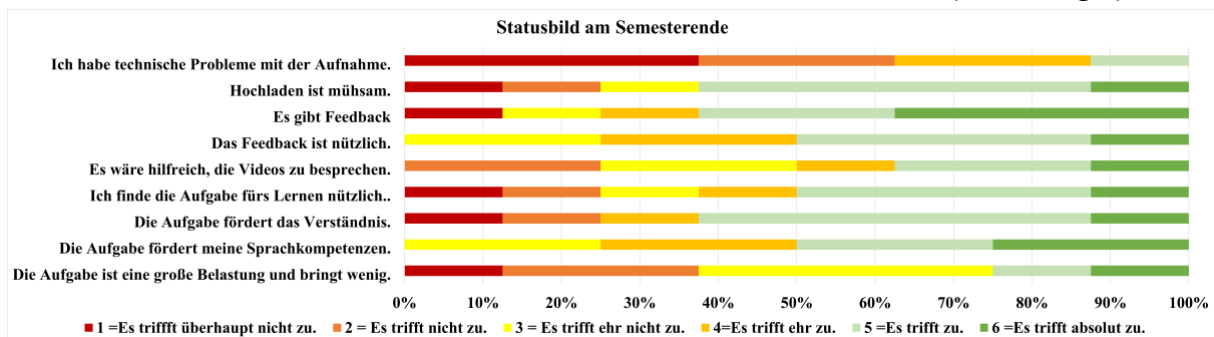


Abbildung 3: Erfahrung mit der Aufgabe am Kursende

Die Analyse der Fragebögen offenbart interessante Entwicklungen in den Einstellungen und Wahrnehmungen der Studierenden. Insgesamt lassen sich in einigen Bereichen positive Veränderungen feststellen, während andere Aspekte eine weniger positive Veränderung zeigen.

Betrachtet man zunächst die positiven Veränderungen, so fällt auf, dass die Studierenden am Ende des Semesters beim Erklären sicherer geworden sind und über eine gesteigerte Sicherheit im Umgang mit der Videoerstellung berichten. Dies deutet darauf hin, dass die Studierenden die Lerninhalte besser verstanden, ihre Ausdrucksfähigkeit sich verbesserte und sie selbstsicherer wurden. Die Intervention förderte ihre technischen Fertigkeiten und stärkte ihr Selbstvertrauen im Umgang mit der Technologie. Des Weiteren scheinen die Studierenden im Laufe des Semesters eine differenziertere Sichtweise auf die Qualität von Erklärvideos entwickelt zu haben. Sie äußern am Ende des Semesters eine stärkere Wahrnehmung, dass nicht alle Erklärvideos gleichwertig sind, was auf eine Zunahme ihrer Medienkompetenz und eine kritischere Auseinandersetzung mit diesem Medium hindeuten könnte. Auch im Hinblick auf den Umgang mit technischen Herausforderungen während der Videoaufnahme berichten die Studierenden am Ende des Semesters von weniger Problemen.

Die Wahrnehmung des Feedbacks zu den erstellten Videos fällt am Ende des Semesters ebenfalls positiver aus. Die Studierenden äußern eine gesteigerte Wahrnehmung, dass sie ein Feedback zu ihren Videos erhalten, was auf eine verbesserte Kommunikation und einen intensiveren Austausch zwischen Studierenden und Lehrenden hindeuten könnte. Schließlich

erkennen die Studierenden am Ende des Semesters einen größeren Nutzen in der Besprechung von Videos, um von gelungenen Beispielen oder auch von Fehlern zu lernen. Dies könnte auf eine gesteigerte Fähigkeit zur Reflexion und ein ausgeprägteres Interesse an konstruktivem Feedback hinweisen.

Besonders relevant erscheint folgendes Ergebnis (Tabelle 1), wo man in beiden Punkten eine Verbesserung sehen kann.

	Kursanfang		Semesterende	
	Median	σ	Median	σ
Ich finde die Aufgabe nützlich (6).	4	1,72	5	0,71
Ich mache die Aufgabe gern (5).	3	1,34	3,5	0,71

Tabelle 1: Allgemeiner Eindruck der Studierende vor und nach dem Kurs.

Die allgemeine Bewertung des Aufgabenformats zeigt eine Steigerung um 1 bei dem Median, wobei 5 bei einer 6-Punkt Likert-Skala ein sehr hoher Wert ist. Weiters ist die Streuung gesunken, was drauf hinweist, dass die Gruppe homogener, selbstsicherer und mit dem neuen Format vertraut geworden ist. Die Studierenden haben die Nützlichkeit der Aufgabe erlebt, was ihre Einstellung positiv beeinflusst hat. Diese Ergebnisse spiegeln sich auch in den Interviews wider.

4.2 Interviews

Am Semesterende wurden zwei Studierenden und der Dozierende, der die Übung gehalten hat, interviewt.

Über die Länge und Detailliertheit der Videos wurde folgendes berichtet, interessant dabei, wie die zwei Sichtweisen sich unterscheiden:

S1: Man darf nicht längere Videos machen, so kann man aber nur etwas schnell vorrechnen und nicht die Strukturen erklären, was Sinn der Aufgabe wäre.

D: Manche Videos waren zu lang, zu viele Wiederholungen und Füllwörter. Es war nicht klar, was sie erklären müssen, was sie voraussetzen dürfen.

Diese Zitate verdeutlichen ein Spannungsverhältnis zwischen der Praktikabilität (kurze Videos sind leichter zu handhaben und zu bewerten) und dem pädagogischen Ziel (tiefes Verständnis fördern). Es ist ein wichtiger Hinweis darauf, dass die Rahmenbedingungen der Aufgabe (hier: die Videolänge) einen wesentlichen Einfluss auf die Art der Auseinandersetzung der Studierenden mit dem Stoff haben kann. Das Zitat der Dozierenden ergänzt die Perspektive von S1. Während S1 eine zu starke Begrenzung der Länge kritisiert, sieht der Dozierende das Problem in zu langen Videos, wie z.B. überflüssige Wiederholungen und Füllwörter, oder ein langes Video deutet drauf hin, dass die Studierenden das Wichtige und das Unwichtige nicht auseinanderhalten können.

Über die Vorbereitung und Arbeitsaufwand berichteten Studierende und Dozent ebenfalls unterschiedlich.

S2: Ich bin ein Perfektionist und habe manche Videos 15-mal aufgenommen.

D: Viele haben, ohne vorher die Aufgabe zu lösen, spontan gerechnet.

Hier sehen wir, wie unterschiedlich manche Studierenden die Aufgabe vorbereitet haben. Während S2 von einem hohen Perfektionsanspruch und dem damit verbundenen hohen Arbeitsaufwand durch mehrfache Aufnahmen berichtet, kritisiert der Dozierende, dass viele Studierende die Aufgabe nicht im Vorfeld gründlich bearbeitet haben, sondern spontan und unvorbereitet mit der Videoaufnahme begonnen haben.

Bezüglich Vorteile sind die Schwerpunkte bei Studierenden und Dozent unterschiedlich. Die Studierenden heben das Verstehen heraus, der Dozent die Hemmung vor den anderen zu reden und die Selbstsicherheit:

S1, S2, D: Man muss sich überlegen, was man sagt.

S1, S2: Man musste die Aufgaben wirklich verstehen. Die, die abschreiben, müssen die Aufgabe trotzdem selbst erklären.

D: Studierende, die sich nicht an die Tafel trauen, kommen mit den Videos besser klar und gewinnen Erfahrung und fassen Mut vielleicht.

Alle Interviewteilnehmer heben einen der zentralen positiven Aspekte der Videoerstellung hervor, nämlich dass die Studierenden ihre Gedanken klar strukturieren und präzise formulieren müssen, was zu einer tieferen Auseinandersetzung mit dem Stoff und einer Förderung der Sprachkompetenz beiträgt. Die Studierenden bestätigen, dass die Videoerstellung dazu beiträgt, ein tieferes Verständnis des Stoffes zu fördern, da oberflächliches Wissen nicht ausreicht, um eine verständliche Erklärung zu erstellen. Der Dozierende hebt die Möglichkeit der Videoerstellung hervor, eine niedrighschwellige Alternative zu traditionellen Präsentationsformen zu bieten, und kann insbesondere für schüchterne oder ängstliche Studierende eine Chance sein, sich aktiv mit dem Stoff auseinanderzusetzen und ihre Kompetenzen zu entwickeln.

Verbesserungsvorschläge der zwei Interessengruppen unterscheiden sich ebenso wie die vorigen Punkte. Für die Studierende war Technologie eine Herausforderung, der Dozierende findet Zeit und Videolänge problematisch:

S2: Vielleicht eine Einführung, wie man die technischen Probleme lösen kann.

D: Klare Regeln gleich am Anfang: Länge, was darf man voraussetzen. Manche Aufgaben waren zu leicht.

Diese Vorschläge sind praxisorientiert und sinnvoll, da technische Schwierigkeiten für Studierende eine große Hürde darstellen und den Lernprozess beeinträchtigen können, weshalb eine gezielte Unterstützung in diesem Bereich dazu beitragen kann, Frustrationen zu vermeiden und die Qualität der Videos zu verbessern. Dieses Zitat fasst mehrere wichtige Aspekte zusammen: Klare Regeln sind essenziell für eine gelingende Umsetzung der Aufgabe, da sie Klarheit und Orientierung für die Studierenden schaffen, und die Rückmeldung, dass manche Aufgaben zu leicht waren, ist ein wichtiger Hinweis für die Weiterentwicklung des Konzepts, da der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben so gewählt werden sollte, dass er die Studierenden herausfordert, aber nicht überfordert.

4.3 Synthese

Die Erklärvideos dienten in erster Linie als Lernwerkzeug und zur Förderung des Verständnisses und der prozessbezogenen Kompetenzen der Studierenden. Durch die Verlagerung des Fokus von der reinen Bewertung auf den Lernprozess wurde der Leistungsdruck von den Studierenden genommen und eine offene und experimentierfreudige Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten ermöglicht.

Mit diesem Projekt wurden mehrere zentrale Ziele verfolgt. Ein Hauptziel war die Stärkung des mathematischen Selbstbildes der Studierenden, sie wurden sicherer und selbstbewusster. Ein anderes wichtiges Ziel war die Förderung des Verständnisses der mathematischen Inhalte. Die Erstellung von Erklärvideos aktiviert die Studierenden kognitiv und regt sie dazu an, sich intensiv mit den Lerninhalten auseinanderzusetzen, ihr Verständnis zu vertiefen und die mathematischen Zusammenhänge aktiv zu durchdringen.

Weiteres Ziel war die Entwicklung von prozessbezogenen Kompetenzen. Neben dem fachlichen Verständnis wurden auch Fähigkeiten wie das klare und verständliche Erklären mathematischer Sachverhalte, das logische und nachvollziehbare Argumentieren sowie die effektive Kommunikation mathematischer Ideen gefördert. Schließlich ermöglichten die individuellen Rückmeldungen zu den Videos eine intensive Betreuung jedes einzelnen Studierenden, ohne dass die Hemmschwelle des „Vorrechnens vor der Klasse“ überwunden werden musste. Durch die Möglichkeit, den Studierenden ein persönliches und differenziertes Feedback zu geben, konnte auf ihre individuellen Bedürfnisse und Lernstände eingegangen werden.

Die Umfragen und die Interviews zeigen, dass sowohl die Studierenden als auch der Dozent den Lerneffekt der Erklärvideos als positiv erlebten und empfanden. Sie wiesen aber noch auf technische und praktische Probleme hin.

Durch die leichte Abwandlung der Aufgabenstellungen sollten die Studierenden dazu motiviert werden, nicht nur oberflächlich Lösungswege zu reproduzieren, sondern ein tieferes Verständnis der mathematischen Zusammenhänge zu entwickeln.

Die meisten Studierenden haben sich dafür entschieden, ihre Smartphones für die Videoaufnahmen zu nutzen. Andere wiederum arbeiteten direkt auf ihren Tablets und zeichneten den Lösungsprozess auf dem Bildschirm auf. Ein einzelner Student wählte einen anderen Ansatz und filmte sich vor einer Tafel, während er den Lösungsweg erläuterte. Diese Vielfalt an Herangehensweisen bei der Videoerstellung verdeutlichte die Heterogenität der Studiengruppe und die unterschiedlichen Arten, wie sie sich mit den mathematischen Inhalten und Medien auseinandersetzten.

Neben diesen positiven Entwicklungen gibt es jedoch auch Bereiche, die Möglichkeiten zur Weiterentwicklung aufzeigen.

5 Diskussion und Ausblick

Die vorliegende Arbeit hat ein neues Konzept zur Gestaltung von Hausübungen in der linearen Algebra präsentiert und dessen Umsetzung sowie erste Ergebnisse aus der Begleitforschung beleuchtet. Durch die Integration von Erklärvideos, die von den Studierenden selbst erstellt wurden, wurde ein konstruktivistischer Ansatz verfolgt, der darauf abzielt, die Studierenden aktiv in den Lernprozess einzubinden und ihre mathematischen Kompetenzen auf vielfältige Weise zu fördern.

Die Ergebnisse der Befragungen und Interviews mit den Studierenden deuten darauf hin, dass dieser Ansatz in einigen Bereichen positive Effekte erzielt hat. Insbesondere das Selbstvertrauen der Studierenden im Umgang mit fachlichen Themen sowie die technische Kompetenz bei der Videoerstellung konnten gesteigert werden. Thurm und Barzel (2020) berichteten über den positiven Effekt des Ausprobierens und Übens auf das Selbstbild der Studierenden, unsere Studie brachte ähnliche Ergebnisse. In einem Schulprojekt (Békési et al., 2023) wurde über den motivierenden Effekt der Videokreation in Sekundarschulkontext berichtet. Die Autoren fanden, dass diese erhöhte Motivation das Lernen und Verständnis der Lernenden positiv beeinflusst und bessere Lernerfolge gebracht hat. Unsere Ergebnisse im Hochschulkontext stimmen damit überein.

Der kognitiv aktivierende Effekt des Erklärens wird in der Literatur oft bezeugt sowohl im schulischen Kontext (Fauth, B., & Leuders, T., 2018; Leuders, 2015; Leuders, T., & Holzäpfel, L., 2011) als auch im hochschulischen. Unsere Studie, insbesondere die Interviews, zeigt deutlich, dass sowohl die Studierenden als auch der Dozierende die kognitive Aktivierung erlebt haben und als besonders wertvoll im Lernprozess einordnen.

Auch die Medienkompetenz der Studierenden scheint sich durch die kritischere Auseinandersetzung mit Erklärvideos weiterentwickelt zu haben. Des Weiteren wurde eine Verbesserung in der Wahrnehmung des Feedbacks und des Austauschs mit den Lehrenden festgestellt.

Insgesamt zeigt sich, dass die Integration von Erklärvideos als Hausaufgabenformat ein vielversprechender Ansatz ist, der jedoch noch Optimierungsbedarf insbesondere im organisatorischen Bereich aufweist, um sein volles Potenzial auszuschöpfen.

Mögliche weitere Untersuchungen könnten sich auf Langzeitstudien konzentrieren, um die nachhaltige Wirkung der Intervention zu untersuchen und die Entwicklung der Studierenden über einen längeren Zeitraum zu begleiten. Ebenso sind Vergleichsstudien mit Kontrollgruppen notwendig, um die Effektivität des Ansatzes im Vergleich zu anderen Lehrmethoden umfassend zu evaluieren. Um die tieferliegenden Ursachen für die beobachteten Veränderungen im Interesse und der wahrgenommenen Nützlichkeit von Erklärvideos zu ergründen, sind qualitative Studien mit Studierenden und Lehrenden von Bedeutung. Darüber hinaus wäre es aufschlussreich, Faktoren zu untersuchen, die die Qualität der erstellten Erklärvideos beeinflussen, und wie diese Qualität mit dem Lernerfolg der Studierenden zusammenhängt.

Mögliche weitere Projekte könnten die Entwicklung von Richtlinien und Schulungen umfassen, um die Qualität der erstellten Erklärvideos zu verbessern und Studierende gezielt in der Videoerstellung zu unterstützen. Des Weiteren könnte dieses Konzept der Hausübungen auch in anderen Fachbereichen der Hochschullehre erprobt und evaluiert werden, um seine Anwendbarkeit und Wirksamkeit in verschiedenen Kontexten zu prüfen.

Die vorliegende Arbeit hat gezeigt, dass die Integration von Erklärvideos in die Hochschullehre ein innovatives und vielversprechendes Potenzial birgt. Durch weitere Forschung und Entwicklung kann dieser Ansatz weiter optimiert werden, um die Lernprozesse der Studierenden noch effektiver zu unterstützen, sie bestmöglich auf die Anforderungen der digitalen Welt vorzubereiten und ihr Selbstbewusstsein und Selbstsicherheit zu erhöhen.

Literatur

- Bauersfeld, H. (1998). Neurowissenschaft und Fachdidaktik–diskutiert am Beispiel Mathematik. *Mathematica didactica*, 21, 3–25.
- Békési, B. (2022). Digitalisierung durch Schüler* innenaugen: kollaborative kreative Aufgaben mit iPads. *F&E PH Vorarlberg*, 28, 30–34. https://www.ph-vorarlberg.ac.at/fileadmin/user_upload/red_soz/pdfs/f_e_28/fe28_04.pdf
- Békési, B., Ulbrich, E., Houghton, T. & Lavicza, Z. (2023). Student-made videos in the spotlight: How to raise interest with a learning video? In P. Drijver, C. Csapodi, K. H. Palmér, Gosztonyi & E. Kónya (Hrsg.), *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*. (S. 2883–2884). Alfréd Rényi Institute of Mathematics; ERME. <https://hal.science/hal-04403325/>
- Fauth, B., & Leuders, T. (2018). *Kognitive Aktivierung im Unterricht*. https://www.kts-buchen.de/assets/downloads/wirksamer%20unterricht%20-%20band%202_kognitive%20aktivierung.pdf
- Harel, I. (Hrsg.). (1993). *Constructionism: Research reports and essays, 1985-1990* (2. print). Ablex Publ. Corp.
- Hattie, J. (2010). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement* (Reprinted.). Routledge.
- Hattie, J. (2023). *Visible Learning: The Sequel: A synthesis of over 2,100 meta-analyses relating to achievement* (First edition). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003380542>

- Hörnlein, M. (2025). Physik lernen durch Erklären? Evaluation eines Seminarkonzepts für Sachunterrichtsstudierende. *die hochschullehre*, 11.
<https://doi.org/10.3278/HSL2462W>
- Kolb, D. A. (1984). *Experimental learning: Experience as the source of learning and development*. Prentice-Hall.
- Kristinsdóttir, B. (2022). Opportunities and Challenges That Silent Video Tasks Bring to the Mathematics Classroom. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Hrsg.), *Mathematics Education in the Digital Era: Bd. 16. The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Bd. 16, S. 119–148). Springer International Publishing.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-05254-5_5
- Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (2013). *Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers*. Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5149-5>
- Leuders, T. (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 435–460). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_16
- Leuders, T., & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft*, 39, 213–230.
- Löppenberg, K. (2021). *Lernen durch Erklären in einer experimentellen Lernsituation im Fach Biologie*. Dissertation.
- Papert, S. (2000). *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas* (2. ed., 5. print). Perseus Books.
- Piaget, J. (1996). *Das Erwachen der Intelligenz beim Kinde* (B. Seiler, Übers.) (4. Aufl.). *Gesammelte Werke / Jean Piaget: Bd. 1*. Klett-Cotta.
- Reich, K. (2012). *Konstruktivistische Didaktik: Das Lehr- und Studienbuch mit Online-Methodenpool* (5. Auflage). *Pädagogik und Konstruktivismus*. Beltz Verlag.
- Ryan, R. M. & Deci, E. L. (2017). *Self-Determination Theory: Basic Psychological Needs in Motivation, Development, and Wellness*. Guilford Press.
<https://doi.org/10.1521/978.14625/28806>
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1–38.
<https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Thurm, D. & Barzel, B. (2020). Effects of a professional development program for teaching mathematics with technology on teachers' beliefs, self-efficacy and practices. *ZDM*, 52(7), 1411–1422. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01158-6>
- Winter, H. W. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-10605-8>

Maßbeziehungen in der Volksschule

Studierende entwickeln Lehr-Lern-Videos

Martina Greiler¹, Tanja Lobnig²

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1428>

Zusammenfassung

Das Umwandeln von Maßeinheiten stellt eine Herausforderung im Mathematikunterricht der Volksschule dar. Der Aufbau von Vorstellungen über die Beziehungen zwischen Maßeinheiten ist eine wesentliche Voraussetzung für ein verstehensorientiertes Umwandeln. Im Rahmen eines Projekts an der Pädagogischen Hochschule Kärnten entwickelten Masterstudierende des Lehramts Primarstufe Lehr-Lern-Videos zu verschiedenen Maßbeziehungen. Diese orientieren sich am österreichischen Lehrplan und greifen wesentliche fachdidaktische Konzepte auf – darunter das Verfeinern und Vergrößern von Maßeinheiten, das Messen sowie den Aufbau von Stützpunktvorstellungen. Darüber hinaus wird verdeutlicht, dass beim Messen eines Objektes von einer kleineren Einheit mehr und von einer größeren Einheit weniger benötigt wird. Ergänzt werden die Videos durch passende Arbeitsaufträge und didaktische Hinweise für den Unterricht. Der Beitrag beschreibt die theoretischen Grundlagen und den Ablauf des Projekts. Eine fachdidaktische Analyse ausgewählter Videobeispiele zeigt, wie die Studierenden diese Konzepte in ihren Videos lernförderlich umgesetzt haben.

Stichwörter: Lehr-Lern-Videos im Mathematikunterricht der Volksschule, Beziehungen zwischen Maßeinheiten, Voraussetzungen für das Umwandeln von Größen

1 Einleitung

Größen stellen im Mathematikunterricht der Volksschule einen zentralen, aber auch anspruchsvollen Inhaltsbereich dar. Besonders das Umwandeln von Größen zählt zu den größten Herausforderungen der Volksschulmathematik (Lassnitzer & Gaidoschik, 2019). Eine wesentliche Voraussetzung für ein verständnisorientiertes Umwandeln ist dabei das Kennen der Zusammenhänge zwischen den einzelnen Maßeinheiten.

¹ Pädagogische Hochschule Kärnten, Viktor Frankl Hochschule, 9020 Klagenfurt am Wörthersee
E-Mail: martina.greiler@ph-kaernten.ac.at

² Pädagogische Hochschule Kärnten, Viktor Frankl Hochschule, 9020 Klagenfurt am Wörthersee
E-Mail: tanja.lobnig@ph-kaernten.ac.at

Digitale Lernformate wie Lehr-Lern-Videos können in diesem Zusammenhang eine wertvolle Ergänzung zum handlungsorientierten Lernen darstellen. Zwar bleibt das eigene aktive Handeln unersetzlich, aber gut gestaltete Videos können zentrale Konzepte und Vorgehensweisen anschaulich aufbereiten oder strukturierend begleiten. Insbesondere sogenannte „Mach mal“-Videos (Hoffart & Schneider, 2022), die die Lernenden zum aktiven Mitdenken und Mitmachen anregen, zeigen Potenzial, Verstehensprozesse anzustoßen.

Im Rahmen eines Projektes an der Pädagogischen Hochschule Kärnten entwickelten Masterstudierende des Lehramts Primarstufe Lehr-Lern-Videos zu verschiedenen Maßbeziehungen. Diese berücksichtigen fachdidaktische Empfehlungen und orientieren sich an den Vorgaben des österreichischen Lehrplans. Ziel ist es, ein niederschwelliges, aber qualitativ hochwertiges Lernangebot für den Unterricht zu schaffen, das über multimediale Kanäle wie YouTube auch anderen Lehrpersonen zur Verfügung steht. Die Videos werden durch entsprechende Arbeitsaufträge und didaktische Hinweise für den gezielten Einsatz im Mathematikunterricht ergänzt.

Der Beitrag beleuchtet zunächst die theoretischen Grundlagen von Lehr-Lern-Videos und die Voraussetzungen für ein verstehensorientiertes Umwandeln von Größen. Anschließend wird das Projekt von der Konzeption bis zur Erprobung der Videos beschrieben. Abschließend erfolgt eine fachdidaktische Analyse ausgewählter Videoinhalte, in der exemplarisch aufgezeigt wird, wie wesentliche Konzepte wie zum Beispiel Stützpunktvorstellungen, Messen und Verfeinern und Vergrößern von Maßeinheiten in den Videos umgesetzt wurden.

2 Typisierung von Lehr-Lern-Videos für den Mathematikunterricht

Die Nutzung von Lehr-Lern-Videos im Mathematikunterricht war bereits vor der COVID-19-Pandemie ein Thema der Mathematikdidaktik, gewann jedoch insbesondere während und nach der Pandemie an Bedeutung (Bersch et al., 2020). In diesem Kontext rückte die Frage nach einer didaktisch sinnvollen Einbindung dieser Videos in den Unterricht zunehmend in den Fokus.

Hoffart und Schneider (2022) definieren Lehr-Lern-Videos als digitale Lernformate, in denen „zentrale (mathematische) Inhalte multimedial und unter besonderer Berücksichtigung auditiver und visueller Komponenten aufbereitet [werden], um (mathematische) Lehr-Lern-Prozesse gezielt zu unterstützen“. Aus mathematikdidaktischer Perspektive bieten Lehr-Lern-Videos demnach Vorteile, die sowohl die kognitiven als auch die affektiven Dimensionen des Mathematiklernens betreffen.

Lehr-Lern-Videos lassen sich nicht als einheitliches Medium begreifen, sondern verfolgen je nach didaktischer Intention und Einsatzszenario unterschiedliche Ziele. Schöttler (2021) unterscheidet dabei vier wesentliche Einsatzbereiche: Vorbereitung bzw. Einführung, Erarbeitung, Sicherung und Wiederholung/Nachbereitung. Je nach Zielsetzung des Einsatzes differenziert er zudem zwischen zwei grundlegenden Formen von Videos: Videos, die primär auf eine

passive Rezeption der Inhalte abzielen und durch Vormachen und Vorrechnen gekennzeichnet sind, und Entdeckervideos, die ein aktiv-entdeckendes und kooperativ-kommunikatives Lernen im Mathematikunterricht unterstützen (Römer & Nührenbörger, 2018).

Eine ähnliche Klassifikation nehmen Hoffart und Schneider (2022) vor. Sie ordnen Lehr-Lern-Videos in mathematikdidaktischen Kontexten ebenfalls nach der Intention, die zum Einsatz eines Videos führt, ein und unterscheiden dabei vier grundlegende Typen:

- Typ 1: Aufbereitung mathematischer Inhalte – „Man macht das so“
Diese Lehr-Lern-Videos bereiten mathematische Inhalte für Schüler*innen in Form von Regeln, Algorithmen oder Verfahren auf und stellen dabei fachwissenschaftliche sowie fachdidaktische Grundlagen in den Mittelpunkt.
- Typ 2: Aufbereitung von Bearbeitungswegen und Lösungszugängen – „Du kannst das so machen“
Hier werden konkrete Aufgabenstellungen präsentiert und mögliche Lösungswege aufgezeigt, um den Schüler*innen verschiedene Bearbeitungsmöglichkeiten zu verdeutlichen.
- Typ 3: Aufbereitung mathematischer Inhalte mit Impulsen zur Aktion – „Mach mal“
Diese Videos fördern eine aktive Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen und regen Lernende zur eigenen Exploration und Bearbeitung an.
- Typ 4: Schüler*innen erstellen eigene Lehr-Lern-Videos – „Zeig mal“
In diesem Typ stehen die Schüler*innen selbst im Zentrum der Videoproduktion, wodurch nicht nur fachliche, sondern auch sprachliche und metakognitive Kompetenzen gefördert werden.

Darüber hinaus können Lehr-Lern-Videos verschiedene mathematikdidaktische Prinzipien und Leitideen aufgreifen, wie z. B. entdeckendes Lernen, produktives Üben, problemlösender Unterricht, das genetische Prinzip oder das operative Prinzip. Daraus ergibt sich eine weitere Differenzierung der Lehr-Lern-Videos. Diese Typologie zeigt eine Bandbreite didaktischer Funktionen von Lehr-Lern-Videos auf, die in der schulischen Praxis bislang noch nicht systematisch genutzt werden (Hoffart & Schneider, 2022).

3 Größen in der Volksschule

Der Inhaltsbereich Größen zählt zu den anspruchsvollsten Themen der Mathematik in der Volksschule (Nührenbörger, 2002). Im österreichischen Lehrplan für Volksschulen stellen sie einen der vier inhaltlichen mathematischen Kompetenzbereiche dar. Diese umfassen die Größenbereiche Längen, Gewichte, Flächeninhalte, Rauminhalte, Zeit(spannen) und Geld(werte) (Franke & Ruwisch, 2010). Zu den Größenbereichen werden laut österreichischem Lehrplan folgende Maßeinheiten in den jeweiligen Schulstufen eingeführt:

Größenbereich	1. Schulstufe	2. Schulstufe	3. Schulstufe	4. Schulstufe
Längen	m	dm, cm	mm, km	
Gewichte	kg	dag	g, t	
Rauminhalte	l		ml	
Zeit(spannen)	h	min, s		
Geld(werte)	€, c			
Flächeninhalte				mm ² , cm ² , dm ² , m ² , a, ha, km ²

Tabelle 1: Einführung Maßeinheiten nach Schulstufen

Größen sind „objektiv messbare Eigenschaften von Objekten oder Vorgängen und die Ergebnisse von Messprozessen“ (Baireuther, 1999, S. 94). Sie sind in der Regel sinnlich erfahrbar, sofern sie in einem für den Menschen erfahrbaren Bereich liegen. Während Längen, Flächen- und Rauminhalte visuell erfasst werden können, ist das Gewicht von Objekten taktil wahrnehmbar (Reuter & Schuler, 2023). Zeitdauern lassen sich beispielsweise über Bewegung erschließen (Reuter & Schuler, 2023).

Der österreichische Lehrplan legt bei der Behandlung dieses Themas besonderen Wert auf den handelnden Umgang mit konkreten Objekten. Insbesondere das Vergleichen und Messen von Größen wird hervorgehoben. Das Messergebnis wird als Maßzahl mit der entsprechenden Maßeinheit notiert. Ein wesentliches Ziel ist der Aufbau von Stützpunktvorstellungen zu genormten Maßeinheiten. Bereits ab der ersten Schulstufe sollen Kinder grundlegende Vorstellungen zu standardisierten Einheiten entwickeln. Ab der zweiten Schulstufe rückt zusätzlich das Erarbeiten von Beziehungen zwischen Maßeinheiten in den Fokus. (BMBWF, 2023)

4 Beziehungen zwischen Maßeinheiten

Laut Lehrplan werden „unvermeidbare Überschreitungen beim Rechnen [...] mithilfe von Umwandlungen gelöst.“ Das Umwandeln von Maßeinheiten stellt sowohl für Schüler*innen als auch für Studierende eine nicht zu unterschätzende Hürde dar (z.B. Lassnitzer & Gaidoschik, 2019; Peter-Koop & Nührenbörger, 2011). Da das Umwandeln jedoch eine zentrale Grundlage für das Lösen vieler Sach- und Anwendungsaufgaben in den MINT-Fächern bildet, ist es unerlässlich, bereits Volksschulkindern geeignete Möglichkeiten zur Entwicklung dieser Kompetenzen zu bieten.

Das Verständnis für Umwandlungsaufgaben setzt voraus, dass Kinder die Beziehungen zwischen den Maßeinheiten kennen. In der ersten Schulstufe wird in den meisten Größenbereichen zunächst nur eine Maßeinheit eingeführt. In der zweiten Schulstufe kommt eine weitere hinzu, wodurch erste Zusammenhänge zwischen den Einheiten hergestellt werden.

Die Einführung weiterer Maßeinheiten kann dabei durch das *Verfeinern* oder das *Vergrößern* einer bereits bekannten Einheit erfolgen (Franke & Ruwisch, 2010). Beispielsweise kann ein Papierstreifen von einem Meter Länge in Dezimeter und Zentimeter unterteilt werden (Franke & Ruwisch, 2010). Diese „systematische Untergliederung der Maßeinheit“ (Reuter & Schuler, 2023, S. 18) kann als motivierende Ausgangssituation dienen: Kinder erfahren beispielsweise, dass ein Bleistift nicht sinnvoll mit einem Metermaß (ohne Unterteilungen) abgemessen werden kann. So kann die Notwendigkeit von feineren Maßeinheiten verdeutlicht werden.

Mit Ausnahme der Zeit(spannen) sind alle Größenbereiche metrisch aufgebaut. Lassnitzer und Gaidoschik (2019) identifizieren neben dem Verständnis der Systematik des dezimalen Stellenwertsystems und der Systematik des dezimalen Maßeinheitensystems mehrere mathematische Voraussetzungen, die für das erfolgreiche Umwandeln von Maßeinheiten in *metrisch* aufgebauten Größenbereichen notwendig sind:

- Stützpunktvorstellungen: Stützpunktvorstellungen bauen auf Stützpunktwissen auf. Stützpunktwissen ist theoretisch auswendig gelerntes Wissen, z. B., dass eine Zuckerpackung 1 kg wiegt. Beim Stützpunktwissen handelt es sich um „mental gespeicherte Repräsentanten, bei denen das Stützpunktwissen durch die zusätzlich gespeicherte Größeneigenschaft erweitert wird“. (Reuter & Schuler, 2023, S 21)
- „Messen als immer wieder eine Einheit nehmen“ (Lassnitzer & Gaidoschik, 2019): Bei jedem Messvorgang ist die Wahl einer geeigneten Maßeinheit erforderlich, die idealerweise kleiner ist als das zu messende Objekt. Die Messung (bei geometrischen Größenbereichen) erfolgt durch wiederholtes Anlegen der Maßeinheit und gleichzeitiges Zählen der Wiederholungen. Dabei ist es essenziell, präzise vorzugehen, sodass die Einheit lückenlos und ohne Überlappungen angelegt wird. Zudem muss der Startpunkt der Messung deutlich gekennzeichnet sein, um eine korrekte Bestimmung der Größe zu gewährleisten. (Reuter & Schuler, 2023)
- „Vom kleineren mehr, vom größeren weniger“ (Lassnitzer & Gaidoschik, 2019): Das Umwandeln von Maßeinheiten basiert auf der zentralen Überlegung, wie viele Einheiten benötigt werden, um ein Objekt zu messen, welches bereits mit einer anderen Einheit bestimmt wurde. Wird beispielsweise eine Strecke einmal mit einer größeren und einmal mit einer kleineren Einheit gemessen, benötigt man von der kleineren Einheit entsprechend mehr und von der größeren weniger.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das erfolgreiche Umwandeln von Maßeinheiten mehrere mathematische Voraussetzungen erfordert. Dazu zählt ein fundiertes Verständnis für den Aufbau des dezimalen Stellenwert- und Maßeinheitensystems. Weitere wichtige Grundlagen sind das Kennen der Maßbeziehungen, der Aufbau von Stützpunktvorstellungen, das Prinzip des Messens durch wiederholtes Verwenden einer Einheit und die Erkenntnis, dass beim Messen eines Objektes für kleinere Maßeinheiten eine größere Anzahl von Maßeinheiten benötigt wird als für größere.

5 Das Projekt: Mathematik begreifen mit Lehr-Lern-Videos

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die didaktischen Potenziale von Lehr-Lern-Videos, zentrale Aspekte des Größenlernens in der Volksschule sowie die besonderen Voraussetzungen und Herausforderungen bei der Umwandlung von Maßeinheiten herausgearbeitet. Darauf aufbauend wird im folgenden Kapitel ein Projekt vorgestellt, das genau an diesen Punkten ansetzt.

Konkret werden im Projekt *Mathematik beGreifen mit Lehr-Lern-Videos* Masterstudierende des Lehramts für die Primarstufe dazu angeleitet, Lehr-Lern-Videos für den Einsatz im Mathematikunterricht der Volksschule zu konzipieren, zu produzieren und in der Praxis zu erproben. Dabei setzen sie sich intensiv mit fachlichen und fachdidaktischen Grundlagen auseinander, um die inhaltliche Qualität der Lehr-Lern-Videos sicherzustellen.

Das vorliegende Projekt konzentriert sich auf Lehr-Lern-Videos des Typs 3 „Mach mal“ nach Hoffart und Schneider (2022), deren Ziel es ist, die Lernenden aktiv in mathematische Denkprozesse einzubinden und eine vertiefte Auseinandersetzung mit den Inhalten anzuregen. Ergänzend werden auf die Videoinhalte abgestimmte Lernaufgaben bereitgestellt, die eine weiterführende inhaltliche Auseinandersetzung ermöglichen – ein Qualitätskriterium, das auch Kulgemeyer (2020) betont.

Darüber hinaus sollen – in Anlehnung an die Mahiko-Kids-Lernvideos des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik – weiterführende didaktische Hinweise für Lehrpersonen bereitgestellt werden, um eine fundierte und zielgerichtete Integration der Videos in den Mathematikunterricht zu unterstützen (Deutsches Zentrum Lehrerbildung Mathematik, 2020).

Die Studierenden erhielten die Aufgabe, zwei aufeinander aufbauende Lehr-Lern-Videos zu erstellen, die die Herleitung einer Maßeinheit aus einer bereits bekannten Maßeinheit verständnisorientiert vermitteln und die Entwicklung von Vorstellungen über die Beziehungen zwischen Maßeinheiten fördern sollen.

- Video 1: Schwerpunkt auf dem Konzept des Verfeinerns und Vergrößerns (Franke & Ruwisch, 2010) sowie dem Aufbau von Stützpunktvorstellungen (Reuter & Schuler, 2023).
- Video 2: Thematisierung des Prinzips *von der kleineren Einheit mehr, von der größeren Einheit weniger* sowie das Messen als wiederholte Anwendung einer Maßeinheit. (Lassnitzer & Gaidoschik, 2019)

Ein wesentliches Ziel des Projekts ist es zudem, über die Ausbildung hinaus einen nachhaltigen Beitrag für die Unterrichtspraxis zu leisten. Die von den Studierenden entwickelten Videos sollen daher nicht nur im Rahmen der Lehrveranstaltung eingesetzt werden, sondern auch anderen Lehrpersonen über YouTube zur Verfügung gestellt werden. Damit leistet das Projekt nicht nur einen Beitrag zur Professionalisierung angehender Lehrpersonen, sondern auch zur Weiterentwicklung eines alltagstauglichen und zugleich fundierten Einsatzes von Lehr-Lern-Videos im Mathematikunterricht der Volksschule.

5.1 Projektablauf

Der folgende Abschnitt beschreibt den strukturierten Projektablauf – von der ersten Idee bis zur fertigen Erprobung der Lehr-Lern-Videos im schulischen Kontext. Abbildung 1 veranschaulicht diesen Ablauf. Nach der Einführung in fachliche und fachdidaktische Grundlagen vertiefen die Studierenden ihre Kenntnisse zur Videoproduktion. Darauf aufbauend entwickeln sie Grobkonzepte und Storyboards für die Videos, die jeweils durch Feedbackschleifen weiterentwickelt werden. Nach der Filmproduktion erfolgt eine Präsentation der Videos. Anschließend werden die Videos mit Schüler*innen erprobt, evaluiert und aufgrund der Evaluationsergebnisse und Rückmeldungen der Fachdidaktiker*innen überarbeitet. Drei zentrale Feedbackphasen mit Fachdidaktiker*innen sichern die Qualität des Prozesses.

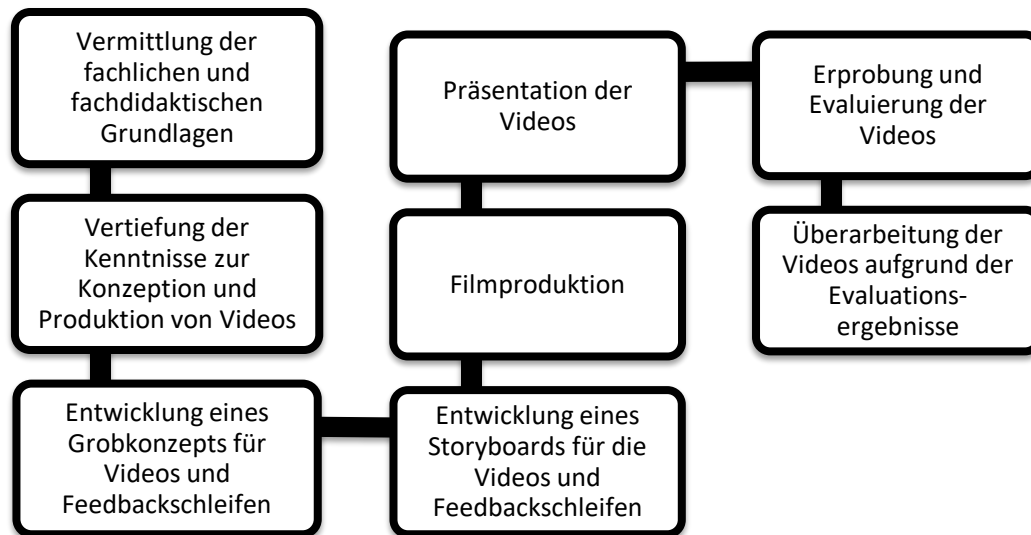


Abbildung 1: Ablauf des Projektes

5.2 Umsetzung und fachdidaktische Analyse ausgewählter Inhalte

Im Rahmen des Projekts entstanden Lehr-Lern-Videos, die unterschiedliche Maßbeziehungen aus den Größenbereichen der Volksschule thematisieren. Im Folgenden sind die produzierten Videos nach Schulstufe gegliedert dargestellt:

2. Schulstufe:

- Cent – Euro (c – €)
- Dekagramm – Kilogramm (dag – kg)
- Zentimeter – Dezimeter – Meter (cm – dm – m)

3. Schulstufe:

- Gramm – Dekagramm – Kilogramm (g – dag – kg)
- Kilogramm – Tonne (kg – t)
- Millimeter – Zentimeter – Dezimeter – Meter (mm – cm – dm – m)
- Meter – Kilometer (m – km)

4. Schulstufe:

- Quadratmeter – $A_r (m^2 - a)$ (2 Videos)

Im anschließenden Kapitel werden ausgewählte Videoinhalte exemplarisch aufgegriffen und aus fachdidaktischer Perspektive näher erläutert.

5.2.1 Aufbau von Stützpunktvorstellungen

Kinder sind mit dem Größenbereich Längen vertrauter als mit anderen Größenbereichen (Franke & Ruwisch, 2010). Längen im Bereich von etwa einem Millimeter bis 100 Meter können visuell wahrgenommen werden (Reuter & Schuler, 2023). Der Kilometer hingegen liegt außerhalb des unmittelbar wahrnehmbaren Bereichs, was die Entwicklung von Stützpunktwissen und insbesondere von Stützpunktvorstellungen schwierig macht. Um diese Herausforderung zu veranschaulichen, hat eine Gruppe von Masterstudierenden ein Video erstellt, in dem die Länge eines Kilometers dargestellt wird. Das Video zeigt im Zeitraffer, wie eine Person einen Kilometer zurücklegt, dabei alle 100 Meter eine Pause einlegt und eine Markierung für die bereits zurückgelegte Strecke setzt. Bei 1 000 Metern werden zwei Markierungen gesetzt: eine für 1 000 m und eine für 1 km (siehe Abbildung 2).

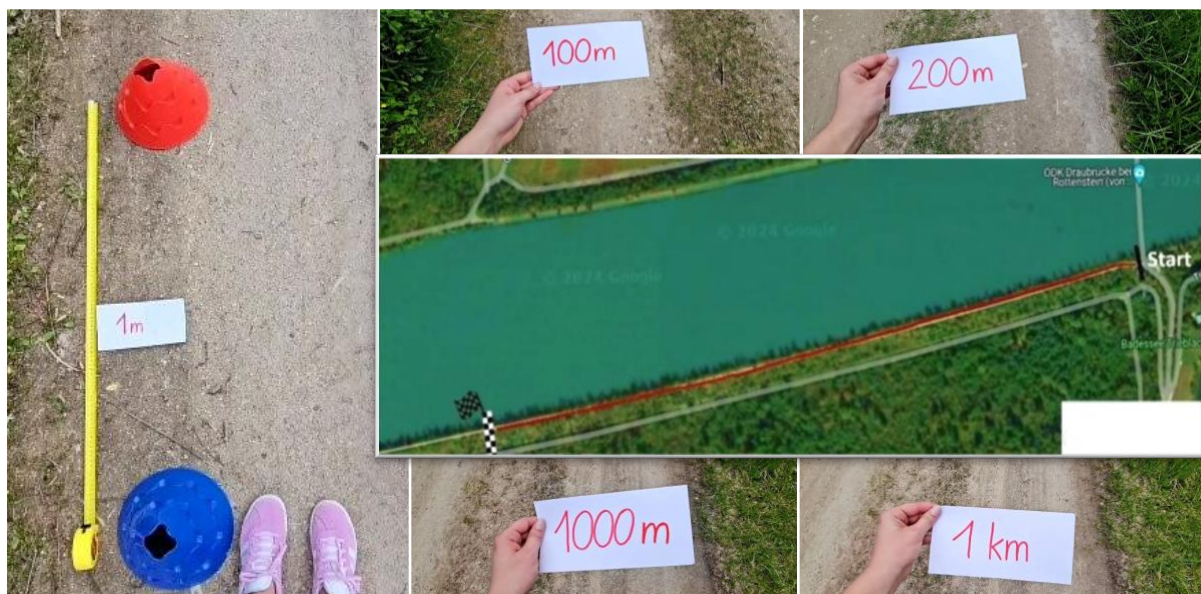


Abbildung 2: Stützpunktvorstellungen zum Kilometer aufbauen

Dadurch kann eine Vorstellung über den Zusammenhang von Meter und Kilometer aufgebaut werden. Die gesamte Dauer des Fußweges von zwei Minuten im Video und die anschließende Aufnahme des Weges aus der Vogelperspektive helfen dem Betrachter zusätzlich eine Vorstellung von der Entfernung eines Kilometers zu entwickeln und ein Stützpunktwissen sowie eine mögliche Stützpunktvorstellung aufzubauen. Am Ende des Videos werden die Lernenden aufgefordert selbst einen Kilometer in gleicher Art und Weise abzugehen.

5.2.2 Verfeinern und Vergrößern

Durch das Verfeinern und Vergrößern von Maßeinheiten können aus bereits bekannten Maßeinheiten weitere Maßeinheiten abgeleitet werden (Franke & Ruwisch, 2010). Der österreichische Lehrplan (BMBWF, 2023) sieht die Einführung des Meters in der ersten Schulstufe und des Dezimeters in der zweiten Schulstufe vor. Dabei kann der Dezimeter direkt durch *Verfeinern* aus dem Meter abgeleitet werden. In einem Video zum Thema „Vom Meter zum Millimeter“ stellten Masterstudierende diesen Zusammenhang dar. Als Motivation für das Verfeinern des Meters wird ein Objekt gezeigt, das kleiner als ein Meter ist und gemessen werden soll. Ausgangspunkt der Darstellung ist ein Papierstreifen von einem Meter Länge, der in zehn gleich große Teile zerschnitten wird, um die nächstkleinere Einheit, den Dezimeter, zu erhalten (siehe Abbildung 3). Gleichzeitig wird auch der Zusammenhang zwischen den Maßeinheiten verdeutlicht: Zehn Dezimeter ergeben einen Meter. Im Video wird zusätzlich die Aufgabe gestellt, selbst einen Papierstreifen von einem Meter Länge zunächst in Dezimeterstücke und dann eines dieser Stücke in Zentimeterstücke zu zerschneiden.



Abbildung 3: Verfeinern – Größenbereich Längen

In einem weiteren Video zeigen Studierende, wie eine Weide für einen Esel abgesteckt wird, die laut Fachbuch mindestens 100 m^2 groß sein muss. Dabei demonstrieren sie, dass durch das *Vergrößern* von Maßeinheiten neue Maßeinheiten entstehen können. Dazu wird ein Quadratmeter wiederholt aufgelegt und abgesteckt, bis eine Fläche von 100 m^2 erreicht ist (siehe Abbildung 4). Danach wird gezeigt, dass diese Fläche auch in der Einheit Ar angegeben werden kann. Schließlich werden beide Maßeinheiten gegenübergestellt: 100 m^2 entsprechen 1 a. Am Ende erhalten die Kinder den Auftrag, selbst eine Fläche von einem Ar abzustecken.



Abbildung 4: Vergrößern – Größenbereich Flächeninhalte

5.2.3 Messen als immer wieder eine Einheit nehmen

Beim Messen von Objekten muss eine geeignete Maßeinheit und ein geeignetes Messgerät ausgewählt werden. Für das Messen von Flächen eignen sich als Messgerät Einheitsquadrate, die alle gleich groß sind. Dabei wird das Einheitsquadrat, welches kleiner als das zu messende Objekt ist, wiederholt lückenlos und ohne Überlappung aneinandergereiht, bis die gesamte Fläche ausgelegt ist. Anschließend wird die Anzahl der verwendeten Einheitsquadrate gezählt, um den Flächeninhalt zu bestimmen. (Reuter & Schuler, 2023)

Dieses Prinzip des Messens „als immer wieder eine Einheit nehmen“ (Lassnitzer & Gaidoschik, 2019) hat eine Gruppe von Studierenden in einem Video veranschaulicht: Ein möglicher Stall für einen Esel soll vermessen werden, um festzustellen, ob dieser groß genug ist. Dazu wird eine quadratmetergroße Platte wiederholt lückenlos und ohne Überlappungen weitergeklappt und die Anzahl der Wendungen der Platte mitgezählt (siehe Abbildung 5).



Abbildung 5: Messen als immer wieder eine Einheit nehmen – Größenbereich Flächeninhalte

5.2.4 Von der kleineren Einheit mehr und von der größeren Einheit weniger

Ein Objekt kann in verschiedenen Einheiten gemessen werden. Je kleiner die gewählte Maßeinheit ist, desto mehr werden davon benötigt, um die Größe des zu messenden Objektes zu bestimmen. Je größer die gewählte Maßeinheit ist, desto weniger werden davon benötigt. Eine Gruppe von Studierenden hat dies durch das Bauen zweier gleichgroßer Puzzles visualisiert: Je kleiner die einzelnen Teile sind, desto mehr Teile werden für das Puzzle benötigt. Je größer die einzelnen Teile sind, desto weniger Teile werden benötigt (siehe Abbildung 6).



Abbildung 6: Von der kleineren Einheit mehr von der größeren Einheit weniger –
Größenbereich Flächeninhalte

Ein weiteres Video veranschaulicht dieses Prinzip am Beispiel des Größenbereiches Geld(werte). Im Gegensatz zu anderen Größen handelt es sich hierbei um eine Zählgröße und nicht um eine Messgröße (Franke & Ruwisch, 2010). Da weder Messinstrumente noch standardisierte Maßeinheiten existieren, können keine Messerfahrungen gemacht werden (Reuter & Schuler, 2023). Stattdessen wird der Wert einer Ware durch wirtschaftliche Überlegungen bestimmt und durch das Zählen des Geldwertes von Münzen und Scheinen ermittelt (Reuter & Schuler, 2023). Das Video veranschaulicht, dass eine 1-Euro-Münze den gleichen Wert hat wie zwei 50-Cent-Münzen, fünf 20-Cent-Münzen, zehn 10-Cent-Münzen, zwanzig 5-Cent-Münzen, wie fünfzig 2-Cent-Münzen oder hundert 1-Cent-Münzen. Dabei wird deutlich, dass für Münzen mit einem höheren Wert weniger Münzen benötigt werden, während für Münzen mit einem niedrigeren Wert mehr Münzen erforderlich sind (siehe Abbildung 7).



Abbildung 7: Von der kleineren Einheit mehr von der größeren Einheit weniger –
Größenbereich Geld(werte)

6 Fazit und Ausblick

Die entstandenen Videos stellen ein multimediales Unterstützungsangebot für den Unterricht dar. Durch die Auseinandersetzung mit Konzepten wie Verfeinern und Vergrößern, Stützpunktvorstellungen oder dem Prinzip „von der kleineren Einheit mehr – von der größeren weniger“ werden kognitive Anregungen gegeben, die das Ziel verfolgen, auf anschauliche Weise Einsichten in die Zusammenhänge zwischen den Maßeinheiten zu gewinnen. Dabei ersetzen die Videos nicht den handelnden Zugang zu Größen, sondern ergänzen diesen.

Die Videos stehen frei über YouTube zur Verfügung und können mithilfe begleitender Arbeitsaufträge und didaktischer Hinweise unmittelbar im Unterricht eingesetzt werden. Damit leistet das Projekt einen Beitrag zum sinnvollen Einsatz digitaler Medien in der

Unterrichtspraxis, indem es allen interessierten Lehrpersonen der Volksschule fachdidaktisch fundierte und erprobte Lehr-Lern-Videos bereitstellt.

In einem geplanten zweiten Projektdurchlauf sollen in weiteren Videos zusätzliche Maßbeziehungen erarbeitet und veranschaulicht werden. Bestehende Videos werden weiterentwickelt und der Fokus verstärkt auf das „zweifache Messen“ (Gaidoschik, 2024, S. 33) sowie die Systematik des dezimalen Maßeinheitensystems gelegt (Gaidoschik, 2024).

Literatur

- Baireuther, P. (1999). *Mathematikunterricht in den Klassen 1 und 2*. Auer.
- Bersch, S., Merkel, A., Oldenburg, R. & Weckerle, M. (2020). Erklärvideos: Chancen und Risiken – zwischen fachlicher Korrektheit und didaktischen Zielen. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 46(109), 58–63.
- BMBWF. (2023). *Lehrplan der Volksschule* [Web]
https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2023_II_1/Anlagen_0001_C_E7F0AA2_A925_4A4D_8C3C_355D12BD22D1.html
- Deutsches Zentrum Lehrerbildung Mathematik. (2020). *Einsatz der Mahiko-Kids Lernvideos*.
https://mahiko.dzlm.de/sites/mahiko/files/uploads/basics/mahikokids/zum_einsatz_der_mahikokids-lernvideos_221107.pdf
- Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (2. Aufl.). *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II: Bd. 0*. Spektrum Akademischer Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2695-6>
- Gaidoschik, M. (2024). Umwandeln im metrischen System: Argumente und Ideen für eine systematisch(er)e Behandlung schon in der Grundschule. In C. Heil & D. Bönig (Hrsg.), *Mathematische Begegnungen mit Kindern schätzen lernen. Festschrift für Silke Ruwisch* (S. 29–41). WTM Verlag. <https://doi.org/10.37626/GA9783959872386.0.03>
- Hoffart, E. & Schneider, R. (2022). Ein Weg durch die bunte Welt der Lehr-Lern-Videos – Mathematikdidaktische Perspektiven und Impulse für den Einsatz in der Schule. In F. Dilling, F. Pielsticker & I. Witzke (Hrsg.), *MINTUS – Beiträge zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung. Neue Perspektiven auf mathematische Lehr-Lernprozesse mit digitalen Medien* (S. 1–23). Springer Fachmedien Wiesbaden.
https://doi.org/10.1007/978-3-658-36764-0_1
- Kulgemeyer, C. (2020). Didaktische Kriterien für gute Erklärvideos. In S. Dorgerloh & K. D. Wolf (Hrsg.), *Pädagogik. Lehren und Lernen mit Tutorials und Erklärvideos* (S. 70–75). Beltz.
- Lassnitzer, E. & Gaidoschik, M. (2019). *Größen: Messen – Schätzen – Umwandeln: Sicherheit durch Begreifen – Anregungen für einen verständnisorientierten Unterricht*.
<http://www.recheninstitut.at/2019/03/groessen-messen-schaetzen-umwandeln>
- Nührenbörger, M. (2002). *Denk- und Lernwege von Kindern beim Messen von Längen: Theoretische Grundlegung und Fallstudien kindlicher Längenkonzepte im Laufe des 2. Schuljahres. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre: Bd. 17*. Franzbecker.
- Peter-Koop, A. & Nührenbörger, M. (2011). Größen und Messen. In M. Van den Heuvel-Panhuizen, G. Walther, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 89–117). Cornelsen.

- Reuter, D. & Schuler, S. (2023). *Vergleichen, Messen, Schätzen – Größen im Mathematikunterricht: Lernstandserhebungen und Unterrichtsmodule für die Grundschule*. Klett Kallmeyer.
- Römer, S. & Nührenbörger, M. (2018). Entdeckerfilme im Mathematikunterricht der Grundschule: Entwicklung und Erforschung von videobasierten Lernumgebungen. In P. Bender & T. Wassong (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018: Vorträge zur Mathematikdidaktik und zur Schnittstelle Mathematik/Mathematikdidaktik auf der gemeinsamen Jahrestagung GDM und DMW 2018 : (52. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik)* (S. 1511–1514). WTM Verlag für Wissenschaftliche Texte und Medien.
- Schöttler, C. (2021). Mit Lernvideos gemeinsam Mathematik lernen. In C. Schreiber & R. Klose (Hrsg.), *Mathematik, Sprache und Medien* (S. 17–35). WTM-Verlag Münster.
<https://doi.org/10.37626/ga9783959871969.0.02>

Ad-hoc-Erklärvideos von Schüler*innen

Qualitätsanalyse spontaner Produktionen

David Schwarzkopf¹

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1426>

Zusammenfassung

Die vorliegende Studie untersucht die Qualität von Ad-hoc-Erklärvideos, die von Schüler*innen der 8. Jahrgangsstufe im Mathematikunterricht erstellt wurden. Vor dem Hintergrund der zunehmenden Bedeutung digitaler Lehr-Lernformate werden in dem Beitrag die Herausforderungen und Chancen des Lernens mit Videos mit besonderem Fokus auf der eigenständigen Videoproduktion durch Lernende diskutiert. Das Konzept der Ad-hoc-Erklärvideos wird als Antwort auf ausgewählte Herausforderungen der unterrichtlichen Umsetzung von Videoproduktionen konzipiert, erläutert und im Rahmen eines Unterrichtsexperiments zur Wahrscheinlichkeitsrechnung empirisch erprobt. Für die Analyse der Ad-hoc-Erklärvideos wird ein spezifischer Kriterienkatalog entwickelt. Die Ergebnisse zeigen, dass eine spontane Videoproduktion im Unterricht umsetzbar ist und die erstellten Videos ein durchgehend hohes fachliches Niveau aufweisen. Dies verdeutlicht die prinzipielle Anwendbarkeit des Konzepts der Ad-hoc-Erklärvideos und eröffnet damit neue Perspektiven für den Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht.

Stichwörter: Videoproduktion, Ad-hoc-Erklärvideos, Wahrscheinlichkeitsrechnung

1 Einleitung

Die Entwicklung und Integration leistungsfähiger Videokameras in tragbare Geräte wie Smartphones oder Tablets sowie die Verfügbarkeit schneller Internetverbindungen haben die Produktion, Verbreitung und Nutzung von Videos in den letzten Jahrzehnten erheblich vereinfacht. Dadurch haben Plattformen wie YouTube, Instagram, Snapchat oder TikTok das lineare Fernsehen als bevorzugtes Medium der Freizeitgestaltung für Jugendliche weitgehend abgelöst (MPFS, 2024).

¹ Otto-Friedrich-Universität Bamberg, Markusplatz 3, 96047 Bamberg.

E-Mail: david.schwarzkopf@uni-bamberg.de

Neben der Unterhaltung werden die Plattformen sowohl von Schüler*innen als auch von Lehrer*innen zunehmend für schulische Zwecke genutzt. Dieser Trend begann bereits vor der Online-Beschulung während der COVID-Pandemie und setzt sich seitdem weiter fort, wie groß angelegte Mediennutzungsstudien der letzten Jahre übereinstimmend bestätigen (MPFS, 2022, 2024; Rat für Kulturelle Bildung, 2019).

Nahezu die Hälfte der Schülerinnen und Schüler hält YouTube-Videos für schulische Belange für wichtig bis sehr wichtig. YouTube-Videos sind bei dieser Gruppe vor allem zur Wiederholung von Inhalten aus dem Unterricht (73 Prozent) ... wichtig bis sehr wichtig. Hohe Bedeutung haben YouTube-Videos auch für die Vertiefung des Wissens und für die Vorbereitung auf Prüfungen ... Damit hat die kommerzielle Plattform YouTube eine folgenreiche Änderung der Bildungskonstellation bewirkt. (Rat für Kulturelle Bildung, 2019, S. 9)

Die zunehmende Relevanz von Videos für Lehr-Lernsettings führt auch zu einer verstärkten wissenschaftlichen Auseinandersetzung, um deren Potenziale auszuloten und mögliche Risiken zu identifizieren.

Das Lernen mit Videos im Unterricht kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen:

- Rezipieren: Schüler*innen konsumieren vorhandene Videos.
- Produzieren: Schüler*innen erstellen eigene Videos.

Beide Ansätze bieten spezifische Chancen und Herausforderungen. Während die Rezeption die Aufnahme und Verarbeitung von Inhalten aus bestehenden Videos betont, liegt der Schwerpunkt der Produktion auf der eigenständigen Strukturierung und Aufbereitung von Inhalten zur Erstellung neuer Videos. Die vorliegende Studie fokussiert die Videoproduktion im Rahmen des neu entwickelten Konzepts von Ad-hoc-Erklärvideos im Unterricht (vgl. Abs. 3).

Zunächst werden die theoretischen Grundlagen des Lernens mit Erklärvideos erläutert (vgl. Abs. 2). Aus der Gegenüberstellung der Chancen und ausgewählten Herausforderungen einer Videoproduktion wird die Forschungsfrage abgeleitet (vgl. Abs. 3). Anschließend werden die Methodik und das Design der Untersuchung sowie die Auswertungskriterien beschrieben (vgl. Abs. 4). Daran schließt sich die Vorstellung und Diskussion erster Ergebnisse der Qualitätsanalyse der von Schüler*innen erstellten Ad-hoc-Erklärvideos an (vgl. Abs. 5). Abschließend wird ein Fazit gezogen und ein Ausblick auf weiterführende Untersuchungen gegeben (vgl. Abs. 6).

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Lernen mit Erklärvideos im Mathematikunterricht

Audio-visuelle Medien mit Lehr-Lern-Anspruch können auf verschiedene Weise klassifiziert werden. Dies führt auch zu unterschiedlichen Definitionen von Erklärvideos. Wolf (2015) grenzt beispielsweise Erklärvideos aus medienpädagogischer Perspektive anhand des Grades der Didaktisierung, der verwendeten Spielhandlung, des verwendeten Filmtyps und der Professionalität der Produktion von einer ganzen Reihe weiterer verwandter Formate ab. Dazu zählen unter anderem Video-Tutorials, Performanzvideos oder Dokumentarfilme. Die skizzierte Kategorisierung der verschiedenen Formate ist dabei nicht trennscharf. In Anlehnung an Wolf (2015) werden Erklärvideos im vorliegenden Beitrag wie folgt definiert: „Erklärvideos sind eigenproduzierte Filme, in denen erläutert wird, wie man etwas macht oder wie etwas funktioniert bzw. in denen abstrakte Konzepte erklärt werden“ (S. 123).

Aus mathematikdidaktischer Perspektive betont auch Walter (2022) den erläuternden Charakter von Erklärvideos. Er unterscheidet sie von Entdeckervideos, die zum Entdecken mathematischer Zusammenhänge anregen sollen, und Aufgabenvideos, die (grundschulrelevante) mathematische Aufgaben mit Hilfe vielfältiger Darstellungen aufbereiten. Diese drei Videoformen fasst er dabei unter dem Oberbegriff Lernvideo zusammen.

Entscheidend für das Lernen mit Erklärvideos ist deren Qualität. So deuten erste empirische Studien darauf hin, dass Erklärvideos, die nach mediengestalterischen und fachdidaktischen Qualitätsstandards produziert wurden, zu einem höheren Lernzuwachs bei Rezipient*innen führen (Ohrndorf et al., 2024). Ring und Brahm (2022) unterteilen vorhandene Studien zur Analyse der Qualität von mathematischen Erklärvideos nach ihrer Zielsetzung in zwei Gruppen. In der Gruppe „Guidelines“ fassen sie Studien zusammen, die darauf abzielen, Empfehlungen zur Unterstützung von Lehrkräften bei der Entwicklung und Auswahl effektiver Videos zu geben (z.B. Brame, 2016; Kay, 2014; Siegel & Hensch, 2021). In der Gruppe „Measures“ sind Studien eingeordnet, die zum Ziel haben, Instrumente zur Beurteilung bestehender Videos zu entwickeln, indem sie Kriterien in einem Kodierungshandbuch operationalisieren (z.B. Bruder et al., 2015; Kay & Ruttenberg-Rozen, 2020; Marquardt, 2016).

Die Forschung zeigt, dass die Rezeption von Erklärvideos unter bestimmten Bedingungen einen positiven Einfluss auf die Lernleistung haben kann (Findeisen et al., 2019). Das (weitgehend passive) Rezipieren stellt jedoch nur eine Möglichkeit dar, Videos im Lernprozess zu nutzen. Auch die eigenständige Produktion von Erklärvideos könnte Lernpotenzial bieten. Die damit verbundenen Herausforderungen und Chancen werden im Folgenden näher erörtert.

2.2 Herausforderungen von Videoproduktionen im Mathematikunterricht

In der Literatur stehen hauptsächlich organisatorische Herausforderungen einer Videoproduktion im Unterricht im Fokus. Dazu zählen die notwendige technische Ausstattung der Schulen mit geeigneten Geräten und Software (Knaus & Valentin, 2016), datenschutzrechtliche Bedenken seitens der Lehrkräfte (Rummler & Wolf, 2012) und die feste zeitliche Organisation der Unterrichtsstunden in 45- bzw. 90-minütige Einheiten (Lübcke & Burchert, 2014).

Die feste Einteilung der Unterrichtsstunden stellt eine Herausforderung dar, da die Produktion eines Erklärvideos in der Regel mehrere Schritte erfordert. Fehrmann (2022, S. 126) schlägt beispielsweise folgenden Ablauf vor: (1) Festlegung des Inhalts, (2) Anlage eines Storyboards, (3) Review-Prozess, (4) Ergänzung und Adaption, (5) Produktion, Nachbereitung und Publikation. Einen ähnlichen Ablauf nutzen auch Schreiber und Schulz (2017) für die Erstellung von Stop-Motion-Filmen zu Materialien aus dem Mathematikunterricht durch Studierende oder Klose (2022) für die Produktion von mathematischen Podcasts zu geometrischen Begriffen durch Grundschüler*innen.

Das ausführliche Vorgehen verfolgt das Ziel, „die inhaltliche Qualität der Audio-Podcasts zu erhöhen und gleichzeitig eine tiefere Reflexion über das eigene Wissen zu ermöglichen“ (Klose, 2022, S. 166). Im regulären Unterricht reichen 90 Minuten für die Schüler*innen allerdings häufig nicht aus, um alle notwendigen Schritte zur Umsetzung einer Videoproduktion zu durchlaufen. Dadurch bleibt die Videoproduktion aufgrund der zeitlichen Herausforderung meist auf spezielle Medienprojekte beschränkt, wie beispielsweise Lübcke und Burchert (2014) beschreiben:

Gleichzeitig beschränkt die Schulzeit mit den Doppelstunden aufwendigere Medienprojekte ... auf Projektphasen, in denen das notwendige Zeitkontingent leichter erzeugt werden kann. Die Verlagerung in Projektphasen erzeugt aber eine Attribution als „Ausnahmesituation“, sodass diese Methode [Videoproduktion] in den meisten Fällen nicht in das reguläre didaktische Repertoire [von Lehrkräften] aufgenommen wird. (S. 124)

Die zeitliche Herausforderung verhindert somit, dass die Methode in das reguläre didaktische Repertoire von Lehrkräften aufgenommen wird. Dies ist bedauerlich, da die eigenständige Videoproduktion gleichzeitig vielfältige Chancen für das Mathematiklernen eröffnet, wie im Folgenden darlegt wird.

2.3 Chancen von Videoproduktionen im Mathematikunterricht

Die anspruchsvollen Aufgaben, mit denen die Lernenden bei der Erstellung eines Videos konfrontiert sind, eröffnen vielfältige Lernchancen. Zentrale Grundlage eines jeden Erklärvideos ist der zu vermittelnde Inhalt. Um diesen einer anderen Person erklären zu können, ist eine intensive Auseinandersetzung damit und dessen Strukturierung notwendig. Damit entspricht die Aufgabe der Videoproduktion dem Verständnis von Lernen als aktivem Konstruktionsprozess (z.B. Freudenthal, 1982; Wittmann, 1981).

Empirische Studien belegen zudem positive Effekte des Lernens durch Lehren (Hoogerheide et al., 2016). So zeigen Forschungsergebnisse, dass Personen einen größeren Lernerfolg erzielen, wenn sie sich einen Sachverhalt mit dem Ziel aneignen, ihn einer anderen Person zu erklären, anstatt lediglich einen Test zu bestehen (Fiorella & Mayer, 2014).

Die Videoproduktion erfordert neben der inhaltlichen Auseinandersetzung auch eine sprachliche und grafische Aufbereitung. Dies bietet eine authentische Möglichkeit, die prozessbezogenen Kompetenzen *Mathematisch kommunizieren* und *Mathematisch darstellen* (KMK, 2022) zu fördern. Die Erstellung eines Erklärvideos regt sowohl die Auswahl und Entwicklung geeigneter mathematischer Darstellung (z. B. Kuhnke, 2013; Salle et al., 2023) als auch deren Versprachlichung (z. B. Jörissen & Schmidt-Thieme, 2015; Leiss et al., 2023; Prediger, 2020) an. Zwei Aspekte, die in der Mathematikdidaktik als zentral für den Kompetenzerwerb gelten.

Darüber hinaus fordern die Bildungsstandards sogar explizit die Produktion von Videos im Rahmen der Kompetenz *mit Medien mathematisch arbeiten* ein:

Digitale Medien, die für das Lernen und Lehren von Mathematik relevant sind, umfassen mathematikspezifische sowie allgemeine Medien ... Allgemeine Medien (z. B. Videos, Textverarbeitung, Präsentationsmedien) spielen eine Rolle, da sie erfordern, mathemathikhaltige Informationen zu bündeln, zu präsentieren und nach mathematischen Kriterien zu beurteilen. Das Spektrum der Kompetenzen reicht von der Nutzung analoger Medien, ... über die Erstellung und Gestaltung eigener allgemeiner Medien wie Videos und Präsentationen ... (KMK, 2022, S. 13)

Die Erstellung eines Erklärvideos stellt somit eine Alternative zur Erstellung eines Plakats, eines Lernberichts oder anderer didaktischer Konzepte dar, die eher auf der Versprachlichung mathematischer Inhalte basieren (vgl. Jörissen & Schmidt-Thieme, 2015, S. 403). Im Gegensatz zu überwiegend schriftsprachlichen Produktionen kann im Video jedoch auch Alltagssprache verwendet werden. „So müssen nicht alle Inhalte verbalsprachlich expliziert werden, sondern können je nach Inhalt auch mimisch, gestisch oder handelnd dargestellt werden“ (Leiss et al., 2023, S. 563). Dies schafft insbesondere auch für sprachlich schwächere Lernende günstige Ausgangsbedingungen, um sich aktiv in die Produktion einbringen zu können (Prediger, 2020).

3 Fragestellung

Die vorangegangenen Ausführungen verdeutlichen, dass die Videoproduktion zwar unterrichtsorganisatorische Herausforderungen mit sich bringt, zugleich aber vielfältige Chancen für das Lernen von Mathematik eröffnet. Um dem Konflikt insbesondere zwischen der festen Zeitstruktur der Unterrichtsstunden und den möglichen Chancen zu begegnen, wurde das Konzept der Ad-hoc-Erklärvideos entwickelt. Diese werden in der vorliegenden Studie wie folgt definiert:

Ad-hoc-Erklärvideos sind spontan erstellte Videos, die in kurzer Zeit (ca. 30 Minuten) und mit einfachen Mitteln produziert werden. Sie dienen dazu, eine zuvor bearbeitete Problemstellung erläuternd aufzubereiten.

Das Konzept der Ad-hoc-Erklärvideos setzt gezielt auf Spontaneität und knüpft an die Alltagserfahrungen der Jugendlichen mit Kurzvideos (z.B. reels, shorts, ...) an, wodurch mögliche Berührungsängste mit der Technik verringert werden. Die Ad-hoc-Videoproduktion bietet einen authentischen Anlass für eine vertiefte Auseinandersetzung mit einer zuvor bearbeiteten fachlichen Problemstellung. Dabei wird bewusst auf langwierige Erläuterungen der Aufgabenstellung, das Schreiben eines Drehbuchs sowie auf Überarbeitungs- oder Nachbearbeitungsprozesse verzichtet.

Besonders geeignet für die Produktion von Ad-hoc-Erklärvideos sind (mathematische) Inhalte, die reichhaltige Kommunikations- und Argumentationsanlässe bieten und vielfältige Darstellungen bereithalten. Insbesondere ist es von Vorteil, wenn auch materielle Darstellungen existieren, da diese direkt in das Video integriert werden können.

Gleichzeitig bringt das Konzept eigene Herausforderungen mit sich. Die bewusst reduzierte Vorbereitungszeit und der Verzicht auf Review-Prozesse könnten zu Videos mit geringer Qualität führen. Dies könnte sich negativ auf den Lernerfolg auswirken. Es ist daher interessant zu untersuchen:

*Welche Qualität zeigt sich in von Schüler*innen der Sekundarstufe I ad hoc produzierten mathematischen Erklärvideos?*

4 Methode

4.1 Stichprobe und Vorgehen

Zur Beantwortung der Forschungsfrage wurde ein Unterrichtsexperiment in einer 8. Jahrgangsstufe einer bayerischen Mittelschule mit 20 Schüler*innen durchgeführt. Die teilnehmenden Lernenden besuchen eine sogenannte Regelklasse und streben den Ersten

Schulabschluss nach der 9. Jahrgangsstufe an. Die Schüler*innen hatten nach Angaben der Klassenlehrkraft bislang keine schulischen Vorerfahrungen mit der Produktion von Erklärvideos im Unterricht.

Die im Rahmen des Unterrichtsexperiments entstandenen Ad-hoc-Erklärvideos werden qualitativ mittels einer kategoriengeleiteten Analyse auf ihre Qualität hin untersucht (vgl. Abs. 4.3).

4.2 Design der Lernumgebung

Für das Unterrichtsexperiment wird eine spezielle Lernumgebung entwickelt, die sich in eine rezeptive und zwei aktive Phasen gliedert: (0) Rezeption eines Einführungsvideos, (1) materialbasierte Paper-Pencil-Bearbeitung eines mathematischen Problems und (2) Produktion eines eigenen Ad-hoc-Erklärvideos.

Als mathematischer Inhaltsbereich wird die Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe I gewählt. Der Inhaltsbereich bietet zahlreiche Kommunikations- und Argumentationsanlässe, da Wahrscheinlichkeiten stets in Situationen angewendet werden, in denen eine Unsicherheit besteht und Entscheidungen getroffen werden müssen (Biehler & Engel, 2015; Schnell, 2019). Zudem bietet die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Vielzahl unterschiedlicher Darstellungen (Freudenthal, 1973; Winter, 1976). Insbesondere existieren auch materielle Darstellungen in Form von Zufallsgeneratoren, die für eine handelnde Auseinandersetzung genutzt werden können. Damit erfüllt dieser Inhaltsbereich die zuvor beschriebenen günstigen Voraussetzungen für die Produktion eines Ad-hoc-Erklärvideos.

Zu Beginn der Unterrichtsstunde (Phase 0) wird den Schüler*innen ein vom Autor erstelltes, kurzes Einführungsvideo gezeigt (Abb. 1.).



Abbildung 1: Ausschnitt aus dem Einführungsvideo

Dieses klärt einerseits die zentralen Begriffe für die folgende Problemstellung und dient andererseits als mögliche Inspiration für die eigene Videoproduktion. Aus diesem Grund wird bei der Erstellung ausschließlich auf Materialien zurückgegriffen, die den Lernenden auch im Unterricht zur Verfügung stehen.

Für die Produktion des Einführungsvideos kommt eine Kombination aus Realvideo und analoger Lege-Trick-Technik zum Einsatz, bei der haptische Gegenstände und beschriftete Karteikarten verwendet werden (Wieczorek & Fehrmann, 2022). Diese Technik erfordert kein technisches Vorwissen und lässt zugleich vielfältige kreative Gestaltungsmöglichkeiten zu. Dadurch ist ein „einfaches Erklärvideo relativ schnell herzustellen“ (Arnold & Zech, 2019, S. 27).

Die sich anschließende Problemstellung gliedert sich in zwei Arbeitsaufträge. In Phase (1) erfolgt zunächst eine materialbasierte Paper-Pencil-Bearbeitung. Darauf folgt in Phase (2) die Produktion eines Ad-hoc-Erklärvideos:

(1) Untersucht die Zufallsgeneratoren.

Mit welchen können Laplace-Experimente durchgeführt werden, mit welchen nicht?

Begründet eure Entscheidung.

Notiert wichtige Punkte in eurem Forschungsbericht.

(2) Dreht ein kurzes Video für eine andere 8. Klasse, in dem ihr erklärt, mit welchen der Zufallsgeneratoren Laplace-Experimente durchgeführt werden können und mit welchen nicht.

Wählt für euer Video geeignete Zufallsgeneratoren aus.

Entscheidet gemeinsam, was ihr im Video zeigen und erklären möchtet.

Holt euch dann ein iPad, um das Video aufzunehmen.

Für die Bearbeitung der beiden Aufträge stehen den Schüler*innen insgesamt 30 Minuten frei zur Verfügung. Als didaktisches Material erhalten die Lernenden einen Spielwürfel, einen Dodekaeder, einen Buchstabenwürfel mit 3A, 2N und 1E und einen Beutel mit zwei grünen, zwei gelben und zwei blauen Kugeln (Abb. 2). Außerdem iPads und bei Bedarf leere Karteikarten, Stifte, Scheren und schwarze Handschuhe.



Abbildung 2: Fachdidaktische Materialien für die Problemstellung

Die Bereitstellung von schwarzen Handschuhen soll einerseits den Lernenden die Angst nehmen, ihre Hände in der Kamera zu zeigen. Andererseits dienen sie als Requisit, um den

Wechsel der üblichen Rolle des Novizen und Empfänger einer Erklärung hin zum Experten und Erklärer zu erleichtern (Hilliger, 2009).

4.3 Design der Analysekategorien

Für die Analyse der Qualität der ad hoc produzierten Erklärvideos ($n = 10$) konnte kein bestehender Kriterienkatalog aus der Literatur übernommen werden. Die in der Literatur verfügbaren Kataloge sind primär darauf ausgelegt, Lehrende oder Forschende bei der Auswahl oder Entwicklung geeigneter Videos für den Unterricht zu unterstützen. Ein wissenschaftsbasierter Katalog zur Bewertung von Videos, die von Lernenden erstellt wurden, liegt bislang nicht vor.

Zur Entwicklung eines geeigneten Kriterienkatalogs dienen bereits bestehende Kataloge als Grundlage (z.B. Bruder et al., 2015; Marquardt, 2016; Ring & Brahm, 2022). Aus diesen werden geeignete Qualitätskriterien ausgewählt, adaptiert und verdichtet. So ergeben sich fünf fachliche Kriterien und drei gestalterische Kriterien. Durch die vorgenommene Gruppierung in fachliche und gestalterische Kriterien können auch Fälle erfasst werden, in denen ein Video zwar gestalterische Schwächen aufweist, aber dennoch fachlich überzeugend ist.

Die Bewertung jedes Kriteriums erfolgt anhand einer dreistufigen Skala (0 – nicht erfüllt, 1 – teilweise erfüllt, 2 – voll erfüllt). Auf diese Weise können für jedes Video maximal 10 Punkte für die fachlichen Kriterien und 6 Punkte für die gestalterischen Kriterien vergeben werden.

5 Ergebnisse und Diskussion

Alle 10 Paare konnten in der zur Verfügung gestellten Zeit ein ad-hoc-Erklärvideo fertigstellen. Während der Bearbeitung gab es keine technischen Probleme von Seiten der Schüler*innen. Im Mittel haben die Videos eine Dauer von 01:05 Minuten.

Kategorie	Skala	Erzielte Werte			
		Spannweite	Mittelwert	Mittelwert %	SD
Fachlich	0–10	6–10	8,3	83%	1,4
Gestalterisch	0–6	1–6	3,4	57%	1,4
Gesamt	0–16	9–15	11,7	73%	2,5

Tabelle 1: Ergebnisse der Analyse der Qualität der Ad-hoc-Erklärvideos

Die spontan produzierten Videos (Tab. 1) erreichen in den fachlichen Kriterien einen Mittelwert von 8,3 Punkten ($SD = 1,4$), was 83% der möglichen Gesamtpunktzahl (10) entspricht. Kein Video erzielt weniger als 6 Punkte. Insgesamt weisen die Videos somit ein hohes fachliches Niveau insbesondere in den Kriterien Darstellen, Kommunizieren und Argumentieren auf. Lediglich zwei Videos enthalten kleinere fachliche Fehler.

Bei den gestalterischen Kriterien liegt der Mittelwert bei 3,4 Punkten ($SD = 1,4$). Dies entspricht 53% der maximalen Punktzahl (6). Im Gegensatz zu den fachlichen Kriterien gibt es hier eine breite Streuung über nahezu alle Werte. Insgesamt ergibt sich für die Videos ein Mittelwert von 11,7 Punkten ($SD = 2,5$) und damit ein Anteil von 73% an der Gesamtpunktzahl (16). Auch hier liegen alle Videos in der oberen Hälfte der Skala.

Die Ergebnisse zeigen, dass gemessen an der jeweils möglichen Gesamtpunktzahl in den fachlichen Kriterien eine höhere Leistung erzielt wird als in den gestalterischen Kriterien. Interessant ist dabei, dass in der untersuchten Stichprobe eine hohe Punktzahl in den fachlichen Kriterien nicht automatisch auch mit einer hohen Punktzahl in den gestalterischen Kriterien einhergeht. Eine mögliche Erklärung für die große Streuung in den gestalterischen Kriterien könnten die unterschiedlichen außerschulischen Vorerfahrungen in der Videoproduktion sein.

6 Fazit

Das Unterrichtsexperiment zeigt, dass die Produktion von Ad-hoc-Erklärvideos im regulären Unterricht möglich ist. Dabei deuten die Analyseergebnisse an, dass die Lernenden in der Lage sind, auch innerhalb einer regulären Unterrichtsstunde ein Erklärvideo auf hohem Niveau zu erstellen. Aufgrund der bislang kleinen Stichprobe können jedoch keine allgemeinen Schlussfolgerungen gezogen werden.

Da das Experiment im Rahmen eines größeren Projektes durchgeführt wurde, sind weitere Analysen geplant. Derzeit wird anhand der Auswertung von Pre-, Post- und Follow-up-Tests einer größeren Stichprobe untersucht, ob sich die hier dokumentierte Tendenz zur hohen Qualität breiter bestätigen lässt und inwiefern die Produktion von Ad-hoc-Erklärvideos auch lernwirksam ist.

Literatur

- Arnold, S., & Zech, J. (2019). *Kleine Didaktik des Erklärvideos. Erklärvideos für und mit Lerngruppen erstellen und nutzen*. Westermann.
- Biehler, R., & Engel, J. (2015). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 221–251). Springer.
- Brame, C. J. (2016). Effective Educational Videos: Principles and Guidelines for Maximizing Student Learning from Video Content. *CBE—Life Sciences Education*, 15(4). <https://doi.org/10.1187/cbe.16-03-0125>
- Bruder, R., Grell, P., Konert, J., Rensing, C., & Wiemeyer, J. (2015). Qualitätsbewertung von Lehr- und Lernvideos. In N. Nistor & S. Schirlitz (Hrsg.), *Digitale Medien und Interdisziplinarität. Herausforderungen, Erfahrungen, Perspektiven*. (S. 295–297). Waxmann.
- Fehrmann, R. (2022). Digitale Kompetenz für das Leben in einer digitalisierten Welt. Eine begriffstheoretische Fundierung und multidimensionale Konzeptualisierung, konkretisiert an der unterrichtspraktischen Produktion von Erklärvideos. In J. Hugo, R. Fehrmann, S. Ud-Din, & J. Scharfenberg (Hrsg.),

- Digitalisierungen in Schule und Bildung als gesamtgesellschaftliche Herausforderung. Perspektiven zwischen Wissenschaft, Praxis und Recht.* Waxmann.
- Findeisen, S., Horn, S., & Seifried, J. (2019). Lernen durch Videos—Empirische Befunde zur Gestaltung von Erklärvideos. *MedienPädagogik Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung*, 16–36. <https://doi.org/10.21240/mpaed/00/2019.10.01.X>
- Fiorella, L., & Mayer, R. E. (2014). Role of expectations and explanations in learning by teaching. *Contemporary Educational Psychology*, 39(2), 75–85. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2014.01.001>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. 2. Klett.
- Freudenthal, H. (1982). Mathematik—Eine Geisteshaltung. *Grundschule*, 14(4), 140–142.
- Hilliger, D. (2009). *Theaterpädagogische Inszenierung. Beispiele—Reflexionen—Analysen*. Schibri-Verlag.
- Hoogerheide, V., Deijkers, L., Loyens, S. M. M., Heijltjes, A., & Van Gog, T. (2016). Gaining from explaining: Learning improves from explaining to fictitious others on video, not from writing to them. *Contemporary Educational Psychology*, 44–45, 95–106. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2016.02.005>
- Jörissen, S., & Schmidt-Thieme, B. (2015). Darstellen und Kommunizieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 385–410). Springer.
- Kay, R. (2014). Developing a Framework for Creating Effective Instructional Video Podcasts. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET)*, 9(1), 22. <https://doi.org/10.3991/ijet.v9i1.3335>
- Kay, R., & Ruttenberg-Rozen, R. (2020). Exploring the Creation of Instructional Videos to Improve the Quality of Mathematical Explanations for Pre-Service Teachers. *International Journal of Distance Education and E-Learning*, 35(1), 1–21.
- Klose, R. (2022). *Mathematische Begriffsbildung. PriMaPodcasts im bilingualen Kontext*. Waxmann.
- KMK. (2022). *Bildungsstandards im Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)* (Kultusministerkonferenz, Hrsg.; i. d.F. vom 23.06.2022).
- Knaus, T., & Valentin, K. (2016). Video-Tutorials in der Hochschullehre: Hürden, Widerstände und Potentiale. In T. Knaus & O. Engel (Hrsg.), *Wi(e)derstände* (S. 151–181). kopaed.
- Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel: Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-01509-1>
- Leiss, D., Gerlach, K., Wessel, L., & Schmidt-Thieme, B. (2023). Sprache und Mathematiklernen. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Aufl., S. 561–596). Springer.
- Lübcke, E., & Burchert, J. (2014). Kongruenz oder Korrespondenz? Soziokulturelle Ökologie als Ansatz zum Verstehen des Web 2.0 in der beruflichen Bildung. In N. C. Krämer, N. Sträfling, N. Malzahn, & T. Ganster (Hrsg.), *Lernen im Web 2.0* (S. 207–225). W. Bertelsmann Verlag.
- Marquardt, K. (2016). *Beurteilungsraster für Mathematik-Erklärvideos: Chancen, Grenzen und Durchführung mittels Resultaten aus der Schulbuchforschung (Diplomarbeit)*.
- MPFS. (2022). *KIM-Studie 2022: Kindheit, Internet, Medien. Basisuntersuchung zum Medienumgang 6- bis 13-Jähriger*. <https://mpfs.de/studie/kim-studie-2022/>
- MPFS. (2024). *JIM-Studie 2024: Jugend, Informationen, Medien. Basisuntersuchung zum Medienumgang 12- bis 19-Jähriger*. <https://mpfs.de/studie/jim-studie-2024/>

- Ohrndorf, M., Vollstedt, M., & Schmidt-Borcherding, F. (2024). Zur Akzeptanz von fachlichen Inhalten aus Erklärvideos zu Funktionen – Eine methodologische Studie zur Herstellung von Geltung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 45(2), 23. <https://doi.org/10.1007/s13138-024-00249-1>
- Prediger, S. (Hrsg.). (2020). *Sprachbildender Mathematikunterricht*. Cornelsen.
- Rat für Kulturelle Bildung. (2019). *Jugend/Youtube/Kulturelle Bildung: Horizont 2019*. Rat für Kulturelle Bildung e. V. <https://www.bosch-stiftung.de/de/publikation/jugend-youtube-kulturelle-bildung-horizont-2019>
- Ring, M., & Brahm, T. (2022). A Rating Framework for the Quality of Video Explanations. *Technology, Knowledge and Learning*. <https://doi.org/10.1007/s10758-022-09635-5>
- Rummler, K., & Wolf, K. D. (2012). Lernen mit geteilten Videos: Aktuelle Ergebnisse zur Nutzung, Produktion und Publikation von online-Videos durch Jugendliche. In W. Sützl, F. Stalder, R. Maier, & T. Hug (Hrsg.), *MEDIEN - WISSEN - BILDUNG* (S. 253–266). Innsbruck University Press. https://www.uibk.ac.at/iup/buch_pdfs/9783902811745.pdf
- Salle, A., Schmidt-Thieme, B., Schulz, A., & Söbbeke, E. (2023). Darstellen und Darstellungen verwenden. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Aufl., S. 429–464). Springer.
- Schnell, S. (2019). ... Weil es halt nicht sicher ist. Argumentieren mit Wahrscheinlichkeiten. *Mathematik lehren*, 213, 26–31.
- Schreiber, C., & Schulz, K. (2017). Stop-Motion-Filme zu Materialien aus dem Mathematikunterricht. In R. Rink & S. Ladel (Hrsg.), *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe—Ein Handbuch für die Lehrerbildung* (S. 89–110). WTM.
- Siegel, S. T., & Hensch, I. (2021). Qualitätskriterien für Lehrvideos aus interdisziplinärer Perspektive: Ein systematischer Review. In E. Matthes, S. T. Siegel, & T. Heiland (Hrsg.), *Lehrvideos—Das Bildungsmedium der Zukunft?* (S. 254–267). Klinkhardt.
- Walter, D. (2022). Mathematikunterricht mit digitalen Medien: Eine fachdidaktische Perspektive. In B. Brandt, L. Bröll, & H. Dausend (Hrsg.), *Digitales Lernen in der Grundschule III: Fachdidaktiken in der Diskussion* (S. 19–39). Waxmann.
- Wieczorek, L., & Fehrmann, R. (2022). Film ab! *Schulmagazin 5-10*, 7(8), 40–47.
- Winter, H. (1976). Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule (Klasse 1-6). *DdM*, 1, 22–37.
- Wittmann, E. C. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (6. Aufl.). Vieweg.
- Wolf, K. D. (2015). Videotutorials und Erklärvideos als Gegenstand, Methode und Ziel der Medien- und Filmbildung. In A. Hartung, T. Ballhausen, C. Trültzsch-Wijnen, A. Barberi, & K. Kaiser-Müller (Hrsg.), *Filmbildung im Wandel* (S. 121–131). new academic press.

Exploring Attitudinal Predictors of Mathematics Achievement Among Senior High School Students in Ghana: A Theory of Planned Behaviour Approach

Mathematics Attitudes and Performance in Cape Coast

Florence Christianah Awoniyi¹

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1477>

Summary

This study investigates the impact of attitudes on mathematics performance among senior high school students in Cape Coast Metropolis, Ghana. Despite curriculum reforms and government interventions, students' performance in mathematics remains suboptimal. The study employs a quantitative research design, utilising an achievement test and a modified Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scale questionnaire. Data from 2,575 students reveal a moderate correlation between attitude and achievement scores. Four sub-constructs of attitude—confidence, learned helplessness, enjoyment, and perseverance—were identified, with confidence emerging as the strongest correlate of achievement. The findings suggest that enhancing students' self-confidence in mathematics could significantly improve their performance. The study recommends targeted interventions to address learned helplessness and promote positive attitudes towards mathematics among students.

Keywords: Ghanaian Senior High Schools, Learned Helplessness, Mathematics Achievement, Self-Confidence, Student Attitudes

1 Introduction

Mathematics is widely acknowledged as a foundational subject for success in science, technology, engineering, and mathematics (STEM) education. Numerous international studies have shown that affective variables such as self-confidence, enjoyment, and learned helplessness are strongly linked to students' mathematics performance (Lim & Chapman, 2015; Chen et al., 2018; Hannula et al., 2016). Positive attitudes have been associated with higher achievement, while negative affect—such as anxiety or low self-efficacy—can undermine performance (Andamon & Tan, 2018; Biber & Baser, 2012).

¹ University of Ghana, Department of Teacher Education, P. O. Box LG 1181, Legon
E-mail: fcawoniyi@ug.edu.gh, ORCID 0000-0001-9806-1837

Despite the volume of research globally, studies examining these relationships in African contexts—especially within sub-Saharan countries like Ghana—are limited. Most existing studies in Ghana focus either on general academic performance or on the cognitive domain, with limited attention given to affective dimensions such as attitudes (Abreh et al., 2018; Agyei et al., 2022). This leaves a critical gap, particularly since affective factors may operate differently in contexts shaped by teacher-centered instruction, high-stakes testing, and systemic resource challenges.

This study aims to address that gap by investigating the relationship between four sub-constructs of attitude—confidence, enjoyment, perseverance, and learned helplessness—and mathematics performance among senior high school (SHS) students in the Cape Coast Metropolis of Ghana. Using the Theory of Planned Behaviour (Ajzen, 1991) and the Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales (Tapia & Marsh, 2000) as the analytic framework, this research offers empirical insights into which affective constructs most strongly predict achievement outcomes. In doing so, it contributes to the international discourse by providing evidence from an underrepresented context, while also offering practical implications for improving mathematics teaching and learning in Ghanaian classrooms.

One of Ghana's key educational objectives is to prioritise mathematics and science as foundational pillars for national development in an era marked by rapid technological advancement (Awoniyi & Fletcher, 2013; National Council for Curriculum and Assessment, 2018). Mathematics is viewed not only as a core academic subject but also as critical to Ghana's vision of becoming a mathematics-friendly society, aligned with its Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) policy agenda (NaCCA, 2020).

The National Pre-Tertiary Education Curriculum Framework has undergone several revisions aimed at improving the quality of education, with a focus on promoting methodical thinking, creativity, and self-confidence in learners. These reforms also emphasise equipping students with the right attitudes toward science, mathematics, and technology (Hagan et al., 2020). However, despite these policy intentions, mathematics continues to be perceived by many students as a difficult and anxiety-inducing subject. Research by Aguilar (2021), Capuno et al. (2019), and Mazana et al. (2020) has shown that affective barriers—such as lack of motivation, fear of failure, and negative classroom experiences—significantly affect students' engagement and achievement in mathematics.

Further challenges include a continued emphasis on the cognitive domain in curriculum implementation, with minimal attention given to affective development. National assessments such as the WASSCE prioritise rote learning and procedural fluency over deeper understanding or emotional engagement with mathematics (Ministry of Education, 2010). Though the revised curriculum introduces strategies to assess students' attitudes and behaviours, practical implementation remains inconsistent. This context underscores the need to examine affective constructs—such as confidence, enjoyment, and helplessness—in relation to mathematics performance. Doing so can inform both national policy and classroom practices aimed at improving learning outcomes.

2 Literature Review

Research over the last three decades consistently shows that student attitudes toward mathematics significantly influence achievement. Positive attitudes—such as enjoyment and confidence—are associated with higher performance (Andamon & Tan, 2018; Mazana et al., 2020; Hwang & Son, 2021), while negative affective factors like anxiety and learned helplessness are known to hinder learning (Hannula, 2006; Biber & Baser, 2012). These studies underline the importance of affective constructs in mathematics education and confirm that attitude is a multidimensional concept encompassing beliefs, emotions, and motivation (Fishman, Yang, & Mandell, 2021).

This study is grounded in the Theory of Planned Behaviour (TPB) (Ajzen, 1991), which posits that behaviour is guided by three key components: attitude toward the behaviour, subjective norms, and perceived behavioural control. In mathematics education, these translate into how students feel about learning mathematics (attitude), how their peers and teachers influence their engagement (subjective norms), and their beliefs about their capability to succeed (perceived control).

To operationalise these components in a mathematics context, this study integrates validated constructs from the Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales (FSMAS) (Tapia & Marsh, 2000), which identify key dimensions such as confidence, enjoyment, usefulness, and teacher effectiveness. These constructs align closely with TPB: (i) Attitude toward behaviour is reflected in enjoyment and usefulness, (ii) Subjective norms align with perceived teacher influence, (iii) Perceived behavioural control is expressed through confidence and self-efficacy. This alignment enables a cohesive framework for examining how student beliefs, emotions, and perceptions interact to influence mathematics performance.

Drawing from both TPB and FSMAS, this study focuses on four sub-constructs of attitude: (a) Confidence: A belief in one's ability to succeed in mathematics tasks (Lim & Chapman, 2015), (b) Enjoyment: The extent to which students derive satisfaction and pleasure from learning mathematics, (c) Learned Helplessness: A feeling of powerlessness rooted in past failures and perceived inability to improve (Raps et al., 1982), (d) Perseverance: The willingness to persist in solving mathematics problems, even when difficult. These constructs were chosen not only for their theoretical relevance but also because they emerged strongly from exploratory and confirmatory factor analysis in this study. Moreover, they reflect cognitive, affective, and motivational dimensions that are often shaped by classroom practices, assessment policies, and curriculum focus.

While the influence of attitude on mathematics achievement has been widely studied in Western and Asian contexts (Chen et al., 2018; Hwang & Son, 2021; Lim & Chapman, 2015), there is a limited body of research from sub-Saharan Africa, and Ghana in particular. Studies within Ghana have typically prioritised the cognitive domain, with less focus on affective factors (Abreh et al., 2018; Fletcher, 2018). Furthermore, the role of attitudes within the

context of Ghana's teacher-centred pedagogy, high-stakes assessment culture, and under-resourced schools remains largely unexplored. This study addresses that gap by investigating how students' affective dispositions—conceptualised through the constructs above—correlate with mathematics performance. It offers context-specific insights while also contributing to international comparative understandings of the role of attitudes in mathematics learning.

2.1 Theoretical Framework

This study adopts the Theory of Planned Behaviour (TPB) (Ajzen, 1991) and integrates it with sub-constructs of attitude as outlined by the Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales (Tapia & Marsh, 2000). The TPB explains that behaviour is influenced by attitudes toward behaviour, subjective norms, and perceived behavioural control. It emphasises the interplay of beliefs, emotions, and the perception of control in shaping actions.

To align with the TPB, the study utilises three variables as the analytic lens: (1) Value of Mathematics which represents the cognitive component of attitude, focusing on the belief in the usefulness, relevance, and applicability of mathematics to real-world situations (Tapia & Marsh, 2000), (2) Enjoyment of Mathematics which measures the degree to which students derive satisfaction and pleasure from engaging with mathematics (Tapia & Marsh, 2000). It corresponds to the affective component of attitude, (3) Self-Confidence in Mathematics, which aligns with the control belief aspect of the TPB, encompassing perceptions of control and capability, and the belief in one's ability to succeed in mathematics (Tapia & Marsh, 2000; Lim & Chapman, 2015). By categorising attitudes into these three constructs, this study investigates how each contributes to students' performance in mathematics. The theoretical framework provides a robust basis for analysing the data, focusing on both individual beliefs and broader societal influences on attitudes.

Many fields, including education, have widely validated and applied the TPB to understand and predict behaviours. Its components—attitudes toward behaviour, subjective norms, and perceived behavioural control—are particularly useful in examining how beliefs and perceptions shape student behaviour and performance. In education, the TPB has been instrumental in studies investigating attitudes toward STEM subjects, including mathematics. For example, Schunk and DiBenedetto (2020) used TPB to examine students' motivation in mathematics, emphasising how perceived usefulness and self-efficacy contribute to academic engagement and success. Similarly, Lim and Chapman (2015) validated TPB's relevance in understanding mathematics attitudes by demonstrating a strong relationship between perceived control, self-confidence, and academic performance.

The validation of TPB as a framework for understanding attitudes and behaviour in educational settings is supported by its flexibility and ability to integrate with other constructs. It provides a structured approach for examining how beliefs and attitudes drive actions,

aligning well with the goals of this study to explore sub-constructs of attitude that correlate with mathematics performance.

2.2 Relationships between TPB, Kiwanuka's Sub-Constructs, and FSMAS

TPB includes three primary constructs: Attitude toward behaviour, which has to do with beliefs about outcomes of behaviour and evaluations of these outcomes. Subjective norms connote beliefs about what others think the individual should do. Perceived behavioural control involves beliefs about the ease or difficulty of performing the behaviour, linked to self-efficacy.

Furthermore, Kiwanuka et al. (2020) identified sub-constructs of mathematics attitudes to include: Perseverance, that is, sustained effort in overcoming challenges in mathematics. Interest is about enjoyment and curiosity in mathematics. Self-confidence is about belief in one's ability to succeed in mathematics. These sub-constructs align with TPB's emphasis on attitudes and perceived behavioural control. For example, perseverance and interest reflect attitudes toward behaviour, as they encapsulate positive or negative feelings about mathematics engagement. Self-confidence aligns with perceived behavioural control, representing a belief in one's ability to overcome challenges.

The Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales (FSMAS) includes constructs such as: Confidence, that is, assurance in one's abilities to solve mathematical problems. Usefulness which is the perception of mathematics as valuable for future goals. Teacher effectiveness deals with the belief in the teacher's role in promoting mathematics learning. These constructs provide an empirical basis for operationalising the TPB's components. Attitude toward behaviour is reflected in confidence and perceived usefulness; subjective norms relate to teacher effectiveness, as teachers influence students' perceived expectations. Perceived behavioural control connects with confidence, underscoring self-efficacy in mathematics.

The three theories aligned to form the theoretical framework for this study. TPB's attitude toward behaviour aligns with interest (Kiwanuka) and confidence and usefulness (FSMAS). TPB's subjective norms align with teacher effectiveness (FSMAS), highlighting external influences on attitudes. TPB's perceived behavioural control aligns with self-confidence (Kiwanuka) and confidence (FSMAS), emphasising the belief in one's capability.

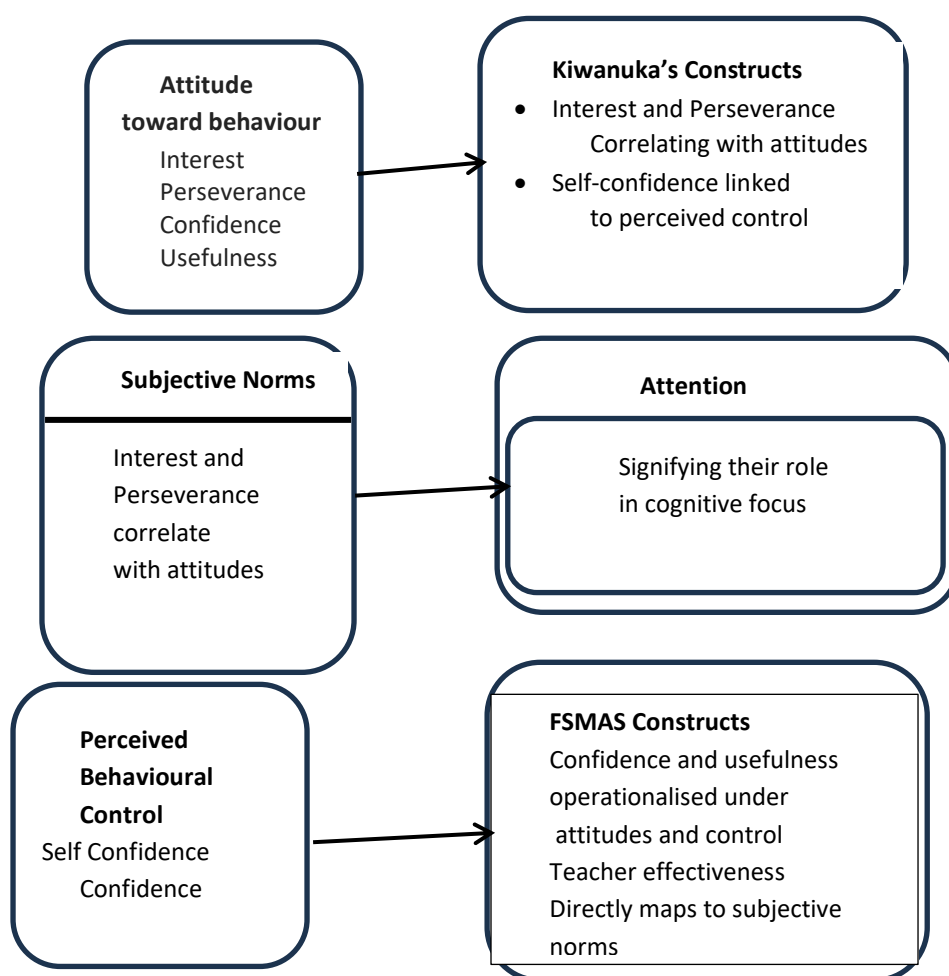


Figure 1: Visual Representation of Relationships (Self-drawn by Awoniyi)

Established instruments such as the FSMAS provide the sub-constructs of attitude (e.g., perseverance, interest, and self-confidence), which have undergone extensive validation through research. These constructs capture cognitive, affective, and motivational dimensions of attitudes, which are critical for understanding performance in mathematics. For instance, Lim and Chapman (2015) demonstrated that self-confidence is a key predictor of mathematics success, providing empirical support for its inclusion in this study.

Hence, this research investigates the relationship of attitude sub-constructs and the mathematics performance of senior high school (SHS) students in the Cape Coast Metropolis. To guide the investigation, the subsequent research question was devised:

2.3 Research Question

Which attitudinal factors are correlated to the performance of Ghanaian senior high school students in mathematics?

3 Materials and Method

This study employed a quantitative research design, involving the administration of an achievement test and a questionnaire. Data were collected from 2,575 Grade 11 students from ten public senior high schools in the Cape Coast Metropolis, Ghana. The sample consisted of 54% males and 46% females, representing a 77% response rate from the 3,342 students initially sampled.

3.1 Instruments

The instruments used to collect data for the study were an achievement test and a questionnaire. The achievement test was based on the SHS syllabus, with a sample of West Africa Senior School Certificate Examination (WASSCE) mathematics questions as a guide in constructing the test items. The test was made up of 40 multiple-choice questions that were answered for one hour. The Modified Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales (FSMAS), which recorded a high reliability of Cronbach- α , from .777 to .942 was adapted in this study. The Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales (FSMAS) was selected for this study due to its strong theoretical foundation and extensive use in measuring students' affective responses toward mathematics. The instrument has been validated across numerous cultural and educational contexts and aligns well with the constructs underpinning the Theory of Planned Behaviour (Ajzen, 1991), which forms the theoretical basis of this study. Specifically, FSMAS captures attitudes such as confidence, enjoyment, and perceived usefulness—dimensions that are central to understanding behavioural intentions and actual engagement in mathematics.

Despite the original FSMAS containing 57 items across multiple subscales, only 28 items were retained for this study. This decision was made following a feasibility study involving a sample of students from the target population and consultations with four senior mathematics education experts. During this preliminary phase, students indicated that some items, particularly those related to gender roles and social expectations (e.g., “My parents think boys are better at math than girls”), were outdated or culturally irrelevant in the current Ghanaian educational context. Feedback revealed that both male and female students expressed similar levels of confidence and engagement in mathematics, with female students even reporting that they often supported male peers in problem solving. Additionally, items relating to social perception, such as peer stigma associated with being good at mathematics, were not endorsed as valid concerns in this cohort.

As a result, subscales explicitly measuring gender differences and social influence were excluded from the adapted version. Instead, the retained 28 items focused on four empirically and theoretically relevant sub-constructs: confidence, enjoyment, perseverance, and learned helplessness. These items were rigorously reviewed for contextual relevance, clarity, and theoretical alignment. Each item was phrased in language that matched the comprehension

level of SHS Form Two students and piloted to test for reliability and construct validity. The retained items demonstrated high internal consistency, with Cronbach alpha values ranging from .863 to .962 across the four sub-constructs.

This modification ensured that the attitude scale used in this study was both culturally appropriate and psychometrically sound for the Ghanaian context. A detailed breakdown of the final items and their factor loadings is presented in Table 1, while the theoretical justification for each sub-construct is addressed in the literature and theoretical framework sections.

To provide greater clarity on the mathematical context of this study, the achievement test was developed in alignment with the Ghana Education Service’s Senior High School (SHS) Core Mathematics syllabus. It focused on five fundamental content areas typically covered during the first and second years of SHS. These included: algebraic expressions and equations, geometry (particularly involving angles and plane shapes), mensuration (calculations involving area and volume), statistics (such as interpreting graphs and calculating measures of central tendency), and applied word problems involving simple interest and proportional reasoning.

The test was designed to assess various forms of mathematical thinking—specifically, procedural fluency (e.g., solving equations), conceptual understanding (e.g., recognising geometric properties), and problem-solving (e.g., applying knowledge to contextual scenarios). A sample item read: “If the volume of a cube is 125 cm^3 , what is the length of one side?” with four multiple-choice options. This format required students to apply both recall and reasoning skills.

Comprising 40 multiple-choice questions, each valued at one point, the test was constructed using both WASSCE-style questions and teacher-developed items based on the syllabus. The instrument was reviewed by experienced mathematics educators and underwent a pilot phase in a school outside the study area. Minor adjustments were made for clarity based on feedback. The test was administered in 60 minutes under examination conditions.

To contextualise the findings, the study also accounted for the mathematical background of participants. The students were in Form Two (Grade 11), having completed at least one full academic year of SHS mathematics. School-based assessment records indicated that most participants exhibited moderate proficiency, with scores typically ranging between 50% and 70%. Some students had participated in mathematics clubs or competitions, suggesting varying levels of engagement and aptitude across the sample. The diagnostic analysis conducted included parametric tests and factor analyses, while other analysis included frequencies, percentages, means, standard deviations, correlations, and multiple regressions.

3.2 Parametric tests

To ensure the reliability of the regression analysis conducted to answer the research question, the study assessed the key assumptions of multiple linear regression: linearity, normality of

residuals, homoscedasticity, independence of errors, and multicollinearity. The assumption of multicollinearity was carefully examined using Variance Inflation Factor (VIF) and Tolerance values. Multicollinearity inflates the variances of the regression coefficients, leading to instability in the model. Following Field (2013), VIF values above 10 or Tolerance values below 0.2 are considered problematic. In this study, the VIF was 1.988 and the Tolerance value was .503, confirming the absence of multicollinearity among the predictors (i.e., the four attitude sub-constructs), and ensuring that the regression coefficients are interpretable and robust.

The normality of the residuals was assessed both statistically and visually. Skewness and kurtosis values (-0.092 and -0.708 , respectively) fell within acceptable ranges (± 1), indicating that the residuals were approximately normally distributed. This is further supported by the Normal Q-Q plot shown in Figure 2, where the points align closely along the diagonal line, suggesting minimal deviation from normality. A box plot of achievement test scores (Figure 3) was also used to examine the distribution of scores and detect any potential outliers. The plot showed a symmetrical distribution with no significant outliers, reinforcing the assumption of normality and supporting the appropriateness of parametric analysis.

In addition, the Normal Q-Q plot of the regression-standardized residuals (Figure 4) confirmed that residuals closely followed a normal distribution, while the scatter plot of standardized residuals (Figure 5) displayed a random, rectangular pattern around the horizontal axis. This pattern indicates that the assumptions of linearity and homoscedasticity were met, with no visible patterns suggesting heteroscedasticity or non-linearity. Together, these diagnostic checks confirmed that all key regression assumptions were satisfied, validating the use of multiple linear regression for this study and supporting the credibility of the model's predictive outcomes.

The achievement scores data underwent scrutiny for adherence to assumptions regarding sample size, normality, multicollinearity, Variance Inflation Factor, and Tolerance. The sample size of 2,575 was deemed appropriate for the investigation (Pallant, 2020; Pituch & Stevens). According to Field (2013), the Tolerance below 0.2 and VIF greater than 10 indicate a serious problem. However, the Tolerance is .503 and the VIF is 1.988. This is an indication of absence of multicollinearity. Subsequently, the normality of the data was assessed. The data appears to exhibit a roughly normal distribution, as indicated by the skewness (-0.092) and kurtosis (-0.708) falling within acceptable ranges, and the actual mean (53.72) being close to the trimmed mean (53.90) (Field, 2013). Additionally, normal probability plots, labelled "Normal QQ Plots" in Figure 2, were utilised for visual assessment of normality (Gosselin, 2024; Das & Imon, 2016), showing a reasonably straight-line indicative of normal distribution. Furthermore, a box plot (Figure 3) of the achievement test score distribution corroborates normality, revealing the absence of outliers in the dataset.

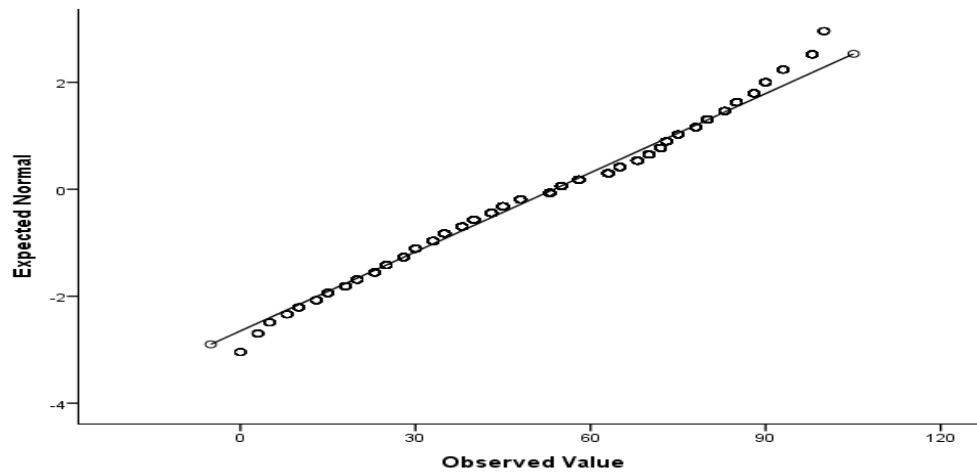


Figure 2: Normal QQ Plot of Achievement test scores

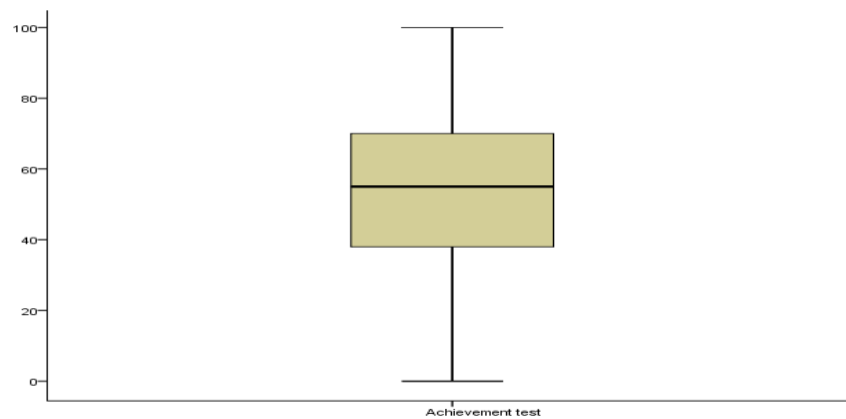


Figure 3: Box plot showing the Achievement scores distribution

Furthermore, an examination of the residuals was conducted to evaluate their normality and suitability for regression analysis. Figures 4 and 5 depict the Normal QQ Plot and the scatter plot of the regression-standardized residual of the achievement test scores, respectively.

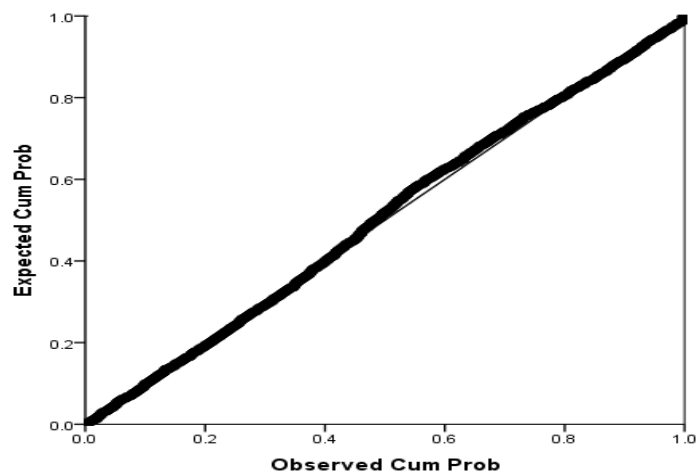


Figure 4: Normal QQ Plots displaying the achievement test scores' regression-standardized residual.

Analysing the Normal QQ plots of the Regression Standardized Residual, the alignment of points along a straight diagonal line from bottom left to top right indicates minimal deviations from normality.

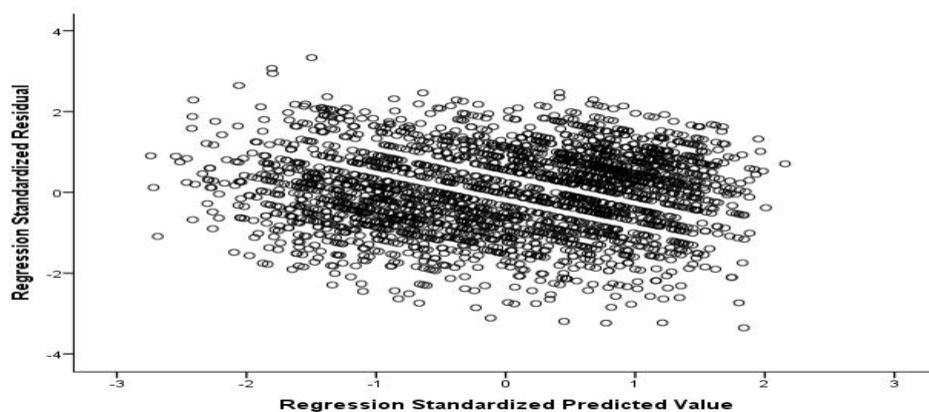


Figure 5: Scatter Plots displaying the regression standardized residual of Achievement test scores

The residual has a nearly rectangular distribution, with the center showing the greatest concentration of scores. The plot depicted a clustering of residuals around the center for each predicted score, accompanied by a symmetrical decline in the distribution of residuals. A correlation analysis revealed a moderate (.388 value) association between attitude and the achievement test. In conclusion, the data satisfied all the parametric (diagnostic) tests for further analysis to be carried out.

3.3 Factor Analysis

Upon subjecting the 28 items to a principal component analysis (with a Kaiser-Meyer-Olkin measure of sampling adequacy of 0.969 and Bartlett's test statistic of 55101.490), four components with eigenvalues greater than Kaiser's threshold of 1 were found to account for 66.30% of the variance. The scree plot exhibited inflections that advocate for retaining the four elements: 'learned helplessness' (13 items, $\alpha = .926$), 'perseverance' (3 items, $\alpha = .954$), 'confidence' (5 items, $\alpha = .962$) and 'enjoyment' (6 items, $\alpha = .863$). The attitude questionnaire's overall reliability coefficient, α , was .845. The item 'Thinking out mathematics problems does not appeal to me' did not load on any of the sub-constructs, hence, it was entirely excluded from further analysis. Table 1 shows the factor loading of the attitude questionnaire after rotation.

ITEM	1	2	3	4
I do badly in tests of mathematics as compared to that of my friends.	.748			
My friends do better than me in mathematics.	.748			
I do not have the ability to do well in Mathematics.	.722			
I do not see myself becoming successful in the learning of mathematics.	.713			
In mathematics class, I see others to be better than me.	.669			
Mathematics is the most difficult subject for me.	.631			
I do not see myself to be good in mathematics.	.608			
I am not good in the study of mathematics.	.586			
Mathematics related subjects have been my worst subjects.	.572			
Even though I work hard on mathematics, it seems difficult for me.	.537			
Most subjects I can handle well, but I have problems with mathematics.	.512			
I do not enjoy learning mathematics.	.450			
I feel I cannot do well in Mathematics.	.355			

When I am faced with mathematics related problem that I cannot solve immediately I stick with it until I solve it.		.959		
Even when a mathematics question is difficult, I keep working until I find an answer.		.945		
When I am left with a question that requires the use of Mathematics to answer, I will keep on trying until I answer it.		.944		
I am sure I can do advance work in mathematics.		.967		
I can learn advanced mathematics.		.945		
I can handle more difficult mathematics problems.		.913		
I have a lot of confidence when it comes to mathematics.		.911		
I am capable of solving difficult mathematics questions.		.887		
I usually feel relax when solving mathematics questions.			.690	
A mathematics test is always welcome by me.			.682	
I feel comfortable with Mathematics.			.581	
I feel good solving Mathematics questions.			.512	
I like Mathematics.			.408	
Generally, I feel secure about undertaking Mathematics related program in future.			.310	
Initial Eigenvalues	3	13.41	1.797	1.549
% of variance explained	7	49.67	6.657	5.737
Cumulative % of variance explained			66.301	
Cronbach Alpha		.926	.954	.962
Overall Cronbach Alpha			.845	

Table 1: Factor Loading of the Attitude Construct

The mean and standard deviation were calculated for each of the four sub constructs: ‘learned helplessness’ (M = 2.57, SD = .95), ‘perseverance’ (M = 2.49, SD = 1.18), ‘confidence’ (M = 3.01, SD = 1.20), ‘enjoyment’ (M = 2.72, SD = .94). According to the overall mean value (M = 2.67, SD = .57), the students had a negative attitude towards their mathematics learning because many of the negative statements were agreed upon and many of the positive statements were disagreed upon. However, a consideration of the standard deviations for "perseverance" and "confidence" showed bigger variations compared to other sub-constructs in the same group. This could indicate that the respondents differed in their perseverance and confidence in succeeding in mathematics learning on the one hand, and their learned helplessness and enjoyment of mathematics on the other.

4 Results

Regression analysis was conducted out on the subscales: *learned helplessness* ($r_1 = -.516, p < .05$), *perseverance* ($r_2 = -.310, p < .05$), *confidence* ($r_3 = .607, p < .05$) and *enjoyment* ($r_4 = -.383, p < .05$). Achievement scores and attitude variables have a variance of about 40% in common (R square = .399 and Adjusted R Square = .398). The model is statistically significant ($p < .05$). Evaluating the four subscales: “confidence” ($\beta = 0.541, p = 0.000$), “learned helplessness” ($\beta = -0.305, p = 0.000$), “enjoyment”, ($\beta = 0.206, p = 0.000$), and ‘perseverance’ ($\beta = 0.027, p = 0.145$) meaning that with the exception of perseverance, when the variance explained by all other sub constructs in the model was controlled, each sub construct of the attitude variable made a statistically significant unique contribution to the prediction of the achievement test scores. The variance uniquely explained in achievement scores by the sub-constructs is 29.3%, 9.3%, 4.2%, and 0.07%, for confidence, learned helplessness, enjoyment, and perseverance, respectively. As a result, the regression model with $F(4, 2570) = 425.782, p < .05$, between the attitude variable and achievement scores is as follows:

Achievement scores = $29.883 - .326$ (learned helplessness) + $.024$ (perseverance) + 0.456 (confidence) + $.222$ (enjoyment).

However, with the removal of ‘perseverance’, the Final model with $F(3, 2571) = 566.755, p = 0.000 < .05$ is:

Achievement scores = $30.700 + .451$ confidence – $.319$ learned helplessness + $.227$ enjoyment.

4.1 Discussion on Regression Analysis of Achievement Scores and Attitude Variables

The regression analysis conducted on the subscales of learned helplessness, perseverance, confidence, and enjoyment provides insightful findings regarding their impact on achievement scores. The analysis reveals several key points:

The subscales of learned helplessness ($r = -.516$), perseverance ($r = -.310$), confidence ($r = .607$), and enjoyment ($r = -.383$) all show significant correlations with achievement scores ($p < .05$). This indicates that each of these variables has a meaningful relationship with achievement scores. Secondly, the overall model explains approximately 40% of the variance in achievement scores ($R^2 = .399$, Adjusted $R^2 = .398$), which is statistically significant ($p < .05$). This suggests that the attitude variables collectively account for a substantial portion of the variability in achievement scores. Thirdly, when evaluating the unique contributions of each subscale, confidence ($\beta = 0.541$, $p = 0.000$), learned helplessness ($\beta = -0.305$, $p = 0.000$), and enjoyment ($\beta = 0.206$, $p = 0.000$) all make statistically significant contributions to predicting achievement scores. However, perseverance ($\beta = 0.027$, $p = 0.145$) does not significantly contribute when the variance explained by other subscales is controlled. Fourthly, the variance uniquely explained by confidence, learned helplessness, enjoyment, and perseverance in achievement scores are 29.3%, 9.3%, 4.2%, and 0.07%, respectively. This highlights that confidence is the most influential predictor among the subscales. Lastly, the initial regression model, including all four subscales, is:

Achievement scores = $29.883 - 0.326$ (learned helplessness) + 0.024 (perseverance) + 0.456 (confidence) + 0.222 (enjoyment). This model is statistically significant with $F(4, 2570) = 425.782$, $p < .05$.

Upon removing perseverance, the final model is:

Achievement scores = $30.700 + 0.451$ (confidence) - 0.319 (learned helplessness) + 0.227 (enjoyment). This refined model is also statistically significant with $F(3, 2571) = 566.755$, $p < .05$.

4.2 Interpretation

The results indicate that confidence, learned helplessness, and enjoyment are all significant predictors of achievement scores, with confidence having the most positive impact. Learned helplessness has a negative impact on achievement, with higher levels connected with worse achievement results. Enjoyment also positively influences achievement, though to a lesser extent than confidence. Perseverance, despite its theoretical importance, does not significantly predict achievement scores in this model. Various factors, including measurement issues or the possibility of other variables not included in the model mediating perseverance's effects, could explain this.

Overall, the analysis underscores the importance of fostering confidence and enjoyment while addressing learned helplessness to enhance achievement outcomes. The removal of perseverance from the final model simplifies the predictive equation without compromising the model's explanatory power, making it more practical for application.

The attitudes measured in this study—confidence, enjoyment, and learned helplessness—are not formed in isolation but are closely shaped by how mathematics is taught and

experienced in the classroom. In Ghanaian senior high schools, mathematics instruction is often characterised by teacher-centred methods, large class sizes, and a focus on procedural fluency for exam preparation (Abreh, Owusu, & Amedahe, 2018; Fletcher, 2018). These structural and pedagogical factors can limit opportunities for student engagement, exploration, and discourse—conditions necessary for fostering enjoyment and self-confidence. For example, when students are not encouraged to ask questions, engage in problem-solving discussions, or see real-life applications of mathematics, their sense of competence may decrease, leading to feelings of helplessness and disengagement. Conversely, students who encounter supportive teachers, collaborative group tasks, or differentiated instruction tend to develop more positive attitudes. This study's identification of confidence as the most powerful predictor suggests that Ghanaian mathematics classrooms need to incorporate pedagogical approaches that affirm students' ability to succeed—such as formative feedback, growth mindset language, and context-based tasks. Therefore, the affective dimensions uncovered by this study have direct implications for instructional design, classroom management, and assessment strategies in mathematics teaching.

The findings of this study contribute to mathematics education by offering a nuanced, evidence-based account of how affective sub-constructs—specifically confidence, learned helplessness, and enjoyment—predict students' achievement in mathematics within the Ghanaian context. While international literature has extensively examined the relationship between attitude and mathematics performance, this study is among the few that localise the Theory of Planned Behaviour (TPB) and the Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales (FSMAS) to sub-Saharan Africa. It does so with empirical rigour, using a large sample and robust statistical analyses. The identification of confidence as the most influential predictor offers actionable insight for curriculum planners, teacher educators, and classroom practitioners aiming to improve outcomes through affective interventions. In doing so, this study not only affirms global theories but also enriches them with locally grounded evidence, thereby extending current knowledge in a meaningful and culturally relevant way.

While this study is situated in Ghana, its findings resonate with and extend existing international research on students' attitudes and mathematics achievement. For instance, consistent with studies conducted in high-performing contexts such as Singapore (Lim & Chapman, 2015) and the United States (Chen et al., 2018), this research confirms that self-confidence is a strong predictor of success in mathematics. Similarly, the negative impact of learned helplessness aligns with research findings from Turkey (Biber & Baser, 2012) and China (Wang, Du, & Liu, 2009), reinforcing the universality of this construct across educational systems. What this study adds is a perspective from a sub-Saharan African context, where systemic challenges such as curriculum reforms, limited resources, and affective neglect in classroom assessment practices uniquely shape student attitudes. Therefore, the findings not only validate cross-cultural patterns but also highlight the contextual nuances that may inform international comparative studies, curriculum design, and teacher preparation programs—particularly in settings with similar developmental or educational constraints.

Beyond the practical implications, this study offers important contributions to both mathematics education theory and research methodology. Theoretically, the study advances the application of the Theory of Planned Behaviour (TPB) within the context of mathematics education in sub-Saharan Africa, particularly by integrating it with constructs from the Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales (FSMAS) and Kiwanuka's model of student attitudes. By mapping confidence, learned helplessness, enjoyment, and perseverance onto TPB's core dimensions—attitude toward behaviour, subjective norms, and perceived behavioural control—this research provides a culturally responsive framework for understanding how affective variables shape students' engagement and achievement in mathematics.

This theoretical integration demonstrates that affective constructs are not only significant in high-performing contexts like Singapore or the U.S. but also operate meaningfully within under-resourced and exam-oriented systems such as Ghana's. The findings reinforce the global applicability of TPB and FSMAS, while showing how these models can be adapted to reveal context-specific dynamics such as the impact of learned helplessness and the nuanced role of perseverance in classroom cultures characterised by limited learner autonomy.

Methodologically, this study contributes by adapting a well-established instrument (FSMAS) to suit a Ghanaian senior high school context. The rigorous process of cultural and contextual validation—including the removal of outdated gender and social influence items—demonstrates how instruments can be modified to maintain psychometric integrity while improving relevance. This approach provides a model for researchers working in similar educational contexts who seek to adapt Western-based frameworks without compromising measurement quality.

In sum, the study contributes to theoretical discourse by expanding the explanatory power of existing models in new cultural settings and to methodological practice by exemplifying responsible and context-aware adaptation of research instruments. These contributions enhance the field's understanding of how student attitudes shape mathematics learning in diverse global contexts and lay the groundwork for future research on affective constructs in African mathematics classrooms.

4.3 Conclusion

This study provides robust evidence that students' attitudes significantly influence mathematics achievement in Ghanaian senior high schools. Among the four attitudinal sub-constructs examined—confidence, enjoyment, learned helplessness, and perseverance—confidence emerged as the strongest positive predictor of achievement, while learned helplessness had a pronounced negative effect. Enjoyment also contributed positively, though to a lesser extent. Perseverance, although theoretically relevant, did not significantly predict achievement in the final model. These findings affirm the applicability of the Theory of Planned Behaviour and the Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales in the Ghanaian

context and underscore the urgent need to integrate affective considerations into mathematics instruction. Given that affective dispositions are shaped by pedagogical practices, the study calls for teaching approaches that nurture confidence, reduce feelings of helplessness, and foster enjoyment. The findings not only contribute to the global discourse on affect and achievement but also highlight the need for culturally responsive strategies to improve mathematics learning outcomes in under-resourced settings.

4.4 Implications for Practice

The results of this study carry important implications for mathematics educators, curriculum developers, and educational policymakers. First, the strong predictive power of confidence suggests that teachers must intentionally cultivate students' belief in their ability to succeed in mathematics. This could be achieved through differentiated instruction, formative feedback, and the creation of low-anxiety environments that allow students to experience success incrementally. Second, the negative influence of learned helplessness signals the urgent need for teaching strategies that empower students and counteract the belief that success in mathematics is based solely on innate ability. Instructional approaches that incorporate growth mindset messages, allow for productive struggle, and reward effort over perfection may be particularly effective.

Third, enjoyment emerged as a positive contributor to achievement, implying that student engagement in mathematics can be enhanced when instruction is relevant, interactive, and enjoyable. The use of real-world problems, cooperative learning, and technology-based tools may make mathematics more meaningful and relatable. Finally, the findings call for curriculum and assessment reforms that place greater emphasis on students' attitudes, motivations, and emotional well-being alongside traditional content knowledge. Education authorities might consider embedding affective learning outcomes in national syllabi and promoting teacher professional development that addresses both pedagogical content knowledge and socio-emotional instructional strategies.

4.5 Limitations of the Study

While this study provides valuable insights into the role of attitudes in mathematics performance, several limitations should be noted. The research adopted a cross-sectional design, which restricts the ability to draw causal conclusions. As such, although significant relationships were found between attitudes and achievement, it is not possible to determine the directionality or long-term impact of these relationships. Additionally, the study relied on self-report data to measure student attitudes, which may be subject to social desirability bias or inaccuracies in students' self-perceptions.

Moreover, the study focused exclusively on affective factors, excluding other potentially influential variables such as prior academic achievement, teacher quality, instructional methods, or home environment. The findings, therefore, represent only a portion of the complex set of factors that affect students' mathematics outcomes. Finally, while the sample was relatively large and diverse, it was limited to one geographical region in Ghana. Generalisations to other regions or education systems should be made with caution.

4.6 Suggestions for Future Research

Future investigations could extend the current study in several meaningful directions. Longitudinal studies would allow researchers to trace the evolution of student attitudes over time and assess their long-term impact on achievement trajectories. Additionally, mixed-methods research could provide a richer, more holistic understanding of how attitudes manifest in classroom contexts by integrating student voice, teacher perspectives, and classroom observations.

Experimental or quasi-experimental studies could also be employed to test specific interventions designed to boost confidence, reduce learned helplessness, or enhance enjoyment in mathematics. For instance, programs incorporating peer mentoring, gamification, or real-life problem solving could be examined for their effectiveness. Comparative studies across different school types, regions, or countries would also help identify contextual factors that mediate the relationship between attitudes and performance. Furthermore, future studies could explore how these affective constructs interact with cognitive strategies, teacher behaviours, and school climate to produce academic outcomes.

4.7 Ethical Clearance

At the time this study was conducted, formal ethical clearance was not a mandatory institutional requirement at the university, as this research formed part of a doctoral thesis. However, all ethical principles relevant to educational research involving human participants were carefully observed. The researcher obtained a letter of introduction from the Department of Mathematics and ICT Education, of the University of Cape Coast, Ghana, which was presented to the heads of the participating schools to formally request permission to conduct the study. Approval was subsequently granted by school authorities before any data collection began. All student participants were fully informed about the purpose and scope of the research and were assured that their participation was entirely voluntary. Confidentiality and anonymity were maintained throughout the study, and no personally identifiable information was collected. Students were also informed of their right to withdraw from the study at any point without any negative consequences. Data were securely stored and used solely for academic and research purposes. The study adhered to the ethical principles of respect for persons, beneficence, and academic integrity throughout the research process.

4.8 Statements and Declarations

Funding

The author received no financial support, *funds, grants, or other support* for conducting this research, writing the article, or publishing it.

Conflict of Interest

The author states that there is no conflict of interest.

References

- Abreh, M. K., Owusu, K. A., & Amedahe, F. K. (2018). Trends in performance of WASSCE candidates in the science and mathematics in Ghana: Perceived contributing factors and the way forward. *Journal of Education*, 198(1), 113-123.
- Aguilar, J. J. (2021). High school students' reasons for disliking Mathematics: The intersection between teacher's role and student's emotions, belief and self-efficacy. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3, em0658), 1-11.
<https://doi.org/https://doi.org/10.29333/iejme/11294>
- Agyei, E., Agamah, D. C., & Entsie, G. (2022). Availability of Manipulatives in Teaching and Learning of Mathematics in Colleges of Education in Ghana. *American Journal of Educational Research*, 10(4), 188-193.
- Ajzen, I. (1991). The theory of planned behavior. *Organizational behavior and human decision processes*, 50(2), 179-211.
- Andamon, J. C., & Tan, D. A. (2018). Conceptual understanding, attitude and performance in mathematics of grade 7 students. *International Journal of Scientific & Technology Research*, 7(8), 96-105.
- Awoniyi, F. C. & Fletcher, J. A. . (2013). Senior high school mathematics teachers' use of school-based assessment guidelines and test scores in the Cape Coast Metropolis of Ghana. *Journal of Educational Development and Practice*, 4(1), 19–40.
<https://doi.org/10.47963/jedp.v4i.958>
- Biber, M., & Baser, N. (2012). The influence of affective factors on students' mathematical gains in the process of problem based learning. *Unpublished PhD Thesis, Dokuz Eylül University, İzmir*.
- Capuno, R., Necesario, R., Etcuban, J. O., Espina, R., Padillo, G., & Manguilimotan, R. (2019). Attitudes, Study Habits, and Academic Performance of Junior High School Students in Mathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(3), 547-561. <https://doi.org/https://doi.org/10.29333/iejme/5768>
- Chen, L., Bae, S. R., Battista, C., Qin, S., Chen, T., Evans, T. M., & Menon, V. (2018). Positive attitude toward math supports early academic success: Behavioral evidence and neurocognitive mechanisms. *Psychological Science*, 29(3), 390-402.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1177/0956797617735528>

- Fennema, E., & Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for research in Mathematics Education*, 7(5), 324-326.
- Field, A. (2013). *Discovering statistics using SPSS and sex and drugs and rock 'n' roll* (4th ed.). SAGE publications Ltd.
- Fishman, J., Yang, C., & Mandell, D. (2021). Attitude theory and measurement in implementation science: a secondary review of empirical studies and opportunities for advancement. *Implementation Science*, 16, 1-10.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1186/s13012-021-01153-9>
- Fletcher, J. (2018). Performance in Mathematics and Science in basic schools in Ghana. *Academic Discourse: An International Journal*, 10(1), 1-18.
- Gosselin, R-D. (2024). Testing for normality: a user's (cautionary) guide. *Special Issue: Biostatistics*, 58(5), 433- 437. DOI: 10.1177/00236772241276808
- Hagan, J. E., Amoaddai, S., Lawer, V. T., & Atteh, E. (2020). Students' perception towards mathematics and its effects on academic performance. *Asian Journal of Education and Social Studies*, 8(1), 8-14. <https://doi.org/10.9734/AJESS/2020/v8i130210>
- Hannula, M. S., Di Martino, P., Pantziara, M., Zhang, Q., Morselli, F., Heyd-Metzuyanin, E., Lutovac, S., Kaasila, R., Middleton, J. A., & Jansen, A. (2016). *Attitudes, beliefs, motivation and identity in mathematics education: An overview of the field and future directions*. Springer Nature.
- Hannula, S. M. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 165-178. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9019-8>
- Hwang, S., & Son, T. (2021). Students' Attitude toward Mathematics and Its Relationship with Mathematics Achievement. *Journal of Education and e-Learning Research*, 8(3), 272-280.
- Das, K. R. & Imon, A. H. M. R (2016). A Brief Review of Tests for Normality. *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*. 5(1), 5-12.
<https://doi.org/10.11648/j.ajtas.20160501.12>
- Kiwanuka, H. N. V. D., J., Van den Noortgate, W., & Reynolds, C. (2020). Temporal relationship between attitude toward mathematics and mathematics achievement. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51, 1-25.
- Lim, S. Y., & Chapman, E. (2015). Identifying affective domains that correlate and predict mathematics performance in high-performing students in Singapore. *Educational Psychology*, 35(6), 747-764. <https://doi.org/10.1080/01443410.2013.860221>
- Mazana, M. Y., Montero, C. S., & Casmir, R. O. (2020). Assessing students' performance in mathematics in Tanzania: the teacher's perspective. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3), em0589.
- Ministry of Education (2010). Teaching Syllabus for Core Mathematics: Senior High School 1 – 3. Accra: Ministry of Education, Science and Sports. <https://mingycomputersgh.files.wordpress.com/2015/03/core-maths-syllabus2.pdf>

- National Council for Curriculum and Assessment. (2018). *National Pre-tertiary Education Curriculum Framework for Developing Subject Curricula*. Accra: Ministry of Education.
- National Council for Curriculum and Assessment. (2020). *Mathematics Common Core Programme Curriculum: B7 - B10*. Accra: Ghana Education Service Retrieved from <https://curriculum.nacca.gov.gh/wp-content/uploads/2020/02/MATHEMATICS-CCP-CURRICULUM-B7-B10-DRAFT-ZERO.pdf>
- Pallant, J. (2020). *SPSS Survival Manual: A step by step guide to data analysis using IBM SPSS* (7th ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003117452>
- Pituch, K.A., & Stevens, J. P. (2015). *Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences: Analyses with SAS and IBM's SPSS*, Sixth Edition (6th ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315814919>
- Raps, C. S., Peterson, C., Jonas, M., & Seligman, M. E. (1982). Patient behavior in hospitals: Helplessness, reactance, or both? *Journal of Personality and Social Psychology*, 42(6), 1036.
- Schunk, D. H., & DiBenedetto, M. K. (2020). Motivation and social cognitive theory. *Contemporary educational psychology*, 60, 101832. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.101832>
- Tapia, M., & Marsh, G. E. (2000, November, 15-17). *Attitudes toward mathematics instrument: An investigation with middle school students* Annual Meeting of the Mid- South Educational Research Association, Bowling Green, KY.
- Wang, G., Du, H., & Liu, Y. (2009). Case study on improving high school students with learning difficulties in mathematics. *Journal of mathematics Education*, 2(2), 122-133.

R&E-SOURCE

Eigentümerin und Medieninhaberin:
Pädagogische Hochschule Niederösterreich
Mühlgasse 67, 2500 Baden
www.ph-noe.ac.at | journal.ph-noe.ac.at

Die Beiträge der Zeitschrift **R&E-SOURCE** erscheinen unter der Lizenz CC-BY-NC-ND.
2025 by Pädagogische Hochschule Niederösterreich
ISSN 2313-1640

Die nächste reguläre Ausgabe von **R&E-SOURCE** im 12. Jahrgang des Journals widmet sich dem
Thema

[zukünfte.lernen/learning.futures](#)

Einreichungen sind bis 31. Juli 2025 herzlich willkommen unter
<https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/about/submissions>
Erscheinungsdatum: 15. Oktober 2025