R&E SOURCE

research & education

More of Mathematics

11. Jg. (2024), Nr. 2

Konferenzband zum

Tag der Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Editorial

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2024.i2.a1341

Am 22. Februar 2024 fand in bewährter Weise der Tag der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich statt. In diesem Jahr widmete sich die Tagung der Frage, wie wir alle Lernenden erreichen können und wie Mathematikunterricht gestaltet werden kann, sodass Mathematik nicht zum Problem(fach) wird.

Mathematik wird oft als Angstfach bezeichnet, ein Unterrichtsgegenstand, mit dem mehr Schüler*innen Schwierigkeiten haben als mit anderen. Auch nationale und internationale Vergleichstests zeigen, dass in Mathematik durchaus noch Aufholbedarf gegeben ist. Doch warum ist das so und wie können wir Unterricht so gestalten, dass Schüler*innen einen positiven Zugang zu Mathematik erleben können? Vielfach werden mathematische Aufgaben mit einem richtigen Rechenergebnis in Verbindung gebracht. Doch gerade während des Lernprozesses gehören Fehler dazu und sind wichtige Lerngelegenheiten. In ihrem Eröffnungsvortrag widmete sich Yasmin Theile von der Universität Köln diesem Thema und zeigte, wie Lehrpersonen mit unterschiedlichen Fehlern umgehen und welche Rolle die Reaktionen von Lehrpersonen für die Lernprozesse von Schüler*innen spielen.

In der zweiten Keynote stellte Christina Krause Ansätze vor, wie der Körper zum Mathematiklernen als Ressource für taube und blinde Lernende genutzt werden kann und welche Perspektiven sich daraus für einen inklusiven Mathematikunterricht ergeben.

Die zahlreichen Workshops und Vorträge widmeten sich unterschiedlichen mathematischen Themenbereichen von der Volksschule bis zur Sekundarstufe 2. Dabei stand eine handlungsorientierte, lustbetonte Umsetzung mathematischer Aufgaben, die zu einem grundlegenden Verständnis bei Schüler*innen führen, im Mittelpunkt. Einige Workshops beschäftigten sich mit dem Thema Sprache(n) in Mathematik. Das Angebot reichte von integrativem Fremdsprachenunterricht über Gebärdensprache im bilingualen Mathematikunterricht bis zur Bedeutung des Erlernens von Begriffen. Weitere Workshops und Vorträge befassten sich mit dem Einsatz digitaler Medien im Unterricht und nahmen neue Themen des Lehrplans 2023 auf, um handlungsorientierte Möglichkeiten zur Umsetzung vorzustellen.

Zwischen den Vorträgen und Workshops konnten die Teilnehmenden die Bücher- und Materialstände einiger Verlage oder das reichhaltige Buffetangebot der Hochschülervertretung nutzen, ins Gespräch kommen und so zu einer schulstufen- und schulartenübergreifenden Vernetzung beitragen.

Ein besonderer Dank gilt dem Team der Mathematiker*innen der PH Niederösterreich, die durch ihre Unterstützung zu dieser erfolgreichen Tagung mit Teilnehmenden aus mehreren Bundesländern sowie angrenzenden Nachbarländern beigetragen haben. Ein großes Dankeschön auch an die Hochschülervertretung für die Organisation und Betreuung des Buffets.

Sabine Apfler

R&E SOURCE
11. Jg. (2024), Nr. 2 – More of Mathematics
Konferenzband zum Tag der Mathematik

Tinkercad

Zwischen tüfteln und herumspielen

Isabella Linzer-Sommer[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2024.i2.a1339

Zusammenfassung

Tinkercad ist eine freie Webapplikation von Autodesk für 3D Design, Elektronik und Coding. In kürzester Zeit können in diesem Programm Dateien für den 3D-Druck erstellt werden.
Tinkering wird im SienceCenter Netzwerk als „tüfteln“ oder „technisches basteln“ übersetzt, im engeren Sinne bedeutet tinkering „mit etwas herumspielen“. In diesem Beitrag wird der Frage nachgegangen, inwieweit Tinkercad auch zur Vermittlung von Geometrieinhalten im Rahmen von Unterricht eingesetzt werden kann und das Raumvorstellungsvermögen der Lernenden schult.
Dazu werden zunächst Merkmale formuliert, die ein CAD-Paket aufweisen sollte, um damit Geometrie im schulischen Kontext betreiben zu können. Anschließend werden anhand von Einstiegsbeispielen für CAD-Programme die grundlegenden Funktionen des Programms vorgestellt und auch die Grenzen desselbigen aufgezeigt.

Stichwörter: Tinkercad, CAD-Software, Raumgeometrie

1 Einleitung

War vor 20 Jahren das Arbeiten mit einem CAD-Pakte nur nach einer intensiven Einarbeitungsphase möglich und daher eher wenig verbreitet (Müller, 2006), ist mit der derzeit verfügbaren 3D-Software ein sehr niederschwelliger und meist kostenfreier Einstieg in die die Welt der Modellierung möglich. Die Geometrie-Lehrperson hat nun die Möglichkeit, aus einer Vielzahl von Produkten das passende Softwarepaket für die Lernenden herauszusuchen, auszuwählen und im Unterricht damit zu arbeiten.

[1] Pädagogische Hochschule Niederösterreich, Mühlgasse 67, 2500 Baden.
E-Mail: *isabella.linzer@ph-noe.ac.at*

Spätestens seit der Forderung des verpflichtenden Einsatzes einer 3D-Software im Lehrplan des Unterrichtsfaches Geometrisches Zeichnen stellt sich nicht mehr die Frage ob, sondern nur mehr wie man CAD-Pakete in den Unterricht integriert. Im Lehrplan heißt es dazu:

> Geometrische Objekte in unterschiedlichen Rissen mithilfe von Raumtransformationen und Booleschen Operationen unter Verwendung von Konstruktionszeichnungen und 3D-Software erzeugen und bearbeiten sowie die Raumvorstellung stärken. (LP-M, MS, S.74)[1].

Dabei wird auf das übergreifende Thema Informatische Bildung verwiesen. Der Medieneinsatz trägt auch dazu bei, „digital unterstützten Unterricht mit innovativen Lern- und Lehrformen“ (LP-A, AHS und MS)[2] durchführen zu können.

Der steigenden Bedeutung des Computereinsatzes wird im neuen Lehrplan insofern Rechnung getragen, als dass das Modellieren mit Geometrie Software nicht als eine zu erwerbende Kompetenz abgebildet wird, sondern neben haptischen Modellen sowie Freihandzeichnen und Konstruktionen als dritte Methode, Modellieren mit CAD-Software, angeführt wird, um „geometrische Denkleistungen zu unterstützen und zu visualisieren“ (GZ Lehrplan, S. 93).

Genauso wenig wie es „Zirkelgeometrie“ oder „Geodreieckgeometrie“ gibt, sollte auch nicht die CAD-Software Ausgangspunkt für die Unterrichtsplanung sein, sondern zuerst die zu vermittelten geometrischen Inhalte festgelegt und dann die richtige Methode für den Erwerb dieser Kompetenz gewählt werden. Ohne Zweifel ist dieser Ansatz manchmal obsolet. Manche geometrischen Inhalte, wie Boolesche Operationen oder Freiformkurven und -flächen, sind erst durch den Einsatz von Computern zu verpflichtenden Inhalten im Schulunterricht geworden. Solche Themenbereiche sind sinnvollerweise mit den Schüler*innen auch auf diesen zu erarbeiten und zu festigen.

2 Kriterienkatalog zur Beurteilung von CAD-Software im Schulunterricht

Geometrische Inhalte bilden die Grundlage für die in diesem Abschnitt aufgestellten Kriterien, welche zur Beurteilung von im Unterricht verwendeter 3D-Software herangezogen werden.

Im Lehrplan des Unterrichtsfaches Geometrisches Zeichnen wird der Kompetenzbereich *Geometrische Objekte und ihre Eigenschaften* anhand der drei Handlungsdimensionen wie folgt beschrieben:

> Die Schülerinnen und Schüler können
> – geometrische Objekte analysieren, ihre Eigenschaften erfassen und beschreiben sowie die Verwendung eines bestimmten geometrischen Objekts begründen. (H1)
> – unterschiedliche Darstellungsformen von geometrischen Objekten erstellen. (H2)
> – die Gestalt von Objekten aus unterschiedlichen Darstellungsformen erkennen und beschreiben. (H3). (GZ-LP 2023, S. 93)

2.1 Geometrisch bedingte Kriterien

Bei der Auswahl der 3D-Software sind zuerst die geometrischen Aspekte des Produkts von Bedeutung. Es sollte möglich sein, mit dem Produkt möglichst viele Themenbereiche des Lehrplans zu bearbeiten. Aus diesen geometrisch bedingten Vorgaben, welche den aktuellen Lehrplänen entnommen werden können, ergeben sich die ersten vier Kriterien, welche in den nächsten Absätzen näher beschrieben werden.

Mit Hilfe der vorgegebenen Grundkörper einer Software können geometrische Objekte modelliert werden und so Eigenschaften von diesen Körpern gefestigt und vertieft werden. Im Hinblick auf die übergeordneten Ziele des Lehrplans sollen geometrische Eigenschaften von Objekten einen Beitrag zur *Förderung der sprachlichen Bildung* leisten. Die Bezeichnung von geometrischen Grundkörpern ist in den CAD-Paketen gewöhnungsbedürftig und fördern dadurch nicht unbedingt den Erwerb des Fachvokabulars. Von den für die Schule relevanten Grundkörper, Prisma, Pyramide, Polyeder, Kugel, Drehkegel, Drehzylinder (GZ-LP 2023, S. 93) welche unter den *Anwendungsbereichen* des Lehrplans genannt werden, können. Zudem bieten viele Programme unter *Extrusionskörper* ein mächtiges Werkzeug an, welches in verschiedenen Sonderfällen zu einigen dieser Grundkörpern führt. Extrusionskörper werden dabei wie folgt definiert:

Grundkörper

- Prisma
- Pyramide
- Polyeder
- Kugel
- Drehkegel
- Drehzylinder

> Verschiebt man eine beliebige ebene Fläche, so überstreicht sie einen Extrusionskörper. Die erzeugende Fläche nennt man das Profil des Extrusionskörpers. (Pillwein et al., 2016, S. 46)

Ist die Extrusionsrichtung normal zur Trägereben des Flächenstücks, entstehen gerade Extrusionskörper. Damit rücken je nach Software automatisch verschiedene Erzeugungsweisen von geometrischen Körpern in den Mittelpunkt des Interesses.

Für die verschiedenen Arten von Durchdringungen von Körper stehen im professionellen CAD- Bereich die drei mengentheoretischen Operationen Vereinigung, Differenz und Durchschnitt zur Verfügung (Husty, 2004, S. 103). Diese ermöglichen eine Vielfalt von Gestaltungsmöglichkeiten und haben in den letzten Jahrzehnten die Baugeometrie maßgeblich beeinflusst.

Boolsche Operationen

- Vereinigung
- Durchschnitt
- Differenz

Beim Modellieren mit einem CAD-Paket sind nicht nur die ebenen Kongruenztransformationen wie Schiebung, Drehung und Spiegelung von Interesse, sondern auch weitere ebene Ähnlichkeitstransformationen. Diese ermöglichen es Objekte zu vergrößern oder zu verkleinern, wie zum Beispiel die zentrische Streckung, oder Objekte mit verschiedenen Faktoren zu skalieren. Im Raum kommt als weitere Kongruenztransformation noch die Schraubung, als Verknüpfung einer Drehung und einer Schiebung, dazu (Pottmann et al., 2010, S. 143).

Transformationen

- Schiebung
- Drehung
- Spiegelung
- Streckung
- Skalierung
- Schraubung

Für weitergehende Konstruktionen sind Punkteingabe, das Messen und Übertragen von Strecken und Winkel sowie die Konstruktion von Strecken- und Winkelsymmetralen in Ebenen allgemeiner Lage wünschenswerte Modellierhilfen. Zudem vereinfacht das Errichten von Normalen und das Konstruieren von Normalebenen weiterführende Modellierungen.

Konstruieren

- Strecken zeichnen
- Längen übertragen
- Winkel zeichnen
- Winkelsymmetrale
- Streckensymmetrale
- Normale
- …

2.2 Nicht geometrisch bedingte Kriterien

Snappen, Layer, Benutzerkoordinatensystem, Welt-koordinatensysteme und Rendern sind Begriffe und Themen, die im professionellen CAD-Bereich für effizientes Arbeiten verantwortlich sind. Insbesondere das Snappen, auch als Punktfang bezeichnet, ist unverzichtbar, da ohne ihn keine exakten Konstruktionen möglich sind. Beim Konstruieren ist die kontinuierliche Drehung der modellierten Objekte hilfreich.

CAD-Spezifika

- Snappen
- Layer
- WKS und BKS
- Rendern/Darstellung
- …

Neben möglichst geringen Kosten sollte vor allem die Installation der Software auf dem eigenen Laptop unkompliziert und wenn möglich plattformunabhängig funktionieren. Die Export Files von fertig modellierten Objekten ermöglichen die Weitergabe der Informationen an Lasercutter oder an den 3D-Drucker. Eine leicht zu bedienende Schnittstelle ist hierbei für einen projektorientierten Einsatz in der Schule äußerst nützlich.

Sonstiges

- Zugang
- Kosten
- Plattform (Android, Apple, OS)
- Schnittstellen: 3D-Druck, Lasercutten, ...

3 Beispiele für den Anfangsunterricht

Für den konkreten Einsatz im Unterricht gibt es einige Beispiele, die sich softwareunabhängig für den Einstieg in eine CAD-Software eignen und den Erwerb von geometrischen Kompetenzen fördern.

Aufgabe 1: Grundkörper erzeugen

Für den allersten Einstieg in ein Programm können die Grundkörper in verschiedenen Größen und Farben erzeugt werden. Zur Schulung der Fachsprache und zur Förderung der Raumvorstellung wurde diese erste Aufgabe nur verbal formuliert. Für individuelle Differenzierung des Schwierigkeitsgrades können unterstützend Abbildungen in Form von Screenshots in geordneter oder ungeordneter Reihenfolge zur Verfügung gestellt werden.

Würfel und Quader

- Erstellen Sie zwei gelbe Würfel mit der Kantenlänge a = 10!
- Stellen Sie einen Quader mit einer quadratischen Grundfläche mit der Länge 10 und der Höhe h = 30 berührend zwischen die beiden gelben Würfel!
- Erstellen Sie einen blauen Quader mit Breite b = 10, Höhe h = 5 und Länge l = 30 und platzieren Sie diesen mittig auf den roten Quader.

Hinweis: Aufgabe 1 kann beliebig erweitert werden, indem Schüler*innen andere Kombinationen von Grundkörper verbal beschreiben und diese Beschreibungen an ihre Mitschüler*innen zum Modellieren weiterreichen.

Lösungsvorschlag:

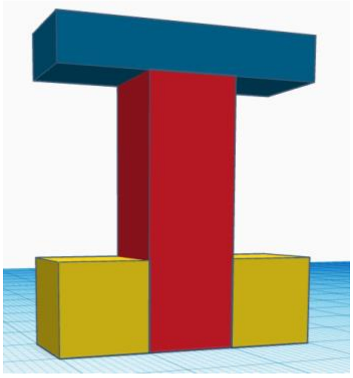


Abbildung 1: Lösungsvorschlag Beispiel 1 (Eigendarstellung)

Aufgabe 2: Bauwerke mit Bauklötzen

- Nehmen Sie sich Bauklötze!
- Bauen Sie ein beliebiges Gebäude!
- Modellieren Sie es nun in Tinkercad nach!

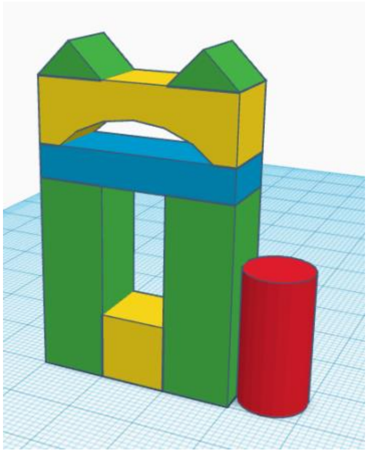


Abbildung 2: Bauwerk
(Eigendarstellung)

Differenzierung: Der gekrümmte Baustein erfordert bereits Boolesche Operationen und ist anspruchsvoller zu erzeugen als die anderen Grundkörper. Ebenso ist das Abfasen von ausgewählten Kanten eines Objekts nur mit Hilfe von Booleschen Operationen möglich.

Aufgabe 3: SOMA-Würfel

Vier Würfel können auf mehrere verschiedene Arten zu Würfelvierlingen zusammengefügt werden. Neben den Würfelvierlingen in Form der „Stange“ und des „Quader“ (siehe Abbildung 3) gibt es noch weitere Kombinationen.

- Überlegen Sie, welche 4er Kombinationen noch möglich sind!
- Modellieren Sie die gefundenen Möglichkeiten in Tinkercad!

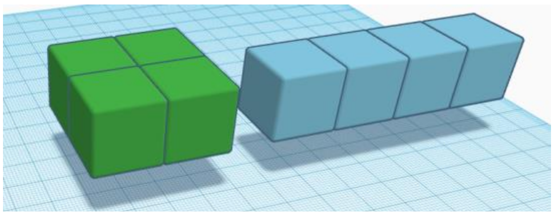


Abbildung 3: Stange und Quader
(Eigendarstellung)

Hinweis: Die Teile kann man anschließend ausdrucken und gemeinsam mit einem Würfeldrilling (Ecke) zu einem Somawürfel zusammenbauen. Abrunden der Kanten sieht schöner aus, erschwert jedoch den 3D-Druck!

Lösung: Es gibt abgesehen von der „Stange“ und dem „Quader“ noch 6 weitere nicht gleichsinnig kongruente Würfelvierlinge. Diese lassen sich gemeinsam mit einem Würfeldrilling zum Soma-Würfel zusammenbauen.

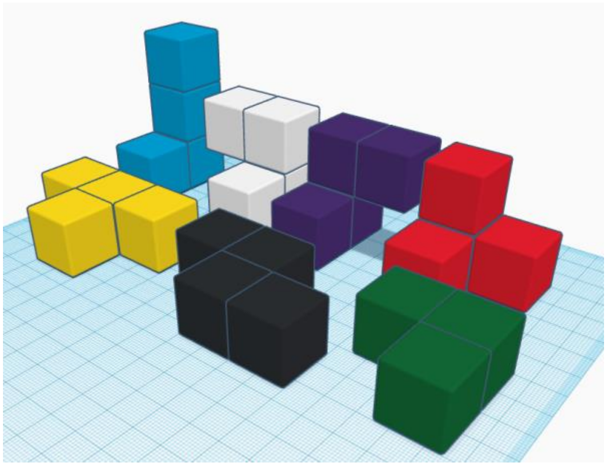


Abbildung 4: Soma Würfelteile (Eigendarstellung)

Aufgabe 4: Bauhaus Schach

Der deutsche Bildhauer Josef Hartig entwarf 1923 als Werkmeister am Staatlichen Bauhaus in Weimar Schachfiguren, welche aus den Grundkörpern zusammengesetzt sind.

- Recherchieren Sie im Internet und modellieren Sie möglichst viele diese Schachfiguren!

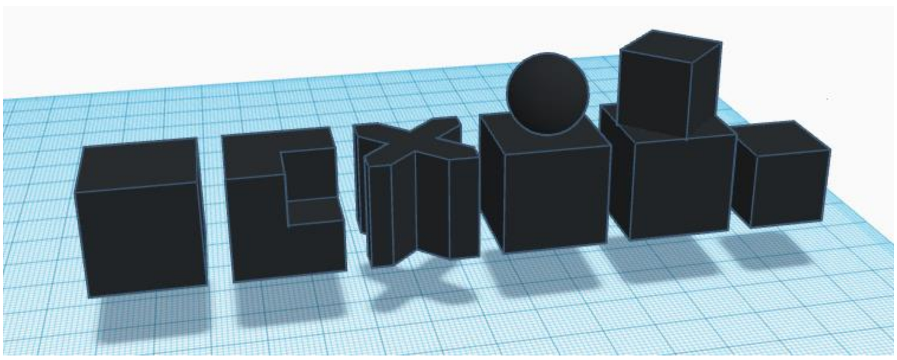


Abbildung 5: Bauhaus Schachfiguren (Eigendarstellung)

4 Tinkercad

Als webbasierte Lösung bietet Tinkercad einen schnellen und kostenlosen Einstieg in ein 3D-Softwarepaket. Nach der kostenfreien Registrierung können von einer Lehrperson Klassen angelegt werden; danach steht einerseits das Generieren von anonymen Nutzer*innen zur Verfügung und andererseits können die Teilnehmenden auch ihren eigenen „Maker Account“ anlegen. Im Schulbereich erfreut sich Tinkercad steigender Beliebtheit, da das Programm mit Hilfe von STL-Dateien eine Schnittstelle für 3D-Druck bietet und Lasercutter mittels SVG-Dateien angesteuert werden können.
Die Beispiele aus Abschnitt drei wurden alle mit Tinkercad erzeugt. Die Anwendbarkeit dieses Pakets für den GZ Unterrichts ist allerdings rasch erschöpft. Der Kriterienkatalog angewendet auf Tinkercad liefert folgendes Bild – grau hinterlegt sind Bereiche, die nur teilweise verfügbar sind, durchgestrichen wurden jene Bereiche, die aktuell nicht zur Verfügung stehen:

Grundkörper
- Prisma
- Pyramide 4-seitig
- Polyeder
- Kugel
- Drehkegel
- Drehzylinder

Boolsche Operationen
- Vereinigung
- Durchschnitt
- Differenz

Transformationen
- Schiebung
- Drehung
- Spiegelung
- Streckung
- Skalierung
- ~~Schraubung~~

Konstruieren
- ~~Strecken zeichnen~~
- ~~Längen übertragen~~
- ~~Winkel zeichnen~~
- ~~Winkelsymmetrale~~
- ~~Streckensymmetrale~~
- ~~Normale~~
- ...

CAD-Spezifika
- ~~Snappen~~
- ~~Layer~~
- WKS und BKS
- ~~Rendern/~~Darstellung
- ...

Sonstiges
- Zugang
- Kosten
- Plattform (Android, Apple, OS)
- Schnittstellen: 3D-Druck, Lasercutten, ...

Wie man sieht, sind die Möglichkeiten des Modellierens in Tinkercad begrenzt. Vor allem das Fehlen des Durchschnitts bei den Booleschen Operationen erschwert das Modellieren von aufwändigeren Objekten. Da mengentheoretisch $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ gilt, kann durch zweimaliges Gruppieren von Bohrungen der gewünschte Durchschnitt erzeugt werden; dies kann

jedoch nicht als ein komfortabler Zugang zu den Booleschen Operationen gelten. Auch beim Thema Raumtransformationen werden Spiegelungen und Drehungen nur um Objektmittelpunkte angeboten. Möchte man ein Objekt um eine Achse drehen, muss man zuerst die Drehachse z.B. in Form eines Drehzylinders positionieren. Anschließend wird das Objekt an der Drehachse gespiegelt und gruppiert. Hierauf kann die gesamte Objektgruppe in die gewünschte Position gedreht werden. Auch diese Vorgehensweise erschließt sich den Lernenden nicht intuitiv und muss entsprechend eingeübt werden.
Andererseits kann man mit Tinkercad auch Schaltkreise planen oder mit einer Vielzahl von vorgefertigten Bauteilen kreative Szenen modellieren. Dieses Herumspielen (= tinkering) mit allerlei Objekten stellt ohne Zweifel einen motivierenden Einstieg in die Welt der 3D-Software dar, für intensivere Geometrieschulungen ist das Programm jedoch nicht konzipiert. Das Produkt wirbt selbst mit „Tinkercad is a free web app for 3D design, electronics, and coding. We're the ideal introduction to Autodesk, a global leader in design and make technology.“ – und als solches kann es für ausgewählte Aspekte des Geometrieunterrichts herangezogen werden, deckt jedoch nicht alle im Unterricht geforderten Kompetenzen für 3D-Software ab.

5 Conclusio

Bei der Auswahl von CAD-Paketen für den Unterricht sollte man überprüfen, ob mit dem ausgewählten Produkt die erwünschten Kompetenzen überhaupt vermittelt werden können. Nicht alle CAD-Pakete stellen die grundlegenden Operationen und Grundkörper bereit, sind jedoch für einen ersten, intuitiven Einstieg in eine 3D-Software durchaus zu empfehlen, da das Handling dieser Produkte meist sehr einfach ist.

Literatur

Husty, M. (2004). *Darstellende Geometrie: Technische Mathematik.* Institut für Technische Mathematik, Geometrie und Bauinformatik; Universität Innsbruck. https://geometrie.uibk.ac.at/obsolete/Archiv/TechnischeMathematik/Dateien04/DG-Techmath-SS2004.pdf

Müller, T. (2006). *Die Bedeutung neuer Medien in der Fachdidaktik für den Unterrichtsgegenstand Darstellende Geometrie*. Wien, Techn. Univ., Diss., 2007.

Pillwein, G., Asperl, A. & Wischounig, M. (2016). *Raumgeometrie: Konstruieren und Visualisieren* (1. Auflage). Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG. https://permalink.obvsg.at/AC13308208

Pottmann, H., Asperl, A., Hofer, M. & Kilian, A. (Hrsg.). (2010). *Architekturgeometrie*. Springer Vienna.

[1] LP-M steht für Lehrplan Mathematik

[2] LP-GZ steht für Lehrplan Geometrisches Zeichnen

Sprachlos in Mathematik

Überfachliche Kompetenzen im Mathematikunterricht fördern

Monika Musilek[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2024.i2.a1280

Zusammenfassung

Der Erwerb überfachlicher Kompetenzen ist sowohl Voraussetzung als auch Ziel für langfristig erfolgreiche Bildungsprozesse. Es ist auch eine Aufgabe des Mathematikunterrichts, diese zu fördern. Kooperative Lernsettings bieten Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, sowohl fachliche als auch überfachliche Kompetenzen zu erwerben. In diesem Artikel wird zunächst eine klare Definition des kooperativen Lernens gegeben. Es werden potenzielle Erfolgsfaktoren erläutert und Normen für die Arbeit in Kleingruppen aufgezeigt. Möglichkeiten für die praktische Umsetzung werden beschrieben. Konkrete Beispiele für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 zeigen, wie kooperatives Lernen angewendet werden kann, um den Schüler*innen eine ganzheitliche Bildung zu ermöglichen.

Stichwörter: überfachliche Kompetenzen, kooperatives Lernen, Mathematikunterricht

1 Einleitung

Mathematik ist eines der ältesten Schulfächer. Vielleicht muss man gerade deshalb zu Beginn die Frage stellen: Wofür ist Mathematikunterricht da? Barzel et al. (2014, S. 27) formulieren hierzu sehr kompakt: „Mathematikunterricht dient dem Erwerb fachlicher, personaler und sozialer Kompetenzen." Im Lehrplan zum Unterrichtsfach Mathematik in der Sekundarstufe 1 sind die zentralen fachlichen Konzepte (Zahlen und Maße, Variablen und Funktionen, Figuren und Körper, Daten und Zufall) und ihre Verknüpfung mit den mathematischen Prozessen (Modellieren und Problemlösen, Operieren, Darstellen und Interpretieren, Vermuten und Begründen) angeführt (vgl. BGBl. II Nr. 1/2023, 2023, S. 55–56). Personale und soziale Kompetenzen sind dem Bereich „überfachliche Kompetenzen" (ÜFK) zuzuordnen (siehe Abbildung 1). Der Erwerb von überfachlichen Kompetenzen ist sowohl Voraussetzung als auch Ziel langfristig erfolgreicher Bildungsprozesse. Daher gilt es, die Entwicklung dieser bei der Gestaltung von Unterricht zu berücksichtigen und gezielt zu fördern (Heckt et al., 2019, S. 39).

[1] Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.
E-Mail: monika.musilek@phwien.ac.at

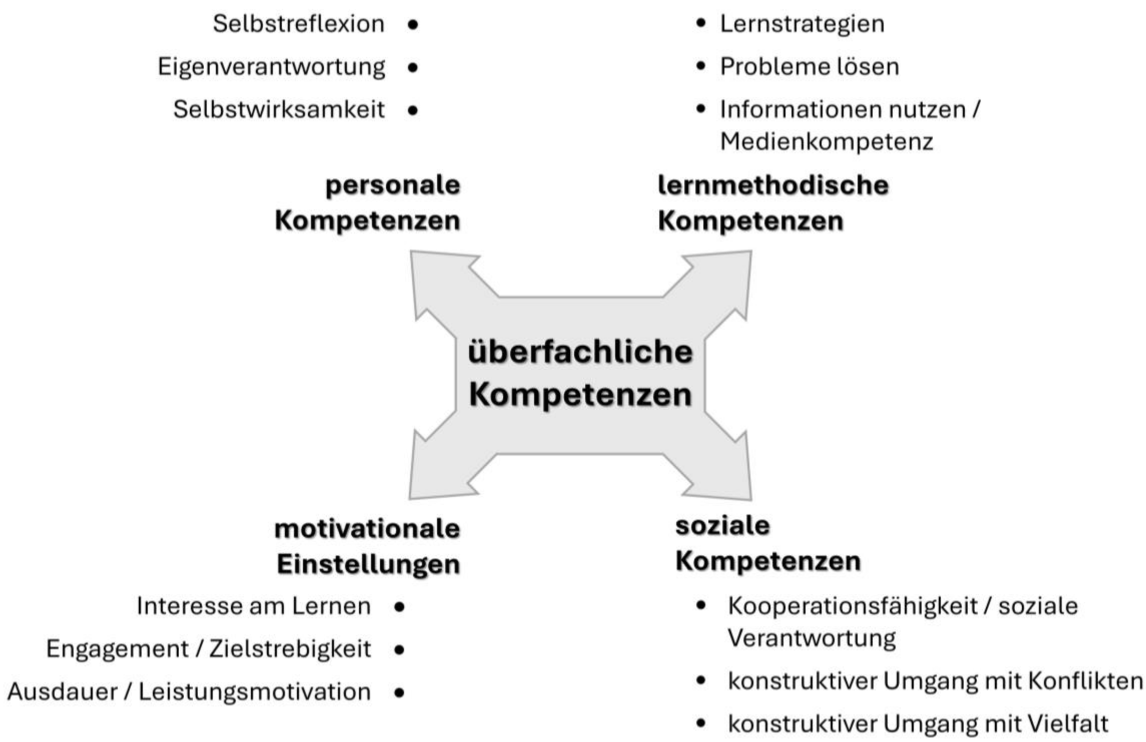


Abbildung 1: Überfachliche Kompetenzen
(eigene Darstellung in Anlehnung an Heckt et al., 2019, S. 40)

In diesem Beitrag wird zunächst eine begriffliche Klärung zum kooperativen Lernen vorgestellt. Es werden mögliche Gelingensbedingungen erläutert und Normen zum Arbeiten in Kleingruppen aufgezeigt. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit der praktischen Umsetzung, indem konkrete Beispiele für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 beschrieben werden.

2 Kooperatives Lernen

Eine Möglichkeit der gezielten Förderung aller Kompetenzen stellt das kooperative Lernen dar. Unter diesem Begriff werden Lernsettings zusammengefasst, welche

> „eine synchrone und koordinierte, ko-konstruktive Aktivität der Teilnehmer/innen verlangen, um eine gemeinsame Lösung eines Problems oder ein gemeinsam geteiltes Verständnis einer Situation zu entwickeln.“ (Pauli & Reusser, 2000, S. 421)

Idealerweise verbessern Schülerinnen und Schüler in solchen nicht nur ihre mathematischen Fähigkeiten, sondern können auch ihre sozialen Kompetenzen stärken. Eine Studie von Salvin (2013) kommt zu dem Schluss, dass kooperatives Lernen im Mathematikunterricht besonders effektiv ist, wenn es in kleinen Gruppen durchgeführt wird. Auch in der Metastudie von John

Hattie wird der Arbeit in kleinen Gruppen eine hohe Effektstärke zugeschrieben. Sie liegt mit d = 0,46 im Bereich der erwünschten, erstrebenswerten Effekten (*zone of desired effects*) (Hattie, 2023, S. 191). Hattie weist aber darauf hin, dass vor der Arbeit in Gruppen sichergestellt sein muss, dass alle Schülerinnen und Schüler über ausreichende Kenntnisse, Selbstvertrauen und Motivation verfügen. Daher sollte das notwendige inhaltliche Wissen vor der Gruppenbildung vermittelt werden. Andernfalls könnten viele Schülerinnen und Schüler zurückbleiben, sich nicht geschätzt fühlen und weniger zur Gruppe beitragen (vgl. Hattie, 2023, S. 191). Studien zur Wirksamkeit von Arbeit in Kleingruppen innerhalb einer Schulklasse zeigen übereinstimmend, dass Schülerinnen und Schüler möglicherweise Fähigkeiten zur Arbeit in Gruppen erlernen müssen (Hattie, 2023, S. 191).

In der Literatur werden grundlegende Merkmale für gelingendes kooperatives Lernen genannt (vgl. Bleck & Lipowsky, 2021; Brägger, 2017; Johnson et al., 2006; Jurkowski, 2011):

- positive Abhängigkeit der Gruppenmitglieder
  Die Aufgabe für die Gruppe muss so gestaltet sein, dass Lernende, um eine Lösung zu finden, sich für den eigenen Erfolg wie auch für den Erfolg der anderen einsetzen müssen. Das Ziel kann nur gemeinsam erreicht werden.
- individuelle Verantwortlichkeit des Einzelnen
  Jedes Mitglied einer Gruppe ist dafür verantwortlich, seinen Anteil an der Gruppenleistung zu erbringen. Aufgrund einer durchdachten Aufgabe für die Gruppe, mit klaren Zuweisungen wird „soziales Faulenzen“ erschwert.
- soziale Kompetenzen der Lernenden
  Beim Arbeiten in der Gruppe bedarf es bestimmter „Normen“ und damit verbundener Verhaltensmuster (siehe Abbildung 2).
- face-to-face-Interaktion zwischen den Gruppenmitgliedern
  Kooperatives Lernen lebt von der gegenseitigen Unterstützung und dem wechselseitigen Austausch. Gruppenmitglieder unterstützen sich sowohl sozio-emotional als auch aufgabeninhaltsbezogen, beispielsweise durch den Austausch von aufgabenrelevanten Informationen und Arbeitsmaterialien.
- Reflexion im Anschluss an den Gruppenprozess
  Die Gruppenmitglieder bewerten objektiv die Arbeit der Gruppe sowie ihren individuellen Beitrag zum Erfolg der gemeinsamen Arbeit und tauschen ihre Meinungen darüber aus. Sie diskutieren, wie gut sie ihre Ziele erreicht haben und welche Strategien ihnen beim Lernen geholfen oder dabei gehindert haben. Gleichzeitig identifizieren sie Verhaltensweisen, die sie ändern und verbessern möchten.

Normen	Verhalten
Auf die Bedürfnisse der anderen reagieren	Was braucht wer? Keiner ist fertig, bevor nicht alle fertig sind.
Beim Lernen unterstützen, Fragen stellen und erklären	Diskutieren und entscheiden. Begründen von Vorschlägen. Vorgangsweisen erklären. Jeder hilft mit. Anderen helfen, Dinge selbst zu tun. Herausfinden, was andere denken. Erklären, warum man was tut.
Gemeinsam an der Aufgabenstellung arbeiten	Jeder gibt Informationen. Gemeinsam einen Plan machen. Sich auf Strategien einigen. Eigene Ideen sagen. Zuhören, andere zu Wort kommen lassen. Nach Ideen der anderen fragen. Überlegungen begründen.

Abbildung 2: Normen und Verhalten beim Arbeiten in Gruppen
(vgl. Cohen & Lotan, Rachel A., 2014, S. 61)

Bei kooperativen Lernprozessen erfolgen der Wissenserwerb und die Problemlösung durch die Interaktion und den gegenseitigen Austausch. Hierbei steht Kommunikation im Zentrum. Diese kann aber nicht nur auf sprachlicher Ebene stattfinden. Man kann auch auf nonverbale, visuelle oder schriftliche Kommunikation setzen. Gerade wenn man überfachliche Kompetenzen fördern will, bietet es sich an, manches Mal auf gesprochene Sprache zu verzichten, also „sprachlos in Mathematik“ zu sein, um andere Kommunikationskanäle bewusst zu nutzen.

Im folgenden Abschnitt werden konkrete Beispiele für kooperative Lernsettings vorgestellt, die zum Ziel haben, die Förderung von mathematischen Inhalten, mathematischen Prozessen und überfachlichen Kompetenzen gleichermaßen anzuregen.

3 ÜFK im Mathematikunterricht fördern – Praxisbeispiele

Die kooperativen Lernsettings für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 werden in einer gleichbleibenden Struktur beschrieben. Die *Ziele* geben an, welche (fachlichen und überfachlichen) Kompetenzen durch den Einsatz dieses Lernsettings gefördert werden können. Die Rubrik *Material* gibt Auskunft darüber, welche Materialien verwendet werden dürfen. Die *Gruppengröße* weist drauf hin, aus wie vielen Mitgliedern die (Klein-)Gruppe idealerweise besteht. Die *Anweisung* formuliert den Auftrag für die Schülerinnen und Schüler. Eventuelle *Hinweise zur Unterstützung* der Lernenden werden gegeben und mögliche *Reflexionsfragen* zur Rückschau auf den Prozess der Gruppenarbeit angeführt. Außerdem werden *weitere Einsatzmöglichkeiten* des Materials bzw. Variationen der Ausgangsaufgabe im Unterricht vorgestellt. Unter dem Link am Ende dieses Beitrags können alle Lernsettings und zugehörige Materialien heruntergeladen werden.

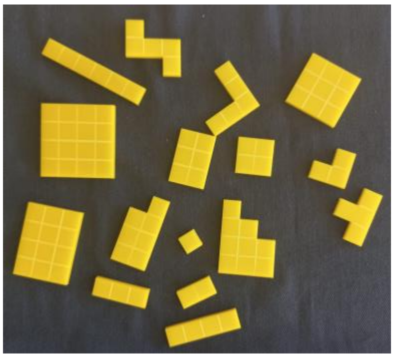
3.1 Jedem sein Rechteck

Dieses kooperative Lernsetting wurde nach einer Idee von nrich (2024a) adaptiert und weiterentwickelt.

Ziele:

- Wissen um Flächengleichheit bei Rechtecken einsetzen
- Bestimmen möglicher Abmessungen eines Rechtecks bei vorgegebenem Flächeninhalt
- auf die Bedürfnisse der anderen reagieren

Material:
16 Spielsteine, gestufte Hinweiskarten



Gruppengröße:
4 Personen

Anweisungen:
Nimm vier Spielsteine.
Lege sie offen vor dich hin.
Tausche mit den Mitspielenden die Spielsteine so, dass am Ende jede Person ein gleich großes Rechteck (aus genau vier Spielsteinen) vor sich liegen hat.

Weitere Regeln:
Es darf nicht gesprochen werden!
Du hast zu jeder Zeit mindestens zwei Spielsteine vor dir liegen.
Du darfst Spielsteine hergeben, aber nicht nehmen.

Hinweise zur Unterstützung:
Die Hinweise können bei Bedarf von der Lehrperson gegeben werden. Da dieses Lernsetting „sprachlos“ stattfindet, bietet es sich an, hier auch die Unterstützung in Stille zu geben, am besten mit gestuften Hinweiskarten, die sich die Lernenden bei Bedarf ansehen können.

1. Wie groß muss der Flächeninhalt für jedes einzelne Rechteck sein?
   Zählt man alle Kästchen auf den Spielsteinen, so sind es 96. Jede Person muss daher am Ende ein Rechteck mit 96:4 = 24 Kästchen haben.
2. Welche Abmessungen des Rechtecks können überhaupt vorkommen?
   24 muss in ein Produkt zerlegt werden.
   (möglich sind folgende Zerlegungen: 2 · 12, 3 · 8, 4 · 6)

3. Welche dieser Zerlegungen liefert die richtigen Abmessungen für das Rechteck?
   Es muss 4 · 6 seni, weil in dieser Zerlegung die einzige Möglichkeit besteht, das 4 · 4 – Quadrat unterzubringen.

Reflexionsfragen:

- Hat jemand bemerkt, was du brauchst?
- Wie hat er/sie versucht, dir zu helfen?
- Welche Herausforderungen sind aufgetreten, und wie habt ihr sie gemeistert?
- Was könntet ihr beim nächsten Mal verbessern, um effektiver zusammenzuarbeiten?

Weitere Einsatzmöglichkeiten:
Anhand der Materialien lassen sich weitere Aufgaben bearbeiten, so z.B.:

- Findet eine Möglichkeit, die Spielsteine zu ordnen. Beschreibt, nach welchem Merkmal ihr geordnet habt. (Quadrate, Rechtecke, Vierecke, Sechsecke, Achtecke)
- Findet eine Begründung, warum ihr mit den Spielsteinen kein Siebeneck legen könnt.
- Findet ihr Möglichkeiten mit Hilfe der Spielsteine einen der anderen Spielsteine auszulegen? Gibt es für dieselbe Figur mehrere Möglichkeiten? Was ist bei den Figuren gleich, was verschieden?
- Legt mit einigen Spielsteinen eine ebene Figur. Findet ihr eine Möglichkeit, diese mit anderen Spielsteinen auszulegen?
- Welche dieser Bauteile haben gleichen Flächeninhalt? Welche haben denselben Umfang? Gibt es Spielsteine, bei denen Flächeninhalt und Umfang übereinstimmen?

3.2 Ordnung muss sein

Ziele:

- Fachbegriffe zu geometrischen Körpern nutzen
- Eigenschaften von Körpern anwenden
- schriftliche Hinweise für die anderen Spielteilnehmer*innen vorlesen
- zuhören, wenn andere Lernende ihre Hinweise vorlesen

Material:
verschiedene geometrische Körper, Hinweiskarten, Zündhölzer

Gruppengröße:
6 Personen

Anweisungen
Verteilt die Hinweiskarten gerecht. (Jede Person sollte gleich viele Hinweiskarten erhalten.) Du darfst deine Hinweiskarten niemandem zeigen; nur du darfst sie anschauen. Du darfst sie aber vorlesen oder den Spielteilnehmenden sagen, was auf ihr steht. Einige der bereitgestellten Körper müssen in einem Raster angeordnet werden. Findet gemeinsam heraus, welche Körper ihr auswählen müsst und wie sie gestellt werden müssen.

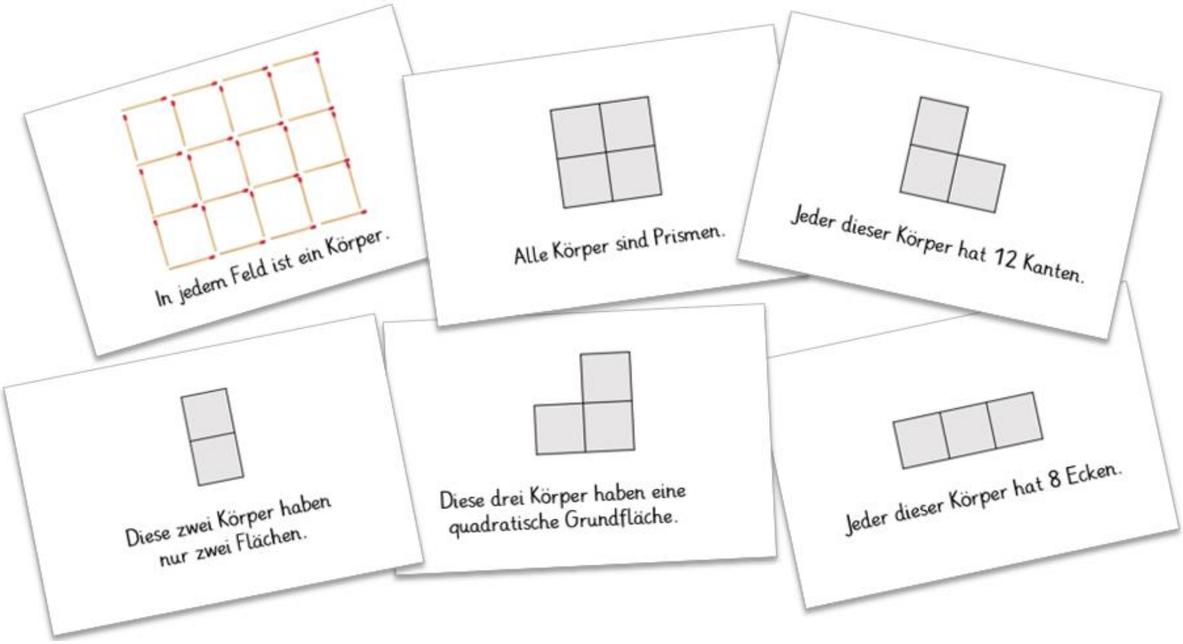


Abbildung 3: Hinweiskarten für „Ordnung muss sein“ (eigene Darstellung)

Hinweise zur Unterstützung:
Bei diesem kooperativen Lernsetting ist die Idee, nur über das Hören Informationen zu teilen. Die Lernenden lesen sich die Hinweiskarten gegenseitig vor und müssen im Blick haben, dass bei der Anordnung der Körper „ihre“ Karten erfüllt sind. Dabei verwenden sie Fachsprache, so zum Beispiel: Ecken, Kanten, Grundfläche, Prisma, … (siehe Abbildung 3)

Reflexionsfragen:
- Welche Dinge habt ihr in eurer Gruppe getan, die euch geholfen haben das Problem erfolgreich zu lösen?
- Welche Dinge habt ihr getan, die es schwieriger gemacht haben?
- Was könnten die Gruppen in Zukunft besser machen?
- Was hast du persönlich schwer gefunden? Was war leicht für dich? Warum?

Weitere Einsatzmöglichkeiten:
Die Lernenden können eine eigene Anordnung erfinden und ein Set von Hinweiskarten entwickeln. Hierbei geht es dann stark darum, zu begründen, ob diese Anordnung tatsächlich nur zu einer einzigen, eindeutigen Lösung führt.

3.3 Algebra Donut

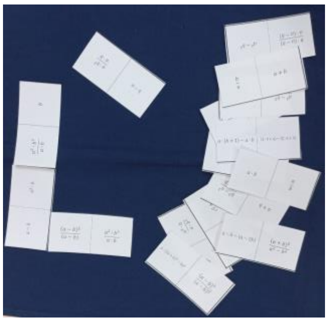
Dieses kooperative Lernsetting wurde nach einer Idee von nrich (2024b) gestaltet und weiterentwickelt.

Ziele:

- Terme umformen
- Gleichheit von Termen erkennen
- auf die Bedürfnisse der anderen reagieren

Material:

16 Algebra-Dominokarten mit Termen

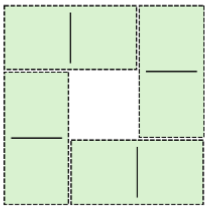


Gruppengröße:

4 Personen

Anweisungen:

Nimm dir vier Algebra-Dominokarten und lege sie offen vor dich hin.
Tausche mit den Mitspielenden die Algebra-Dominokarten so, dass am Ende jede Person einen Algebra-Donut vor sich liegen hat.



Algebra- Donut

Weitere Regeln:

Es darf nicht gesprochen werden!
Du hast zu jeder Zeit mindestens zwei Algebra-Dominokarten vor dir liegen.
Du darfst Algebra-Dominokarten hergeben, aber nicht nehmen.

Hinweise zur Unterstützung:

Manches Mal brauchen die Lernenden den simplen Tipp, dass sie die Terme auf den Feldern der Dominokarten vereinfachen dürfen, um so leichter ihre Gleichheit zu sehen.
Hinweise, die beim Lösungsprozess unterstützen können:

- Wie viele Dominokarten haben ein Feld mit dem Ergebnis a^2+b^2 ?
- Wie viele Dominokarten haben ein Feld mit dem Ergebnis $a^2 \cdot \mathrm{b}$?

Weitere Einsatzmöglichkeiten:

Man kann statt vier Algebra-Donuts auch gemeinsam daran arbeiten, eine geschlossene Dominokette zu legen. Lernende können mit einer Vorlage (die im Downloadbereich erhältlich ist) eigenständig eine Algebra-Dominokette erstellen.

Falls zu geringes Wissen oder noch keine Fertigkeiten im Bereich der Termumformungen vorliegen, kann eine ähnliche Übungen mit einem normalen Dominospiel (von 0-0 bis 6-6) gemacht werden.

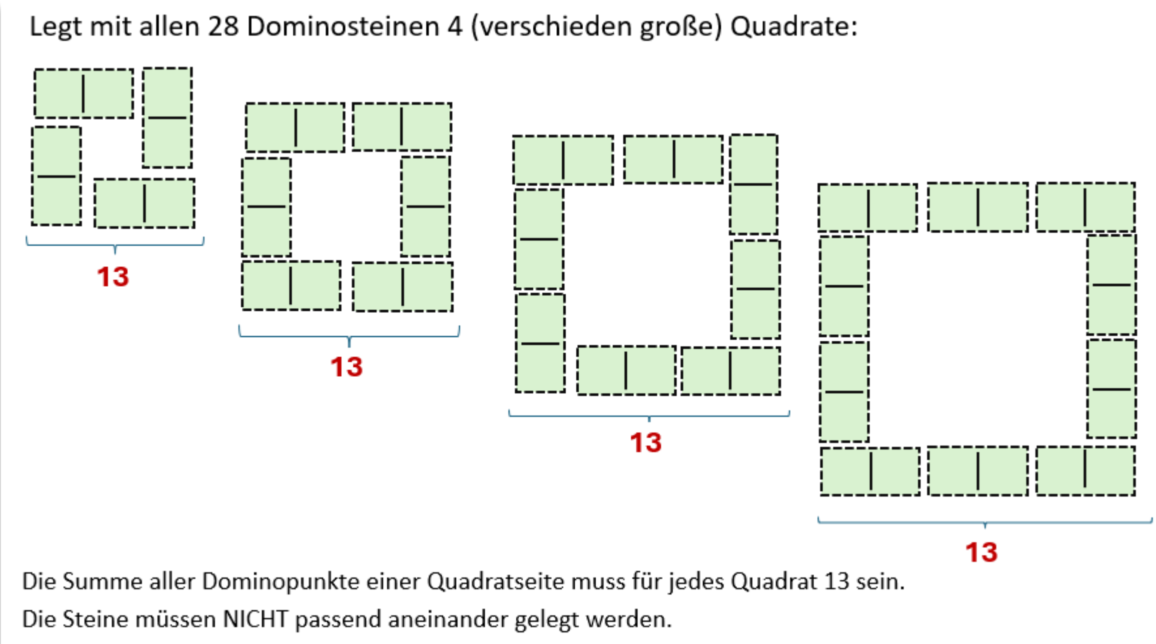


Abbildung 4: Variation zum Algebra-Donut (eigene Darstellung)

4 Zusammenschau

Mathematikunterricht dient nicht nur der Vermittlung von mathematischem Fachwissen, sondern trägt auch dazu bei, dass überfachliche Kompetenzen gefördert werden. Als eine methodische Umsetzung für den Unterricht bietet sich das kooperative Lernen an. Die vorgestellten konkreten Beispiele für kooperative Lernsettings haben zum Ziel, die Förderung von mathematischen Inhalten, mathematischen Prozessen und überfachlichen Kompetenzen gleichermaßen anzuregen.

Da die vorgestellten Lernsettings davon ausgehen, dass in Kleingruppen gearbeitet wird, zu denen die Lernenden zufällig zugeteilt werden, wird hier noch ein Kartenset (mit 24 Karten) vorgestellt, mit dem die Gruppenbildung erfolgen kann: Der Aufbau der Karten macht es möglich durch Anweisungen auf vielfältigste Weise Zufallsgruppen in bestimmter Größe zu generieren (siehe Abbildung 5).

Abbildung 5: Kartenset zur Bildung von Zufallsgruppen (eigene Darstellung)

Alle hier vorgestellten Materialien und weiterführende Überlegungen für den Unterricht können hier (https://shorturl.at/emFI2) nachgelesen werden.

Literatur

Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2014). *Mathematik-Methodik* (7. Aufl.). Cornelsen.

BGBl. II Nr. 1/2023 (2023). https://www.ris.bka.gv.at/eli/bgbl/II/2023/1

Bleck, V., & Lipowsky, F. (2021). Kooperatives Lernen – Theoretische Perspektiven, empirische Befunde und Konsequenzen für die Implementierung. In T. Hascher, T.-S. Idel, & W. Helsper (Hrsg.), *Handbuch Schulforschung* (S. 1–19). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-24734-8_44-1

Brägger, G. (2017). *Kartenset Kooperatives Lernen: 7 x 30 Schülerkarten für Feedback, Kommunikation und Kooperatives Lernen: ab Klasse 5*. Beltz.

Cohen, E. G., & Lotan, Rachel A. (2014). *Designing groupwork: Strategies for the heterogeneous classroom* (3. Aufl.). Teachers College Press.

Hattie, J. (2023). *Visible Learning: The Sequel: A Synthesis of Over 2,100 Meta-Analyses Relating to Achievement* (1. Aufl.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003380542

Heckt, M., Klitsche, S., & Pohlmann, B. (2019). Überfachliche Kompetenzen als Grundlage erfolgreicher Bildungsprozesse. *Hamburg macht Schule: Forschendes Lernen*, *02/2019*, S. 39–42.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Smith, K. A. (2006). *Active learning: Cooperation in the college classroom* (3. ed). Interaction Book Co.

Jurkowski, S. (2011). *Soziale Kompetenzen und Lernerfolg beim kooperativen Lernen*. Kassel Univ. Press.

nrich. (2024a). *Making Rectangles*. https://nrich.maths.org/6936

nrich. (2024b). *Simplifying Doughnut*. https://nrich.maths.org/6943

Pauli, C., & Reusser, K. (2000). Zur Rolle der Lehrperson beim kooperativen Lernen. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften*, *22*, S. 421–442. https://doi.org/10.25656/01:3747

Salvin, R. E. (2013). Cooperative Learning And Achievement: Theory And Research. In I. B. Weiner, W. B. Reynolds, & G. E. Miller (Hrsg.), *Handbook of psychology, Volume 7, Educational Psychology* (2. ed, Bd. 7, S. 179–198). Wiley.

Auf die Körper fertig, los!

Die Wirkung von Explorativem Lernen auf die Leistung und Motivation von Lernenden im Mathematikunterricht

Laura Ascher[1], *Martina Astrid Müller*[2]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2024.i2.a1329

Zusammenfassung

Exploratives Lernen ist geeignet, das Interesse von Lernenden zu wecken und sie aktiv als Gestalter*innen am eigenen Lernprozess zu beteiligen. Das eigene Handeln, Ausprobieren verschiedener Lösungsmöglichkeiten und Kommunikation innerhalb der Lernendengruppe tragen zu einem tieferen Verständnis bei. So gelingt es, dass mathematische Aufgabenstellungen zu keinem Problem werden. In diesem Artikel wird ein kurzer theoretischer Input zu explorativem Lernen gegeben. Es folgt ein Blick auf ausgewählte Ergebnisse einer empirischen Studie in Hinblick auf Leistungsfähigkeit und Motivation von Schüler*innen der Sekundarstufe 1. Konkrete im Unterricht erprobte Praxisbeispiele zeigen eine mögliche Umsetzung im Mathematikunterricht.

Stichwörter: Entdeckendes Lernen, Mathematikunterricht, Problemlösen, Motivation

1 Exploratives Lernen

Exploratives Lernen als Methode setzt auf den Wissensdrang der Lernenden, ermuntert zum eigenständigen Erkunden von Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten und betrachtet Schüler*innen als Mitverantwortliche am Lernprozess (Winter, 2016). Probleme werden aktiv gelöst, Fragestellungen bearbeitet und Experimente durchgeführt, wobei der Lehrkraft eine unterstützende Rolle zukommt, während die Lernenden im Mittelpunkt stehen. Diese Konzeption basiert auf Ideen der Reformpädagogik und erhielt ab den 1950er Jahren durch Jerome Bruner Anerkennung (Klewitz, 1977). Bruner betont die Bedeutung und das Ermöglichen stimmiger Übergänge zwischen den Darstellungsebenen „enaktiv-ikonisch-symbolisch" als entscheidend für jedes Lernen mathematischer Sachverhalte (Hilgers, 2018). Gerade in der heutigen, schnelllebigen Welt und sich rasch verändernden Gesellschaft wird Lernmethoden,

[1] Evangelisches Gymnasium & Werkschulheim, Erdbergstraße 222A, 1110 Wien.
E-Mail: ascher@bildung.gv.at
[2] Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.
E-Mail: martina.mueller@phwien.ac.at

die Jugendliche auf lebenslanges Lernen vorbereiten, große Bedeutung zugeschrieben. Durch das aktive Aneignen von Wissen führt exploratives Lernen zu tieferer Verarbeitung, nachhaltigerem Behalten und selbstgesteuertem Lernen (Leuders & Philipp, 2022). Problemlösen auf selbstbestimmter Basis, Lernmotivation, die in erster Linie von den Lernenden ausgeht und sogenanntes maßgeschneidertes Lernen sind für das Verständnis von Explorativem Lernen unerlässlich (Liebig, 2002).

1.1 Ablauf von Explorativem Lernen in Bildungseinrichtungen

Aktuell sind Lehrende in allen Schultypen mit einer Lernendengruppe konfrontiert, welche große Heterogenität aufweist, was ihnen unter anderem hohe diagnostische Kompetenz abverlangt. Explorative Settings bieten die Möglichkeit selbst zur diagnostischen Situation zu werden, da sie Lernenden die Möglichkeit bieten, „ihre heterogenen individuellen Sichtweisen und Kenntnisse zu entfalten“ (Leuders & Prediger, 2012, S. 40). In Abbildung 1 ist das grundlegende Muster des Ablaufs von Explorativem Lernen abgebildet.

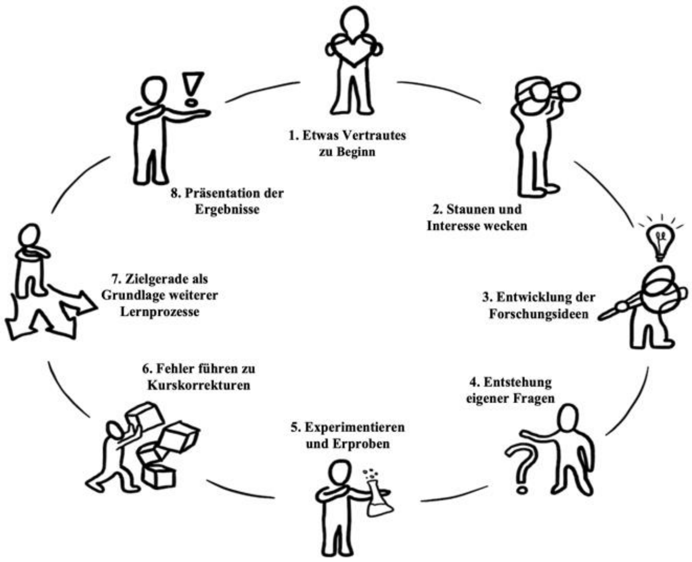


Abbildung 1: Ablauf von Explorativem Lernen nach Stangl (2023), (eigene Darstellung)

Bei dieser Lernmethode werden mehrere Phasen durchlaufen. Der Prozess beginnt mit bereits bekanntem Wissen und der Entstehung von Fragen. Erfolgreiche Lernprozesse werden durch aktiv-kreative Zugänge, die mit praktischen Lerntätigkeiten verbunden sind, begünstigt (Klippert, 2004). Die Entdeckung von Neuem führt zu Staunen und weckt Interesse. Nachfolgend entwickeln die Lernenden erste Ideen, Ansätze und Hypothesen, wie das Problem gelöst werden könnte. In einem aktiven Konstruktionsprozess wird Neues stimmig mit bereits vorhandenem Wissen verbunden. Damit werden individuelle Deutungsmuster des Lerners erweitert. Gelingt Verstehen, dann lassen sich Sachverhalte „aus eigener Kraft“ nachvollziehen und rekonstruieren (Lehner, 2018, S. 21). Es entstehen eigene, tiefgehende Fragen. Die darauffolgende Phase betont aktives Handeln und Experimentieren. Dabei werden Fehler akzeptiert, die möglicherweise zu Kurskorrekturen, neuen Ideen oder wiederholtem Erproben führen. Neu aufkommende Fragen können die Grundlage weiterer Lernprozesse bilden. Am Ende des explorativen Lernprozesses erfolgt die Dokumentation und Präsentation des Erlernten und Erforschten. Dies ist essenziell, um das Wissen zu teilen und besonders den Austausch mit anderen zu fördern (Stangl, 2023).

Der explorative Ansatz betont die Neugier und den Wissensdurst der Lernenden und betrachtet diese als aktive Teilnehmer*innen am Lernprozess. Hier liegt der Fokus auf intuitivem Handeln und selbstständigem Problemlösen in weniger strukturierten, realitätsnahen Situationen. Fehler werden als Chance betrachtet und gemeinsam analysiert.

2 Exploratives Lernen mit Zylinder und Drehkegel – eine empirische Untersuchung

Im Rahmen einer empirischen Studie wurde die Thematik „Zylinder und Drehkegel“ in vier Schulklassen untersucht. Dabei erhielten zwei Klassen herkömmlichen Unterricht, während die anderen beiden in explorativen Settings unterrichtet wurden. Im explorativen Unterricht wurde Schüler*innen in einer vorstrukturierten Lernumgebung die Möglichkeit geboten, Formeln zur Volumen- und Oberflächeninhaltsberechnung eigenständig zu erarbeiten. Sie hatten die Möglichkeit, durch aktives Handeln mit Faltnetzen und Schüttkörpern Zusammenhänge zu entdecken. Nach Abschluss des Unterrichts wurden alle Klassen hinsichtlich ihrer Motivation und Leistung untersucht (Ascher, 2023). Die Motivation der Lernenden wurde anhand konkreter Aussagen erhoben, die darauf abzielten, ihre Einstellung zum Mathematikunterricht und ihre Bereitschaft zur Teilnahme am Lernprozess zu erfassen. Um die Leistung zu erfassen, wurden Beispiele herangezogen, die den Grad des Verständnisses und die Anwendung der in der empirischen Studie erforschten Formeln überprüften. Daraus ließ sich ableiten, welchen Einfluss explorativer Unterricht auf die Motivation der Lernenden sowie auf deren Leistung in Bezug auf mathematische Konzepte hatte.

2.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Ergebnisse der von Ascher (2023) durchgeführten Studie zeigen, dass die Wahl der Unterrichtsmethode einen signifikanten Einfluss auf die Motivation der Schüler*innen hat (Abbildung 2).

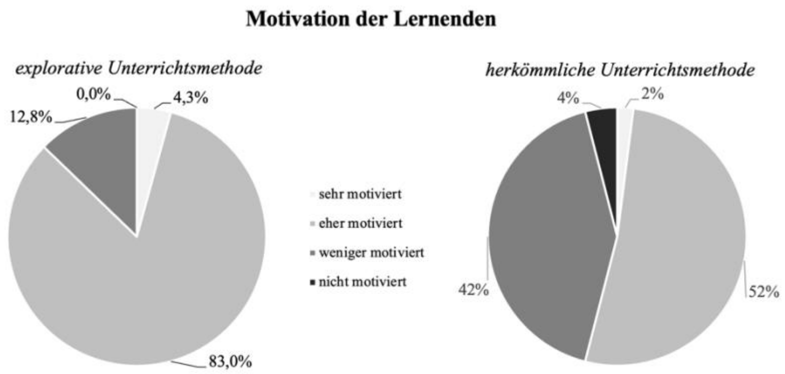


Abbildung 2: Motivation der Lernenden (eigene Darstellung)

Ein positiver Korrelationskoeffizient von 0,361 deutet darauf hin, dass Lernende bei der Anwendung explorativer Methoden höhere Motivation aufweisen. Ähnlich war der Zusammenhang zwischen der Unterrichtsmethode und dem Abschweifen der Gedanken im Mathematikunterricht. Lernende, welche explorative Settings erlebten, blieben demnach fokussierter als solche, die herkömmlichen Unterricht erfuhren.

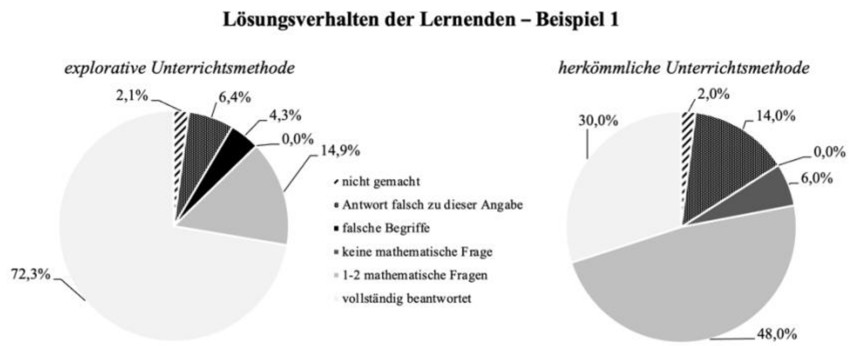


Abbildung 3: Lösungsverhalten der Lernenden – Beispiel 1 (eigene Darstellung)

In gleicher Weise konnte ein bedeutsamer Zusammenhang zwischen der gewählten Unterrichtsmethode und der Lösungswahrscheinlichkeit festgestellt werden (Abbildung 3). Schüler*innen, die durch exploratives Lernen unterrichtet wurden, zeigten eine verbesserte Leistung sowohl bei der ersten Aufgabe, welche auf einen mathematischen Blickwinkel abzielte, als auch bei der zweiten Aufgabe, bei der die Anwendung der richtigen Formel gefragt war. Explorativ lernende Jugendliche offenbarten somit eine gesteigerte Fähigkeit, mathematische Konzepte zu durchdringen und das erworbene Wissen erfolgreich in praktischen Aufgaben umzusetzen.

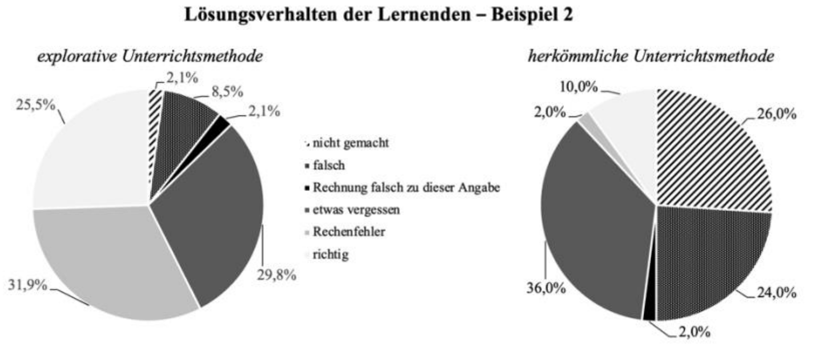


Abbildung 4: Lösungsverhalten der Lernenden – Beispiel 2 (eigene Darstellung)

Leistungsschwächere Lernende zeigten in explorativen Unterrichtssettings nicht nur eine höhere Motivation, sondern auch im Lösungsverhalten eine geringere Differenz im Vergleich zu leistungsstärkeren Lernenden. Dies galt insbesondere bei der Anwendung mathematischer Formeln. Die Ergebnisse der Studie deuten demnach darauf hin, dass explorative Methoden dazu beitragen können, nicht nur die Motivation, sondern auch das Lösungsverhalten von leistungsschwächeren Lernenden zu stärken, wodurch mögliche Leistungsdifferenzen verringert werden.

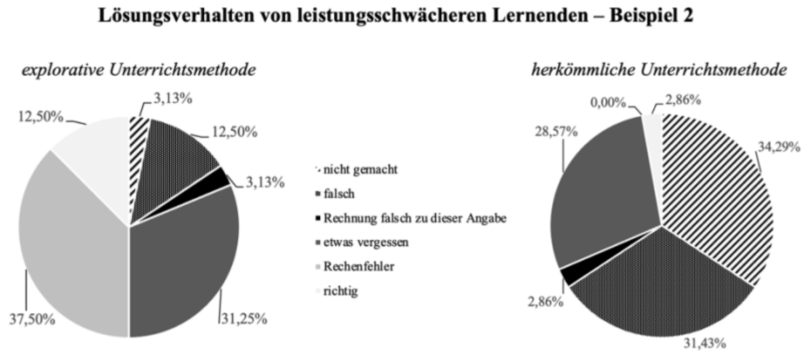


Abbildung 5: Leistungsvergleich von leistungsschwächeren Lernenden - Beispiel 2 (eigene Darstellung)

In Bezug auf das Geschlecht konnten weder Differenzen in der Motivation noch in der Leistung der Lernenden bei der Anwendung von explorativen Unterrichtsmethoden festgestellt werden. Obwohl Mädchen bei der ersten Aufgabe minimal besser abschnitten und bei der zweiten Aufgabe eine geringfügig schlechtere Leistung zeigten, waren diese Unterschiede nicht statistisch signifikant. Der Mangel an signifikanten Korrelationskoeffizienten weist darauf hin, dass diese Unterschiede zufälliger Natur sein könnten. Somit unterstützt die Studie die Eignung explorativer Unterrichtsmethoden für Schülerinnen und Schüler gleichermaßen.

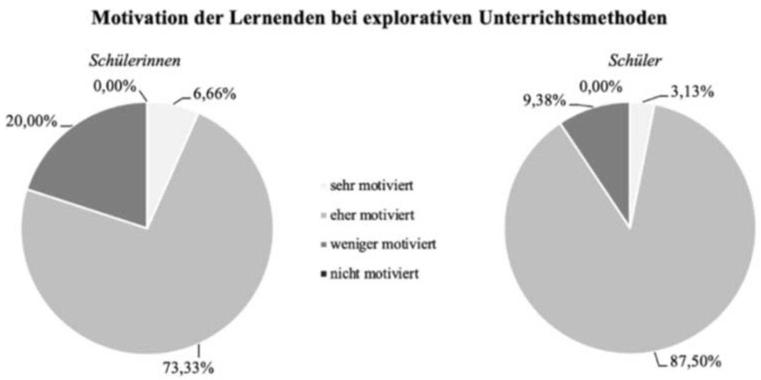


Abbildung 6: Geschlechtervergleich bezüglich der Motivation – explorative Methode (eigene Darstellung)

3 Unterrichtsbeispiele für die Praxis

Die Universität Wien veröffentlicht im Rahmen des Projekts „Mathematik macht Freu(n)de"[1] Unterrichtsbeispiele in Form von Denk- und Experimentkarten, welche sich hervorragend für den Einsatz in explorativen Lernsettings eignen. Die nachfolgenden Experimente wurden erprobt und an den Unterricht und den Bedürfnissen der Lernendengruppe angepasst. Teilweise wurden Bestandteile vorbereitet und zur Verfügung gestellt, sodass der Spagat zwischen zeitlichen Möglichkeiten und Raum zum eigenen Entdecken gelingt.

3.1 Die Erdäpfelpyramide

Die Erdäpfelpyramide stellt eine explorative Aufgabe im mathematischen Kontext dar, welche Lernenden ermöglicht, die Beziehung zwischen dem Volumen eines Quaders und dem einer Pyramide selbstständig zu entdecken. Für dieses Experiment werden mehrere große Erdäpfel, ein Messer mit Schneidebrett, eine Waage, sowie Stift und Papier benötigt. Nachfolgend wird die Umsetzung im Unterricht beschrieben, wobei die Lernenden einen Ablaufplan mit anschließenden Fragen erhielten. Die Fotos (Abbildung 7) entstanden in der Unterrichtseinheit, wobei die Erdäpfel im Anschluss aufgeteilt wurden und bei einigen Schüler*innen an diesem Tag Erdäpfelpüree am Speiseplan stand.

Ablauf:

1. Beginne damit, aus dem Erdapfel einen möglichst großen Quader zu schneiden.

2. Anschließend wiegst du den Quader und notierst sein Gewicht.

3. Schneide zunächst aus dem Quader ein Prisma aus. Mit zwei weiteren Schnitten entsteht eine möglichst große Pyramide.

4. Nachdem du die Erdäpfelpyramide geformt hast, wiegst du sie und notierst ihr Gewicht.

Fragestellungen:
Kannst du herausfinden, ob es einen Zusammenhang zwischen dem Gewicht des Quaders und dem Gewicht der Pyramide gibt?

Versuche dies, indem du das Experiment mit einem zweiten und dritten Erdapfel wiederholst.
Welche Schlussfolgerung kannst du daraus für den Zusammenhang der Volumina der beiden Körper ziehen?

Ziel: Die gestellte Aufgabe fordert die Lernenden dazu auf, einen Zusammenhang zwischen dem Gewicht des ursprünglichen Quaders und dem Gewicht der entstandenen Pyramide zu erkennen. Es soll erforscht werden, wie das Volumen einer Pyramide im Vergleich zum Volumen eines Quaders berechnet wird und dass, wenn Grundfläche und Höhe ident sind, das Volumen der Pyramide einem Drittel des Volumens des Quaders entspricht, ein Wert der näherungsweise im Experiment nachgewiesen werden kann.

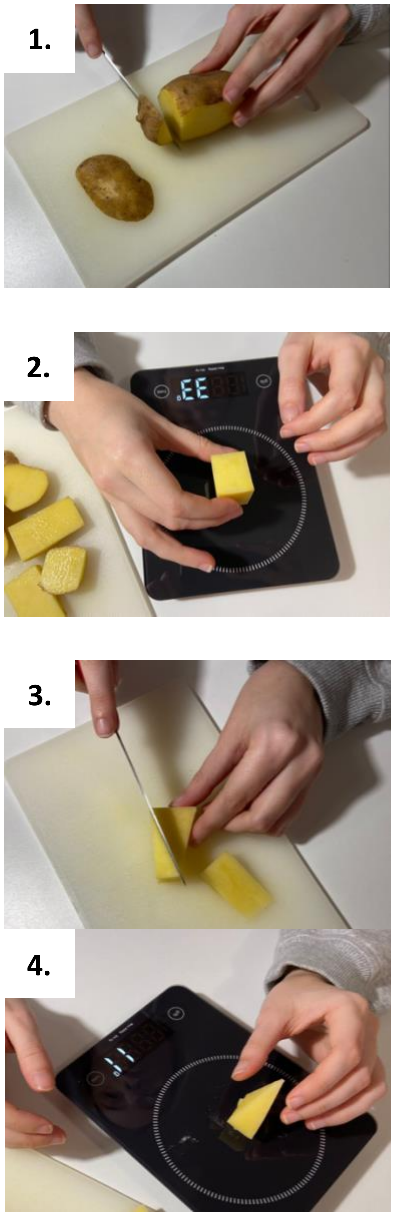


Abbildung 7: Fotos aus der Unterrichtseinheit "Erdäpfelpyramide" (erstellt von Laura Ascher)

3.2 Oberfläche einer Kugel

Das folgende Experiment ermöglicht den Lernenden, den Oberflächeninhalt einer Kugel durch praktische Erfahrungen zu erforschen und auf greifbare Weise zu verstehen. Um die Aufgabe zu meistern, werden ein Tennisball, ein Stanleymesser, eine Pinnadel, ein Wollknäuel, ein Blatt Papier sowie ein Stift benötigt.

1.

Ablauf:

1. Der Tennisball wird in zwei gleich große Halbkugeln geschnitten.
2. Im Anschluss werden die Halbkugeln auf ein Blatt Papier gelegt und der Umfang (Querschnittkreis) wird mehrmals nachgezeichnet.
3. Nun wird der Anfang des Wollfadens mit einer Pinnadel am obersten Punkt einer Halbkugel befestigt.
4. Der Faden wird kreisförmig um die Halbkugel gewickelt, um die gesamte Oberfläche zu bedecken.
5. Anschließend wird der Faden abgeschnitten und wieder vom Tennisball abgewickelt.
6. Nun wird mithilfe des abgeschnittenen Fadens die Fläche der Querschnittskreise ausgelegt. Dafür wird die Wolle kreisförmig auf das Papier gelegt.
7. Der Vorgang wird wiederholt, um einen zweiten Kreis auf die gleiche Weise abzudecken.

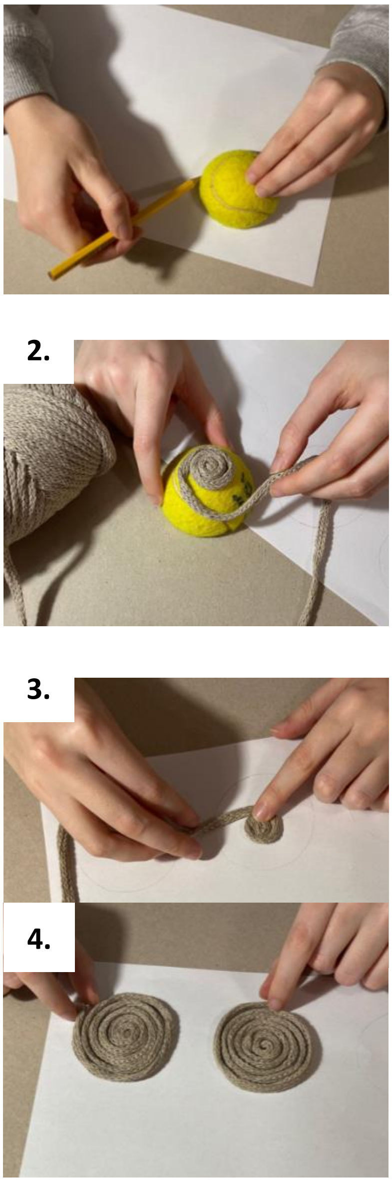


Abbildung 8: Fotos aus der Unterrichtseinheit „Oberfläche einer Kugel“ (erstellt von Laura Ascher)

Fragestellung:
Wie viele vollständig ausgelegte Kreise konntest du mit der abgeschnittenen Schnur bedecken? Überlege, wie viele Kreise du erhalten würdest, wenn du den gesamten Tennisball umwickelst. Versuche die Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugel aufzuschreiben.

Ziel: Durch dieses Experiment sollen die Lernenden den Oberflächeninhalt einer Kugel erforschen. Dabei erkennen sie, dass die Wolle ausreicht, um bei einer halben Kugel zwei Kreise auszulegen und bei einer ganzen Kugel insgesamt vier Kreise mit dem gleichen Radius wie jenem der Kugel. Durch die enge zeitliche Verbindung des „Bedeckens der (Halb-)kugel mit der Schnur“ und dem „Abwickeln der Schnur auf den Kreisflächen“ kann ein Zusammenhang hergestellt werden, was in der Gestaltpsychologie als „Gesetz der Gleichzeitigkeit“

bekannt ist (Kramer, 2016, S. 55). Durch die Anwendung der Flächeninhaltsformel für den Kreis leiten Lernende die Oberflächeninhaltsformel der Kugel ab. Sie entdecken, dass die Oberfläche einer Kugel viermal so groß ist wie die Fläche ihres Querschnittskreises.

3.3 Das Volumen-Rätsel

Im dritten Experiment geht es darum, das Konzept des Volumens von Quadern zu erforschen. Die Lernenden benötigen eine Schere, Klebstoff, Semmelwürfel oder Sand, sowie Faltnetze für Quader und Würfel als speziellen Quader mit konkreten Maßen (Quader: 8 cm x 4 cm x 2 cm; Würfel: 4cm x 4 cm x 4 cm).

Ablauf:

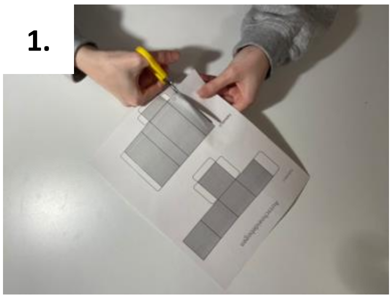
1. Zuerst schneiden die Lernenden die Faltnetze aus und falten sie zu oben offenen Quadern.

2. Anschließend kleben sie die Kanten mit Klebstoff zusammen, um stabile Quader entstehen zu lassen.

3. Nun werden die Schüler*innen aufgefordert eine Vermutung anzustellen: In welchen der beiden Quader passen mehr Semmelwürfel?

4. Die Vermutung wird überprüft, indem der erste Quader bis zum Rand mit Semmelwürfeln gefüllt wird und diese dann in den zweiten Quader umgeschüttet werden.

1.



2.

Fragestellung:
Um deine Annahme zu überprüfen, fülle den ersten Quader bis zum Rand mit Semmelwürfeln. Anschließend leerst du diesen Inhalt aus dem ersten Quader in den zweiten. Überlege, in welchen Quader mehr Semmelwürfel passen und erkläre, weshalb dieses Ereignis eintritt!
Wie würde das Experiment ausgehen, wenn du mit Reis oder Sand als Füllmaterial arbeitest? Schreibe deine Vermutung auf!

Ziel: Durch die Berechnung des Volumens wird für beide Quader ein Volumen von 64 cm^3 ermittelt. Das bedeutet, dass sie die gleiche Menge an Semmelwürfel fassen können. Das Experiment verdeutlicht den Schüler*innen, dass unterschiedlich geformte Körper, in diesem Fall Quader, trotz ihrer unterschiedlichen äußeren Erscheinung das gleiche Volumen haben können.

3.

4.

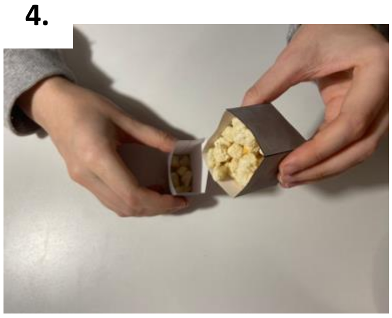


Abbildung 9: Fotos aus der Unterrichtseinheit „Volumenrätsel“ (erstellt von Laura Ascher)

4 Zusammenschau

Exploratives Lernen ermöglicht den Lernenden, aktiv am Lernprozess teilzunehmen und ein tieferes Verständnis für mathematische Konzepte zu entwickeln. Die empirischen Ergebnisse zeigen, dass Schüler*innen, die in explorativen Settings unterrichtet wurden, sowohl eine höhere Motivation als auch eine höhere Lösungswahrscheinlichkeit aufweisen. Besonders beeindruckend ist, dass nach explorativem Lernen leistungsschwächere Schüler*innen ein höheres Lösungsverhalten zeigten als jene, die traditionell gelernt hatten. Demnach ist diese Methode ein vielversprechender Ansatz, um heterogene Lernendengruppen im Mathematikunterricht abzuholen, gezielt zu fördern und ihre mathematischen Kompetenzen zu stärken (Ascher, 2023). Die drei Praxisbeispiele (Erdäpfelpyramide, Oberfläche einer Kugel und Volumen-Rätsel) veranschaulichen, wie exploratives Lernen durch konkrete Experimente und Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht umgesetzt werden kann.

Literatur

Ascher, L. (2023). Auf die Zahlen, fertig, los. Masterarbeit Universität Wien.

Hilgers, A. (2018). Enaktiv – ikonisch – symbolisch konkret. Darstellungsebenen bewusst wechseln. Online-Beitrag vom 06.12.2018. Friedrich Verlag GmbH Seelze. https://fr-vlg.de/eisprinzip

Klewitz, E. & Mitzkat, H. (1977). Entdeckendes Lernen und offener Unterricht. In E. Schwartz (Hrsg.), *Entdeckendes Lernen und offener Unterricht – Grundschulunterricht.* Band 4. Georg Westermann Verlag Braunschweig.

Klippert, H. (2004). Methoden-Training. Übungsbausteine für den Unterricht. 14. Auflage, Beltz. Weinheim und Basel.

Kramer, M. (2016). Mathematik als Abenteuer. Band II: Algebra und Vektorrechnung. Erleben wird zur Grundlage des Unterrichts. Friedrich Verlag Seelze.

Lehner, M. (2018). Erklären und Verstehen. Eine kleine Didaktik der Vermittlung. UTB Bern.

Leuders, T. & Prediger, S. (2012). „Differenziert Differenzieren" – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In: Lazarides, R. & Ittel, A. (Hrsg.), Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Implikationen für Theorie und Praxis Klinkhardt Bad Heilbrunn. (S. 35–66).

Liebig, S. (2002). Entdeckendes Lernen – wieder entdeckt? In: M. Bönsch & A. Kaiser (Hrsg.), *Basiswissen Pädagogik. Unterrichtskonzepte und –techniken – Band 4 – Entdeckendes, Forschendes und Genetisches Lernen* Schneider Verlag Hohengehren. (S. 4–16).

Stangl, W. (2023). Entdeckendes Lernen. Abgerufen am 2. Dezember 2023, von https://lexikon.stangl.eu/12075/entdeckendes-lernen

Winter, H. W. (2016). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht (3. Aufl.). Springer Spektrum Wiesbaden.

---

[1] Mathematik macht Freude. (2023) Mathematische Denk- und Experimentkarten. Abgerufen am 2. Dezember 2023, von https://mmf.univie.ac.at/materialien/sek1/denk-und-experimentkarten/

R&E SOURCE
11. Jg. (2024), Nr. 2 – More of Mathematics
Konferenzband zum Tag der Mathematik

Flächeninhalte – (k)ein Problem

Martina Astrid Müller[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2022.i17.a1328

Zusammenfassung

Aufbauend auf dem Vorwissen, das Schüler*innen bereits aus der Primarstufe mitbringen, Flächen durch Auslegen zu ermitteln, wird an einem Praxisbeispiel aus der 5. und 6. Schulstufe gezeigt, wie Lernende in einem forschend-entdeckenden Unterricht Formeln zur Flächeninhaltsberechnung ermitteln. Dem Unterrichtsprinzip des selbstentdeckenden Lernens folgend, sollen die Lernenden durch bereitgestelltes Anschauungsmaterial die Zusammenhänge zwischen einzelnen ebenen Figuren erkennen, diese vergleichen und Zusammenhänge erfassen, um Möglichkeiten für die Bestimmung deren Flächeninhalte zu überlegen. Die Interaktion mit anderen Lernenden und der aktiv handelnde Zugang führen zu hoher Motivation und ermöglichen Verständnis für das Zustandekommen der Berechnungswege zur Ermittlung der Flächeninhalte.

Stichwörter: Mathematikunterricht, Flächeninhalte, Vierecke, selbstentdeckendes Lernen

1 Einleitung

Ein moderner, zeitgemäßer Mathematikunterricht soll mehr als Wissen und Können vermitteln. Neben kritischem und abstraktem Denken sollen auch Problemlösefähigkeiten, Kreativität, Logik und Argumentation geübt werden (von der Bank & Herget, 2023, S. 2). Gerade die Beschäftigung mit geometrischen Formen bietet mehr als reines Rechnen und lässt neben den drei Grunderfahrungen nach Winter (1995) auch die Vermittlung bestimmter Haltungen und Einstellungen wie konzentriertes Arbeiten, Freude und Begeisterung, Neugier und Interesse, Intuition und Kreativität sowie Beharrlichkeit zu (von der Bank & Herget, 2023, S. 4). Aufgaben zu Flächeninhalten ermöglichen Lernenden grundlegende mathematische Konzepte zu verstehen und fördern damit eine erweiterte mathematische Kompetenz. So erfordert die Auseinandersetzung mit Flächeninhalten die Kenntnis geometrischer Figuren und deren Eigenschaften sowie mit grundlegenden Operationen und dem Entwickeln und Anwenden von Formeln umzugehen. Der Themenbereich „Flächen“ bietet eine Möglichkeit, logisches Denken und Problemlösefähigkeiten zu entwickeln – Fähigkeiten, die in vielen Bereichen des täglichen

[1] Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1010 Wien.
E-Mail: martina.mueller@phwien.ac.at

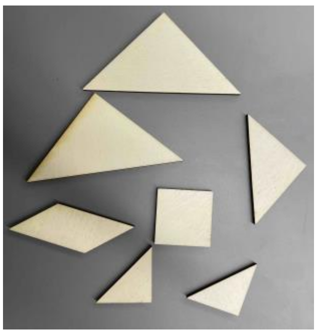
Lebens und in verschiedenen Berufen von Nutzen sind – und praktische Anwendungen nahelegen. Ein Alltagsbezug ist in vielen Bereichen (Verlegen von Fliesen, Teppichen usw.) möglich; visuelle Hilfen erleichtern das Verständnis und Anwenden und die Verknüpfung mit anderen Bereichen (Kunst und Architektur) fördert eine interdisziplinäre Anwendung des Wissens. Kooperatives Arbeiten und eigenständiges Entdecken sind besonders beim Entwickeln von Formeln zu Flächeninhaltsberechnungen möglich.

„Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten“ (Blaise Pascal). Daher werden in den folgenden Kapiteln Praxisbeispiele von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe zur Erarbeitung des Themas von Formeln für Flächeninhalte geboten.

2 Erste Schritte in der Primarstufe

Erste Erfahrungen mit geometrischen Formen werden vom Lehrplan bereits ab der 1. Schulstufe gefordert. Beispielsweise sollen Lernende durch Begreifen, Ausmalen, Nachfahren, Falten, Schneiden, Auslegen, etc. erste Erfahrungen zum Begriff „Fläche“ sammeln (BMBWF, 2024). Dem Spiralprinzip folgend wird das Thema in den folgenden Jahren immer wieder aufgegriffen, erweitert und vertieft, bis in der 4. Schulstufe das Berechnen von Flächeninhalten mit Einheitsmaßen eingeführt wird, wobei ein spielerischer Umgang betont wird.

Durch direktes Vergleichen, ob Figuren durch Übereinanderlegen zur Deckung gebracht werden können, Überprüfen, ob sie „zerlegungsgleich“ sind, d.h. in dieselben Teilfiguren zerlegt werden können oder „auslegungsgleich“ sind, d.h. durch die gleiche Anzahl von Einheitsflächen (z.B. Quadrate, Dreiecke, Sechsecke …) lückenlos ausgefüllt werden können (Franke & Reinhold, 2016, S. 311), lässt sich von Volksschüler*innen der Zugang zur Ermittlung von Flächeninhalten auf anschauliche Weise erarbeiten. Ist dieser Schritt gefestigt, kann man dazu übergehen, Flächenkonstanz erfahrbar zu machen. Lernende erschließen für sich, dass verschiedene Formen denselben Flächeninhalt haben können. Grundidee ist es, erfahrbar zu machen, dass der Flächeninhalt gleich groß ist, wenn ein und dieselbe Figur mit den gleichen Teilflächen ausgelegt werden kann.



Versuche aus den 7 Teilen ein Quadrat zu legen!
Welche dir bekannten Figuren kannst du aus diesen Teilen legen?
Was haben diese Figuren gemeinsam?

Abbildung 1: Tangram und Legemöglichkeiten (Musilek, 2019, S. 9)

Tangrams stellen eine Möglichkeit dar, diese Erfahrungen im Unterricht auf spielerische Weise umzusetzen, eignen sich für kooperatives Arbeiten, fördern Kreativität und konstruktive Kommunikation (Waldner, 2018, S. 3). Durch differenzierte Aufgabenstellungen sind Tangrams auch in heterogenen Lerngruppen gut einzusetzen. Sie können Lernenden direkt zur Verfügung gestellt werden, als Karten zum Nachlegen vorgegeben sein, zum freien Legen zur Herstellung individueller Figuren anregen oder für sprachlich anspruchsvolle Anweisungen zur Herstellung des Tangrams durch „Zerfalten eines Quadrats" anleiten. Anspruchsvollere Aufgaben stellen auch für ältere Schüler*innen eine Herausforderung dar.

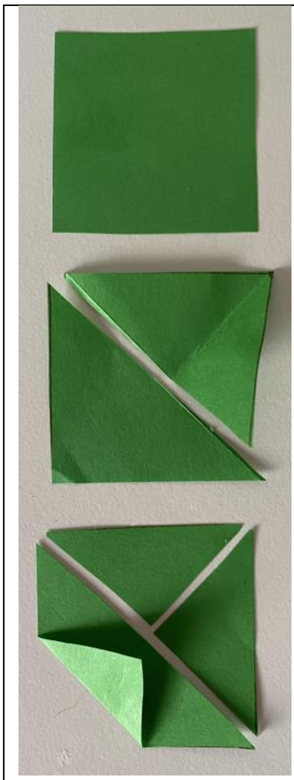
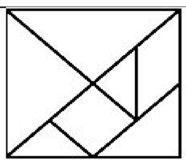
	• Falte eine Diagonale des Quadrats, schneide entlang der Diagonalen durch. Welche Figuren erhältst du? • Falte ein „großes" Dreieck in die Hälfte, so dass zwei gleiche Figuren entstehen. Schneide entlang der Faltlinie durch. Welche Figuren erhältst du? • Nimm das zweite „große" Dreieck und bestimme den Mittelpunkt der längsten Seite. • Falte es so, dass die „alte" Quadratecke auf dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite liegt. Schneide entlang der Faltlinie durch. Welche Figuren erhältst du? • Halbiere das Trapez, indem du die spitzen Ecken aufeinander faltest. Welche Figuren erhältst du? • Falte das spitze Eck des einen Vierecks auf die benachbarte rechte Ecke: Schneide entlang der Faltlinien. Welche Figuren erhältst du? • Falte beim anderen Viereck die stumpfe Ecke auf die gegenüberliebende rechte Ecke: Schneide entlang der Faltlinie durch. Welche Figuren erhältst du?
	Kannst du aus den sieben Teilen wieder ein Quadrat herstellen?

Abbildung 2: Faltanleitung (Musilek, 2019) und Fotos (von der Autorin erstellt)

3 Sekundarstufe 1 – Praxiseinblicke

In der Sekundarstufe wird an das Vorwissen der Lernenden angeknüpft und auf ihnen bereits bekannte Begriffe zurückgegriffen. Das im Lehrplan der 5. Schulstufe geforderte

> Ermitteln von Flächeninhalten von Rechtecken durch Zerlegen in passende Einheitsquadrate, [...] Abschätzen des Flächeninhalts von Figuren durch Auslegen bzw. Überdecken mit Rechtecken (BMBWF, 2024, S. 89)

ist Schüler*innen bereits aus der Primarstufe bekannt. Sie können verschiedene Figuren, deren Eigenschaften und Aussehen unterscheiden. In weiterer Folge kann das im Lehrplan unter „Kompetenzbereich 3: Figuren und Körper“ geforderte „Formeln für den Umfang und den Flächeninhalt von Rechtecken begründen und anwenden“ (BMBWF, 2024, S. 85), erreicht werden.

In der 6. Schulstufe fordert der Lehrplan „mit Dreiecken, besonderen Vierecken und ihren Flächeninhalten arbeiten“ und „Kennen, Anwenden und Begründen von Flächeninhaltsformeln für Dreiecke und besondere Vierecke“ (BMBWF, 2024, S. 92).

3.1 Vom Rechteck zum rechtwinkeligen Dreieck

In einer entsprechend vorbereiteten Lernumgebung können Schüler*innen Rechtecke, für deren Ermittlung des Flächeninhalts die Formel aus der vorangegangenen Schulstufe bekannt ist, eigenständig in rechtwinkelige Dreiecke zerlegen (Abb. 3).

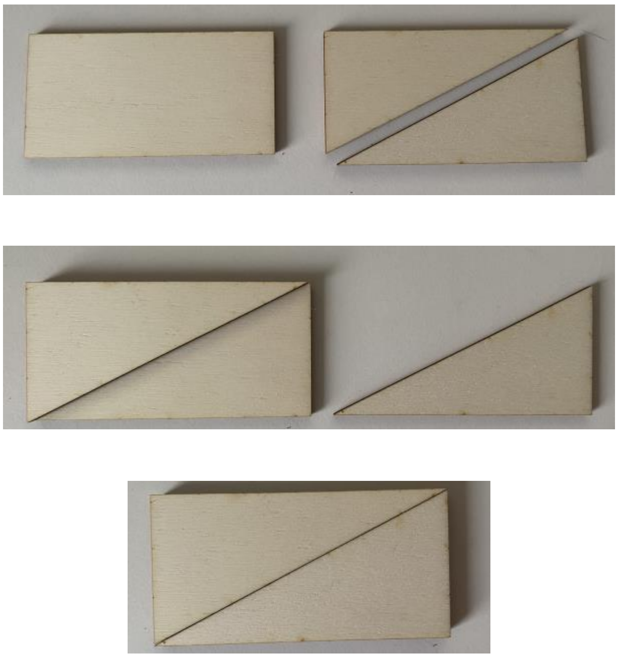


Abbildung 3: Material zum Erforschen des Flächeninhalts eines rechtwinkeligen Dreiecks (Fotos von der Autorin erstellt)

Durch Umlegen und Erkennen der Kongruenz der Dreiecke ergibt sich eine Berechnungsvorschrift für den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks für die Lernenden quasi von selbst. Wichtig im Plenum ist es, die exakte Formulierung mittels Fachsprache unter Verwendung der besonderen Seitenbezeichnungen des rechtwinkeligen Dreiecks vorzunehmen.

Durch das Legen von Figuren, das Aus- oder Nachlegen vorgegebener Formen lassen sich auch die Formeln für besondere Vierecke in ähnlicher Weise erarbeiten, wie in den folgenden Kapiteln noch genauer beschrieben wird. Die Auseinandersetzung mit Flächeninhalten wird auch in den folgenden Schulstufen wiederaufgegriffen und auch in der Sekundarstufe 2 wird dieses Wissen von Lernenden immer wieder eingefordert, beispielsweise bei der Einführung der Flächeninhaltsberechnung mit Hilfe des Integrierens.

3.2 Parallelogramm

In einer vorbereiteten Lernumgebung werden Lernenden verschiedene Figuren wie Rechtecke, allgemeine und rechtwinkelige Dreiecke sowie Trapeze geboten. Diese können sie nach Belieben verwenden, um neue Figuren zu legen. Die Abmessungen aller Figuren sind passend gewählt, damit sich ein An- und Übereinanderlegen automatisch ergibt. Schüler*innen vollziehen beim Arbeiten mit den Holzplättchen die im EIS-Prinzip beschriebenen Wechsel der Darstellungsebenen (Vollrath & Roth, 2012, S. 115).

Abbildung 4. Legematerial für ebene Figuren (Fotos von der Autorin erstellt)

In der enaktiven Phase haben sie die Möglichkeit, aus verschiedenen ebenen Figuren (Abb. 4) ihnen bekannte Vierecke zu legen. Mathematische Handlungserfahrungen, die sich über Prozesse der Verinnerlichung zu Handlungsmustern entwickeln, sind die Basis für die Ausbildung von Grundvorstellungen (vom Hofe & Roth, 2023, S. 2). Je nachdem, welche Teile in welcher Reihenfolge verwendet werden, ergeben sich unterschiedliche Vierecke, für die bereits Formeln zur Berechnung der Flächeninhalte bekannt sind. Mit diesen „Bildern" (ikonisch) können in einem abschließenden Schritt anhand der gelegten Figuren Längen und Formen verglichen und somit neue Formeln entwickelt und hergeleitet werden. Exemplarisch soll dies für die Erarbeitung der Flächeninhaltsformel des Parallelogramms vorgestellt werden. Die Lernenden erhalten Material, mit dem sie Parallelogramme in rechtwinkelige Dreiecke, Rechtecke oder Trapeze zerlegen können. Zusätzlich zu dem Material bekommen die Lernenden Karten mit Aufträgen und Fragen, wie „Lege die vor dir liegenden Figuren so zusammen, dass ein Rechteck entsteht! Gelingt es dir, durch Umlegen einer Figur aus dem

Parallelogramm ein Rechteck zu legen? Skizziere die zwei Figuren, die du gelegt hast in dein Schulübungsheft und beschrifte die Seiten! Versuche deinem Partner, der nicht gesehen hat, was du gelegt hast, zu beschreiben, was du gemacht hast!" In einem Schritt lässt sich durch Umlegen des rechtwinkeligen Dreiecks an die gegenüberliegende Seite des Parallelogramms ein Rechteck herstellen. Im vorgestellten Unterrichtsbeispiel stehen den Lernenden Figuren aus Sperrholz zur Verfügung, da diese haptisch zum Legen besser geeignet und widerstandsfähiger sind. Stehen keine vorgefertigten Figuren zur Verfügung, können diese auch einfach aus Papier oder Karton ausgeschnitten werden.

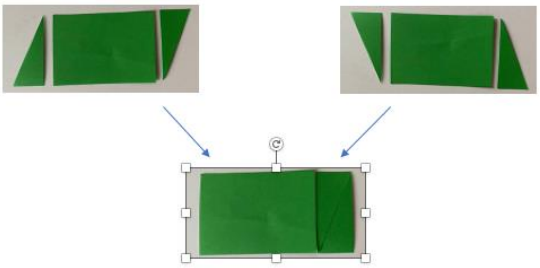


Abbildung 5: Vom Parallelogramm zum Rechteck (Fotos von der Autorin erstellt)

Handelnd haben die Lernenden das Parallelogramm mit den Seitenlängen a, b und der Höhe h_a zu einem Rechteck, dessen Länge a, die jener des ursprünglichen Parallelogramms entspricht und der Breite, die offensichtlich der ursprünglichen Höhe h_a des Parallelogramms entspricht, aufgefunden. Nachdem bekannt ist, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks durch das Produkt der Seitenlängen ermittelbar ist, ist die neue Formel $A = a \cdot h_a$ von Lernenden selbst formulierbar.

Die Durchführung in Klassen hat gezeigt, dass viele Lernende kaum Hilfestellung seitens der Lehrkraft benötigen und in weiten Teilen der Unterrichtssequenz eigenständig arbeiten. Sie übernehmen im selbstregulierten Arbeiten Verantwortung für den eigenen Lernprozess. Deshalb spricht vieles dafür, das kompetenzorientierte Unterrichten handlungsorientiert zu gestalten – so, wie dies seit Jahrzehnten von Didaktiker*innen gefordert wird (Meyer, 2020, S. 168). Für leistungsschwächere Lernende empfehlen sich Tippkarten, die durch Fragen und Hinweise das Handeln anleiten und erleichtern.

Schränkt man Lernende durch Vorgabe ausgewählter Formen nicht ein, sondern stellt ihnen (wie in Abb. 4 gezeigt) verschiedenste Figuren zur Verfügung, können sie ihre individuellen Ideen verwirklichen. Sie können enaktiv, ikonisch oder symbolisch arbeiten oder zwischen den Darstellungsebenen wechseln. Das Übereinanderlegen (Umlegen) von Flächen kann als intuitive Strategie erwartet werden (Boomgaarden et. al, 2023, S. 10). Es kommt zu verschiedenen Lösungen, die oft nicht vorhersehbar sind, sie überraschen manchmal auch Lehrende, stellen aber wertvolle Lernmöglichkeiten für alle dar. Lernende müssen den von ihnen vorgeschlagenen Weg erklären und begründen, sich Fragen und Einwänden ihrer Mitschüler*innen stellen und üben damit die vom Lehrplan geforderten Kompetenzen „H1 Darstellen, Modellbilden" und „H4 Argumentieren, Begründen". Die Unsicherheit, die Lehrende aufgrund der of-

ISSN 2313-1640

fenen Aufgabenstellung bezüglich der Planung ihres Unterrichts eingehen, lohnt sich nach der Erfahrung der Autorin in jedem Fall. So kommt eine Lernendengruppe beispielsweise durch das Ergänzen eines rechtwinkeligen Trapezes durch ein rechtwinkeliges Dreieck auf einem alternativen Weg zur gesuchten Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms (Abb. 6). In diesem Fall wird zunächst das Parallelogramm, das aus einem rechtwinkeligen Trapez und einem rechtwinkeligen Dreieck gelegt wurde, durch Umlegen in ein Rechteck verwandelt. Im Anschluss kann es zusätzlich mit einem seitengleichen Rechteck verglichen werden.

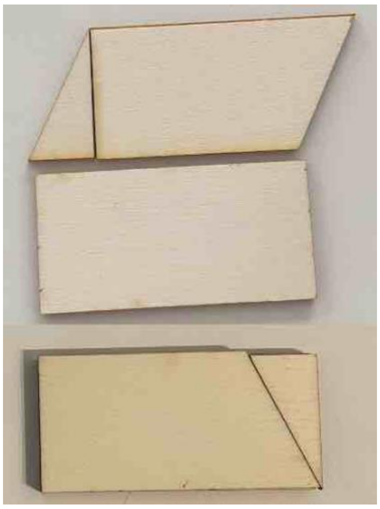


Abbildung 6: Vom rechtwinkeligen Trapez zum Parallelogramm (Fotos von der Autorin erstellt)

3.3 Deltoid

Bei der Zerlegung des Deltoids zur Ermittlung des Flächeninhalts kann ebenso schrittweise vorgegangen werden. Dabei können von den Lernenden zwei Wege (Abb. 7) beschritten werden. Entweder wird das Deltoid durch die Diagonalen in vier rechtwinkelige Dreiecke geteilt, womit sich anschließend durch Drehen der Dreiecke einer Seite und geschicktes Anlegen ein schmales Rechteck, dessen Länge e und Breite $f/2$ ist, ergibt. Oder das Deltoid wird zu einem Rechteck „verdoppelt“, dessen Länge und Breite die Diagonalen e und f sind. Nachdem für die Lernenden (ev. auch durch Übereinanderlegen der kongruenten Figuren) offensichtlich ist, dass der nun vorliegende Flächeninhalt den doppelten Wert des ursprünglichen Deltoids aufweist, ist die Division durch zwei ein logischer letzter Schritt.

Wichtig ist es, alle Varianten zuzulassen und Schüler*innen auch zu Vergleichen der verschiedenen Lösungswege aufzufordern. Das eigene Vorgehen zu beschreiben, ermöglicht wiederum die Kommunikation auf einer Metaebene (George et al., 2016). Weiters werden durch den anregenden und problemorientierten Austausch zwischen Lernenden Fehler und Irrwege zugelassen und Verständnisprobleme wahrgenommen (Abraham & Müller, 2009).

Schrittweises Vorgehen erleichtert auch die Dokumentation und das Aufzeichnen im Heft. Als Nebeneffekt werden auch verschiedene Schreibweisen von Brüchen ($A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = e \cdot \frac{f}{2} = \frac{e \cdot f}{2} = e \cdot f : 2$) wiederholt und aufgefrischt.

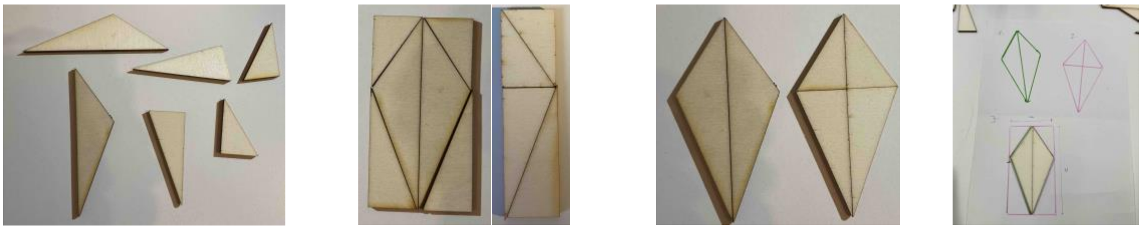


Abbildung 7: Zwei Lege-Varianten, um den Flächeninhalt eines Deltoids zu bestimmen (Fotos von der Autorin erstellt)

Weiters hat es sich als didaktisch geschickt erwiesen, Schüler*innen einen Filmstreifen als Strukturierungshilfe, im Sinne von Scaffolding, für die einzelnen Schritte des Legeprozesses zur Verfügung zu stellen (Abb. 8). Das schrittweise Vorgehen beim Problemlösen ist nicht nur bei der vorliegenden Aufgabe des Auffindens von Flächeninhaltsformeln eine sinnvolle und erfolgreiche Vorgehensweise, sondern lässt sich auch gut auf weitere Anwendungsbereiche übertragen.

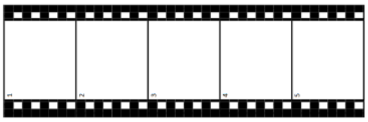


Abbildung 8: Filmstreifen (Leisen, 2013, S. 114)

Möchte die Lehrkraft zusätzlich digitale Medien einsetzen, kann der analoge Filmstreifen durch die Erstellung eines kleinen Stop Motion-Videos[1] ins Digitale übertragen werden. In den Videos zeigen Lernende überraschende Einfälle, Kreativität und versuchen, wenn mehrere Gruppen parallel arbeiten, sich gegenseitig an Originalität zu überbieten. Die Methode bietet auch Differenzierungsmöglichkeiten, da findige Schüler*innen sehr aufwändige Videos gestalten, diese vertonen usw., während andere nur eine reine Übertragung eines analogen Filmstreifens in aneinandergereihte Fotos verwenden.

3.4 Raute

Wie bereits beschrieben, gehen dem Finden neuer Formeln für Flächeninhalte ein Zerlegen von Figuren in Teilfiguren, deren Flächeninhaltsformeln bekannt sind, voraus. Viele Lernende empfinden diese „Stückelung“ als Umweg und mittels Bereitstellen geeigneten Lernmaterials können Zusammenhänge schneller erkannt werden. Sind in einer Klasse Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Parallelogramm und Deltoid bereits erarbeitet worden, lassen sich für die Raute zwei mögliche Varianten für die Flächeninhaltsbestimmung auffinden. Durch die gewählte „Legeart“ und Auswahl der Teilflächen lässt sich einmal größere Nähe bzw. Verwandtheit zum Parallelogramm bzw. im anderen Fall zum Deltoid – im wahrsten Sinne des Wortes – ersehen. Ein weiterer Vorteil dieser Vorgehensweise ist, Lernende das Haus der Vierecke durchwandern zu lassen und dabei zu beobachten, welche Figuren sich durch das Hinzukommen von Eigenschaften aus anderen zu einem „Spezialfall“ entwickeln.

3.5 Trapez

Der Schlüssel zum Flächeninhalt des Trapezes ist das Verständnis des Flächeninhalts des Parallelogramms (Kramer & Kramer, 2019, S. 37). In der Praxis ließ sich feststellen, dass bei der Erarbeitung der Flächeninhaltsformel für das Trapez die Hauptschwierigkeit im Erkennen, dass ein Parallelogramm nur durch Spiegelung und Drehung des zweiten Trapezes erreicht wird, besteht. Dann gilt es, die Länge des Parallelogramms als Summe von $a + c$ zu entlarven. An diesem Punkt versuchen manche Lernende eine neue Seitenbezeichnung einzuführen, was nicht zielführend ist. Angeregt wird hier zusätzlich die Seiten der ursprünglichen Trapeze zu beschriften. Durch die Möglichkeit, die Trapeze aus Holz vor sich zu haben, gelang dieses Umlegen besser als in Klassen, die nur Skizzen im Heft verwendeten. Den „Trick“ durch zwei zu dividieren, da man ja ursprünglich nur den Inhalt einer Trapezfläche bestimmen wollte, ist den Lernenden durch vorangegangene Erfahrungen bereits bekannt.

Eine weitere Möglichkeit, Lernende zum Vergleich von Flächeninhalten, der Entdeckung von Formeln zu deren Berechnung und den Vorteilen allgemeiner Formeln anzuregen, bietet ein Tafelbild, wie in Abb. 9 vorgeschlagen. Lernende können gefragt werden, welche der drei Figuren den größten Flächeninhalt besitzt bzw. ob das weiße Rechteck und z.B. das blaue Parallelogramm denselben Flächeninhalt aufweisen. Dabei können die Lernenden verschiedene Gruppen bilden oder im Plenum diskutieren. Weitere Möglichkeiten der Umsetzung in Klassen und damit einhergehende didaktische Überlegungen werden von Kramer & Kramer (2019) beschrieben.

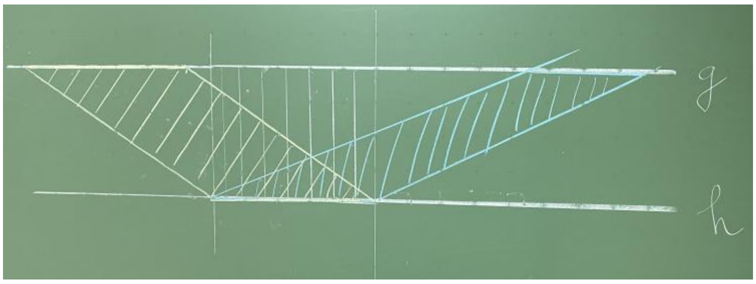


Abbildung 9: Tafelbild der Autorin (nach einer Idee von Kramer & Kramer, 2019)

4 Zusammenschau

Durch das aktive Handeln, das Lernenden die Figuren und mögliche Berechnungswege für deren Flächeninhalte gleichsam vor Augen führt, gelingt das Auffinden der Formeln für fast alle Lernenden mit einem hohen Maß an Eigenständigkeit. Das zur Verfügung gestellte Material ermöglicht individuelle Lernwege und regt Kreativität an (Leuders, 2012). Gegebenenfalls kann die Lehrperson die Auswahl einschränken, Fragen stellen, Tippkarten zur Verfügung stellen o.Ä. Der Vergleich von in manchen Fällen verschiedenen Vorgehensweisen und Lösungsvarianten, die Diskussion mit anderen und der Austausch fördern tiefere Einsicht. Eröffnet man Lernenden solche Zugangsweisen, Georg Credé (2023, S. 11) spricht von kreativen „New-Learning-Räumen", können sie ihre Freude am Lernen erhalten und gleichzeitig einen guten inneren Kompass und die notwendigen Kompetenzen entwickeln, die sie für spätere Herausforderungen des Lebens selbstständig werden lassen.

Im weiteren Unterricht von Klassen, die in den vorgestellten Settings die Formeln zur Flächeninhaltsberechnung verschiedener Figuren erarbeitet hatten, war bemerkbar, dass auch das Behalten der Formeln nachhaltiger war und diese besser reproduzierbar waren. Hier wären weitere Untersuchungen lohnend, ob sich ähnliche positive Effekte auch in anderen Unterrichtsgruppen, die einen derartigen handelnden Zugang zu den Flächeninhalten durchlaufen, zeigen. Durch den im Artikel geschilderten Zugang ist Flächenberechnung *kein* Problem.

Literatur

Abraham, U. & Müller, A. (2009). Aus Leistungsaufgaben lernen. *Praxis Deutsch*, 214, S. 4–12.

Boomgaarden, A., Leuders, T., Loibl, K. (2023). Problemlösen vor Erklärung - Erst erkunden Lehrende das Problem, danach greift die Lehrkraft auf und erklärt – hier der Flächeninhalt. *Mathematik Lehren*, 238, S. 6–10

BMBWF (2024). Lehrplan der Volksschule. (Zugriff 10.01.2024) https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2023_II_1/Anlagen_0001_CE7F0AA2_A925_4A4D_8C3C_355D12BD22D1.pdfsig

BMBWF (2024). Lehrplan der AHS. (Zugriff 19.03.2024) https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568

Credé, G. (2023). New World braucht New Schools – Zeitgemäßes Lernen aus der Sicht eines Personalentwicklers. *Bildung und Schule digital,* (1)2023, S. 10–12.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (3. Auflage). Springer Spektrum Berlin Heidelberg.

George, A.C., Süss-Stepancik, E., Illetschko, M. & Wiesner, C. (2016). Entwicklung wirkungsvoller Lernaufgaben für den Unterricht aus Testitems der Bildungsstandardüberprüfung. *transfer Forschung <> Schule*, 2, S. 67–87.

Kramer, M., & Kramer, M. (2019). *Mathematik als Abenteuer. Band I: Geometrie und Rechnen mit Größen* (5. Auflage). Klett/Kallmeyer Seelze.

Leisen, J. (2013). *Handbuch Sprachförderung im Fach – Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis –*

Praxismaterialien. Klett Stuttgart.

Leuders, T. (2012). Kompetenzorientierte Aufgaben im Unterricht. In: W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik konkret* (S. 81–95). Cornelsen Berlin.

Meyer, H. (2020). *Leitfaden Unterrichtsvorbereitung* (10. Auflage). Cornelsen Berlin.

Musilek, M. (2019). *Modul 2: Ebene Figuren. Skriptum zur Lehrveranstaltung UE Mathematik: Geometrie* an der Pädagogischen Hochschule Wien. Wien.

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* 2. Auflage. Spektrum Heidelberg.

von der Bank, M.-C. & Herget, W. (2023). Emotionen – ja, in Mathe. Nichtkognitive Aspekte beim Lehren und Lernen. *Mathematik Lehren*, 240, S. 2–7.

vom Hofe, R. & Roth, J. (2023). Grundvorstellungen aufbauen. *Mathematik Lehren*, 236, S. 2–7.

Waldner, S. (2018). Miteinander individuell lernen – ist das überhaupt möglich? Kooperatives Lernen in einem personalisierten Unterricht der Grundschule. *R&E-Source* (9) 2018.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, S. 37–46.

[1] gratis Download der App https://play.google.com/store/apps/details?hl=de&id=com.cateater.stopmotionstudio&pli=1

R&E SOURCE
11. Jg. (2024), Nr. 2 – More of Mathematics
Konferenzband zum Tag der Mathematik

EMIL – entdeckend mathematische Inhalte lernen mit dem Hamster Emil

Ruth Plank[1], *Monika Musilek*[2]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2024.i2.a1298

Zusammenfassung

Dieser Artikel ist ein Plädoyer für entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe. Anand des praktischen Beispiels der Lernumgebung „Werkstatt, Wolkenkratzer, Luftschlösser: Komm wir bauen!” wird die dringende Notwendigkeit, den Mathematikunterricht handelnd zu gestalten, unterstrichen. Es wird die Vorbereitung, der Einsatz im Unterricht und eine Möglichkeit gemeinsame Kommunikationsanlässe in der Klasse zu gestalten, vorgestellt. Gleichzeitig wird eine eigenständige Planung von mathematischen Lernumgebungen angeregt. Ziel ist ein Mathematikunterricht, der von den Schüler*innen individuell erlebt wird. Eigenes Hantieren und Handeln ist gefragt. Ganzheitliches Erfahren und Erkennen soll ermöglicht werden. Die Schüler*innen ziehen aus diesen Erfahrungen Rückschlüsse auf bereits Erlerntes. Der Erkenntnisgewinn erfolgt über das Zusammenführen einzelner Teilergebnisse. Der Prozess bietet zahlreiche Kommunikationsanlässe, womit der im Lehrplan geforderten Förderung personaler und sozialer Kompetenzen Rechnung getragen wird.

Stichwörter: Entdeckendes Lernen, Primarstufe Mathematik, Lernumgebung

1 Einleitung

Heterogenität und Vielfalt, wie sie Lehrende in Klassen vorfinden, stellen eine große Herausforderung dar (Syring, 2022, S. 9), eröffnen aber auch die Chance, Mathematikunterricht neu zu entdecken. Im Rahmen des Entwicklungsprojekts EMIL (Entdeckend mathematische Inhalte lernen) an der Pädagogischen Hochschule Wien wird das Entdeckende Lernen ins Zentrum des Mathematikunterrichts der Volksschule gestellt.

Geht man von der Frage „Was ist Lernen?“ aus, so definiert Holzinger (2001, S. 105) Lernen als einen individuellen kognitiven Grundprozess, der von jedem Individuum selbst durchlaufen werden müsse. Bei diesem Prozess sollen Schüler*innen im Unterricht in ihrem Entdeckungs-

[1] Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.
E-Mail: ruth.plank@phwien.ac.at
[2] Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.
E-Mail: monika.musilek@phwien.ac.at

prozess bestmöglich unterstützt werden und daraus Schlüsse ziehen, diese miteinander vernetzen, und mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten erwerben.

Entdeckendes Lernen ist eine pädagogische Konzeption, die sowohl früher als auch in der Gegenwart relevant ist. Sie wird durch aktuelle Forschungsergebnisse im Bereich des Lernens bestätigt und weiterentwickelt. (Bruner, 1980; Leuders, 2020; Winter, 1996; Wittmann, 2017) Beim Entdeckenden Lernen geht es um den Prozess „mathematische Phänomene aufzuspüren, zu verallgemeinern, Beziehungen herzustellen und Begründungen für Entdeckungen zu suchen." (Bezold, 2011, S. 8). Der Weg zur Erkenntnis bis hin zum Ziel wird von jedem Lernenden eigenaktiv und im eigenen Tempo beschritten. Ausgehend von einer mathematischen Fragestellung, über sinnstiftende Ideen entwickeln die Lernenden Hypothesen. Sie wenden bekannte Methoden an, experimentieren, wägen ab und versuchen herauszufinden, ob die anfänglichen Vermutungen bestätigt werden können oder verworfen werden müssen. Die Lernenden überdenken die Darstellung von Erkenntnissen in Einzel- Partner oder Gruppenarbeit und reflektieren gemeinsam. (Huber et al., 2013). Zusätzlich zum eigenständigen Finden der Lösungswege erwerben die Schüler*innen Kompetenzen wie zum Beispiel Fragekompetenz, Problemlösungskompetenz oder Planungskompetenz.

> So etwas muss man gesehen und erlebt haben […] Ebenso wie man […] keine Mathematik lernt, indem man sie erzählt bekommt. (Hans Freudenthal zit. nach Hengartner et al., 2001, S. 125)

Ausgehend von einer Verantwortlichkeit, Arbeitsaufträge eigenständig zu bearbeiten, ist es wichtig, eine freie Wahl von Arbeitsmethoden und eine individuelle Herangehensweise an die Problemstellung treffen zu dürfen, um das Tun als Grundlage der Einsicht zu nutzen. Handlungsorientiertes Lernen bedeutet, mit allen Sinnen die Vorstellung zu erzeugen.

> Handlungsorientierter Unterricht ist ein ganzheitlicher und schüleraktiver Unterricht, in dem die zwischen dem Lehrer und den Schülern vereinbarten Handlungsprodukte die Gestaltung des Unterrichtsprozesses leiten, so dass Kopf- und Handarbeit der Schüler in ein ausgewogenes Verhältnis zueinander gebracht werden können. (Jank & Meyer, 2021, S. 315)

Beim Konzept des handlungsorientierten Unterrichts handelt es sich nicht um ein ausführliches didaktisches Modell, sondern lediglich um eine Unterrichtsform, bei der die Schüler*innen im Mittelpunkt stehen und durch Handlungen lernen. Besonders kennzeichnend für diesen Ansatz ist das Lernen mit allen Sinnen und die damit verknüpfte hohe Bedeutung der Unterrichtsergebnisse.

> Der Anteil sinnlich-ganzheitlicher, Kopf, Herz und Hände einbeziehender Lehr-Lern-Formen muss erhöht und der Umfang der Schülerselbständigkeit ausgeweitet werden, […]. (Jank & Meyer, 2021, S. 324)

Im Unterricht sollen Schüler*innen darin unterstützt werden, neugierig ihre Entdeckungen zu erforschen, ihre Vorstellungen zu entwickeln und in eigenständige Handlungen umzusetzen. Wissen kann nicht von außen übernommen und kopiert werden. Vielmehr muss jede(r) Einzelne das Wissen selbst entdecken, erfahren, erarbeiten und erkennen, um es später in geeigneten Zusammenhängen anwenden zu können.

Entdeckendes Lernen ist in erster Linie möglich und realisierbar, wenn der Unterricht „offen" strukturiert wird und im Rahmen dieser Öffnung Schüler*innen die Bedingungen zur Möglichkeit geboten werden, sich forschend und entdeckend mathematischen Problemstellungen und möglichen Lösungswegen zu widmen.

Die Lernenden bemühen sich, vorhandenes Basiswissen zu nutzen, um eine selbstständige Form der Bearbeitung von Fragestellungen zu finden und beschreiten in der Anwendung dieses Wissens eigene Lösungswege, verbunden mit Erfolgen und Misserfolgen. Das vorhandene oder neu angeeignete Wissen wird dabei fortwährend aktualisiert, umgeordnet, verworfen und wieder neu aufgegriffen, wodurch eine sinnige und intensive Form des Übens erreicht wird.

Winter (2016) benennt vier Phasen, die für eine gelingende Unterrichtsgestaltung nach dem Prinzip des entdeckenden Lernens von Bedeutung sind:

1. Angebot einer „herausfordernden Situation" (Problem-/Aufgabenstellung entwickeln)
2. eigenständige Entwicklungen von Lösungen durch die Schüler*innen (Begriffsbildungen/Lösungsverfahren entwickeln in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit)
3. Vorstellung und Sammlung der Ergebnisse durch die Lösenden (Integration und erste Ausgestaltung vielfältiger Beziehungen)
4. Arbeitsergebnisse bündeln, zusammenfassen, ordnen, korrigieren (Reflexion der Lösungszugänge und Heurismen, Organisation und gezielte Versuche des Transfers) (Winter, 2016, S. 26–29).

2 Die Rolle der Lehrperson beim Entdeckenden Lernen

Ein Umdenken, ein Neuüberdenken des Lehrer*innen-Verhaltens braucht Mut und Zutrauen in die eigene Profession. Die Rolle der Lehrperson beim Entdeckenden Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe ist vielfältig. Gelingensbedingungen für eine erfolgreiche Umsetzung des Prinzips des Entdeckenden Lernens sind folgende:

- Grundhaltung: Ko-konstruktive, partizipative und inklusive Unterrichtsprozesse erfordern eine positive und offene Grundhaltung. Beliefs, Werte und Einstellungen der Lehrperson sind entscheidend für den Erfolg des Entdeckenden Lernens.
- Lernumgebung gestalten: Lehrer*innen schaffen eine anregende Lernumgebung, in der ein konkreter mathematischer Inhalt erforscht werden kann. Die Lehrperson verdeutlicht zentrale Ideen und ermöglicht es, Zusammenhänge zu erkennen. Für die Ent-

deckungsprozesse werden vielfältige didaktische Materialien bereitgestellt, die Anknüpfungspunkte in ihrer Lebenswelt aufweisen. Lebensnahe und herausfordernde Fragestellungen sind Inhalt des Unterrichts. Aufgrund dieses Angebots soll Neugier geweckt und Anreize geschaffen werden, dass die Lernenden spielerisch ihre mathematische Kompetenz aufbauen können.

- Eigenverantwortliches Handeln unterstützen: Lehrer*innen ermutigen die Schüler*innen, eigenverantwortlich zu handeln und intuitiv zu experimentieren. Die Kinder setzen sich selbsttätig mit den Angeboten auseinander.
- Impulse geben: Lehrer*innen stellen gezielte Fragen und geben Impulse, um das Denken der Schüler*innen anzuregen. Sie ermuntern zum Beobachten, Erkunden, Probieren, Fragen. Sie fördern die Neugier und den Wissensdrang.
- Beobachten und Begleiten: Lehrer*innen beobachten die Schüler*innen aufmerksam und begleiten sie bei ihren Entdeckungen. Sie erkennen individuelle Bedürfnisse und passen ihre Unterstützung an. (Winter, 2016; Hengartner, 2001; Kobl & Schedl, 2022)

Durch eine bewusste Haltung und gezielte Maßnahmen können Lehrer*innen diesen Prozess erfolgreich unterstützen und sowohl der Neugier als auch dem Wissensdrang der Schüler*innen nachkommen.

3 EMILs Kiste

Das Projekt EMIL basiert auf dem Vorgängerprojekt „Mathematik aus der Kiste“ (Musilek & Varelija-Gerber, 2024). Bedeutsame Aufgaben werden als Ausgangspunkt für EMILs Kiste gesehen. Sie ermöglichen eine natürliche Differenzierung und stellen Entdecken, Beschreiben und Begründen, eigenes Erfinden mathematischer Muster in den Mittelpunkt (Selter, 2006). Aufbauend auf bewährten Gestaltungsmerkmalen, fließen Erfahrungen aus zahlreichen Erprobungen in die Weiterentwicklung ein. Ebenso wurden die Anleitungen für die Kinder um die Unterstützung im (fach-)sprachlichen Bereich erweitert.
Jede EMILs Kiste enthält alle erforderlichen Materialien, um entweder eine einzelne Unterrichtsstunde oder eine ganze Unterrichtssequenz für alle Schüler*innen einer Klasse durchzuführen.

3.1 Bestandteile

Der Grundidee von Entdeckendem Lernen folgend, sollen die Materialen Lernprozesse auf verschiedenen Ebenen anregen. Lernende haben durch konkretes Material die Möglichkeit handelnd Erfahrungen zu machen, werden aber auch angeregt, diese ihre Erkenntnisse zu dokumentieren und zu reflektieren.

Anleitungskarten mit bedeutsamen Aufgaben:
Die Aufgaben sind auf Anleitungskarten dargestellt. Diese Karten sind für Kinderhände gedacht. Auf ihnen werden reichhaltige Aufgabenstellungen in einer Form präsentiert, die ein eigenständiges Arbeiten ermöglichen. Jedes Kind kann auf angemessene Weise in die mathematische Bearbeitung einsteigen und die individuelle Tiefe der Auseinandersetzung wählen.

Haptisches Mathe-Material:
Der handlungsorientierte Ansatz, der mit den Kisten verfolgt wird, bedarf adäquater Medien. Alle Materialien, die die Kinder für die Bearbeitung der verschiedenen Aufgabenstellungen brauchen, sind in EMILs Kiste enthalten.

Handout für Lehrpersonen:
Dieses Handout bietet einen Überblick über das jeweilige Thema und enthält methodisch-didaktische Hilfen zur Unterrichtsgestaltung. Ebenso findet sich eine Verortung im Lehrplan. Zur raschen Orientierung für Lehrpersonen sind zu allen Anleitungskarten wichtige Informationen aufgelistet, die die im Fokus stehende mathematische Kompetenz einer Station, aber auch Organisatorisches wie Material, Anzahl der Kinder die gemeinsam arbeiten usw. anführen. Ergänzend werden Einblicke in die Erprobungsphasen gewährt, um den Lehrer*innen einen Erwartungshorizont zu liefern. Diese Dokumente vermitteln, wie die Arbeit gestaltet werden kann und welche Ergebnisse möglich sind.

EMIL-Heft:
Das EMIL-Heft ist ein zentrales Instrument bei der Arbeit. Es dient dazu, individuelle Notizen, Entdeckungen, Zeichnungen, Nebenrechnungen und ähnliche Artefakte festzuhalten. Das Heft ist ein persönliches und gehört dem Kind. Das übergeordnete Ziel des kontinuierlichen Einsatzes des Hefts besteht darin, dass die Schüler*innen im Verlauf ihrer Lernreise befähigt werden, ihre Lösungsansätze und Überlegungen zur Bewältigung mathematischer Aufgaben in einer klaren und verständlichen Art und Weise zu beschreiben.

Die frühzeitige und regelmäßige Nutzung dieses Hefts ist von essenzieller Bedeutung für den Lernprozess der Kinder. Anfänglich kann der Prozess durch Hinweise der Lehrperson unterstützt werden, sodass sich die Schüler*innen nicht alleingelassen fühlen. So können beispielsweise Tipps, dass Striche, Pfeile, Farben, Tabellen, Diagramme und Skizzen bei der Dokumentation mathematischer Ideen behilflich sein können, also ein Zugang auf verschiedenen Darstellungsebenen, das Verständnis erleichtern.

Plenumskarten:
Zu jeder Arbeitskarte gibt es auch eine Plenumskarte. Angedacht ist, dass nach jeder Bearbeitungsphase ein Plenum für die Kinder abgehalten wird. Dadurch wird das Kommunizieren im Mathematikunterricht stark gefördert. In den Plenumsphasen werden die Lernenden aufgefordert, ihre EMIL-Hefte vorzustellen und ihre Gedanken mit anderen zu teilen. Der

konsequente Einsatz des Hefts in Plenumsphasen etabliert eine Kultur der Reflexion, um Lernfortschritte, Schwierigkeiten und Herangehensweisen zu erörtern.

Die Lernenden präsentieren im Plenum ihre Entdeckungen zu den einzelnen Aufgaben, erläutern ihre Ideen, argumentieren mathematisch und sammeln Ergebnisse. Sprachliche Förderung hat in dieser Phase einen immanenten Platz.

Wenn Kinder ihre Ideen Vorgangsweisen usw. erläutern, können diese ein möglicher Anknüpfungspunkt für andere Kinder sein und von diesen bei der Bearbeitung des Auftrages unmittelbar genutzt werden.

3.2 Werkstatt, Wolkenkratzer, Luftschlösser: Komm wir bauen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Elemente von EMILs Kiste anhand der Lernumgebung „Werkstatt, Wolkenkratzer, Luftschlösser: Komm wir bauen“ konkretisiert.

Gemeinsam mit dem Hamster Emil erkunden die Kinder innerhalb der Lernumgebung geometrische Inhalte, „begreifen“ wortwörtlich erste geometrische Zusammenhänge, wie das Erfahren räumlicher Positionen und Lagebeziehungen, das Erfassen und Beschreiben einfacher geometrischer Figuren und das kreativ handlungsorientierte Gestalten mit geometrischen Körpern und Flächen. Sie notieren ihre Entdeckungen im EMIL-Heft und tauschen sich während des Arbeitsprozesses dazu aus. Dieses Material kann in Verbindung mit den Themenbereichen „Erfahrungs- und Lernbereich Raum“ (Sachunterricht) und „Sprechen“, „Erstlesen“(Deutsch) eingesetzt werden.

Die Lernumgebung „Werkstatt, Wolkenkratzer, Luftschlösser: Komm wir bauen!“ richtet sich an sehr junge Lernende. Bei der Gestaltung der acht Arbeitskarten wurde versucht, dies zu berücksichtigen, indem die Aufträge kurz und prägnant formuliert sind. Weiters wurde Bedacht auf den Wortschatz der betreffenden Altersgruppe im Sprachgebrauch genommen. Es wurden „nur“ Worte verwendet, die die Kinder bereits in ihrem Sprachgebrauch haben. Piktographische Hinweise ersetzen das Beschreiben von Dynamiken (z.B. Hinweise zu Sozialformen, Partnertausch). Die Karten werden nur als Ausgangspunkt für Mathematiktreiben genutzt, sollen aber nicht vom Wesentlichen – dem Ausprobieren selbst – ablenken, was sich in der schlichten Gestaltung widerspiegelt (siehe Abbildung 1).

Abbildung 1: Anleitungskarten für Kinderhände aus EMILs Kiste (Eigendarstellung)

Ein wichtiges Merkmal der Arbeitskarten sind die Unterstützungsangebote des Hamsters Emil. Er schenkt Ideen, um Kindern Hinweise zu geben, in welche Richtung die Entdeckungsprozesse gehen könnten. Sprachliche Hilfestellungen werden durch zur Verfügung gestellte Wörter angeboten, die für die Bearbeitung dieser konkreten Aufgabe wesentlich sind.

Die Lehr-Lernforschung zeigt, dass die Rückschau auf den Lernprozess wesentlich ist. Durch den Hinweis „Emil will wissen“ wird dieser Aspekt aufgegriffen (siehe Abbildung 2).

Abbildung 2: Unterstützungsangebote auf verschiedenen Ebenen (Eigendarstellung)

EMILs Kiste bietet in drei bewusst gewählten Bereichen Möglichkeiten auszuprobieren und Erfahrungen zu sammeln (siehe Abbildung 3).

Abbildung 3: Anleitungskarten zu EMILs Kiste:
Werkstatt, Wolkenkratzer, Luftschlösser: Komm wir bauen (Eigendarstellung)

Die Aufgabenstellungen im Bereich “Werkstatt” beziehen sich auf den Erwerb grundlegender Fertigkeiten. Erste Entdeckungen mit Bausteinen werden spielerisch gemacht. Sie führen zum Beschreiben, Ordnen und Sortieren, Auffinden von Gemeinsamkeiten und Unterschieden. Die Lernenden erfinden Muster, die sie fortsetzen. Grundlegende mathematische Einsichten, wie die Reihung, werden über das Spiel erkannt. Dabei nutzen die Kinder viele mathematische Fachbegriffe.

„Wolkenkratzer“ hat als Ausgangspunkt das freie Bauen. Kinder setzen ihre Kreativität ein und erkunden dabei geometrische Körper und ihre Eigenschaften. Sie dokumentieren ihre Bauwerke einerseits unter Verwendung von Zeichengeräten und andererseits digital durch selbstgemachte Fotografien. In der fortsetzenden Bearbeitung lernen sie verschiedene Arten von Ansichten kennen und verstehen. Dadurch werden aufmerksames Zuhören, das manchmal notwendige Nachfragen und das Gehörte in Handlungen umzusetzen geübt.

„Luftschlösser“ bieten weitere Möglichkeiten zu spannenden und kreativen Auseinandersetzungen. Eine geheimnisvolle Fühlbox wird genutzt, um alle Sinne anzusprechen. Zukunftsideen zur Gestaltung von Häusern werden ausgetauscht. Die Kinder schneiden, falten und kleben geometrische Körper, die Bestandteile einer Mathematik-Stadt werden können.

4 Zusammenschau

Die Idee eine Lernumgebung regelmäßig im Unterricht einzusetzen, kann unabhängig von der bereits gestalteten EMILs Kiste verstanden werden. Übergreifende mathematische Inhalte bieten sich, den Schulstufen angepasst, geradezu an, auf diese Weise erforscht zu werden. Der Kreativität der Lehrperson, diese Ziele zu erreichen, sind hier keine Grenzen gesetzt. Die Vorgehensweise im Unterricht, wie im Artikel beschrieben, garantiert, dass die Kinder sich auf die Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten einlassen, über das Handelnde Tun Denkprozesse starten und über die Kommunikation im täglichen Plenum Inhalte vernetzen. Alle hier vorgestellten Materialien und weiterführende Überlegungen für den Unterricht können unter https://shorturl.at/cdFTU nachgelesen werden.

Literatur

Bezold, A. (2011). Forschen im Mathematikunterricht - faszinierend! In: *Fördermagazin. Grundschule, 3/11*, S. 8—12.

Bruner, J. S. (1980). *Der Prozess der Erziehung* (5. Aufl). Berlin: Berlin-Verl.

Hengartner, E. (Hrsg.). (2001). *Mit Kindern lernen* (1. Aufl., (Nachdr.)). Klett und Balmer Baar.

Hengartner, E., Hirt, U., & Wälti, B. (2001). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht* (1. Aufl., Nachdr). Klett und Balmer Baar.

Holzinger, A. (2001). *Basiswissen Multimedia. 2: Lernen: kognitive Grundlagen multimedialer Informationssysteme* (1. Aufl). Vogel Würzburg.

Huber, L., Hellmer, J., & Schneider, F. (Hrsg.). (2013). Warum Forschendes Lernen nötig und möglich ist. In L. Huber, J. Hellmer & F. Schneider (Hrsg.): *Forschendes Lernen im Studium: Aktuelle Konzepte und Erfahrungen* (2. Auflage, S. 9—35). Universitäts Verlag Webler Bielefeld.

Jank, W., & Meyer, H. (2021). *Didaktische Modelle* (14. Auflage). Cornelsen Berlin.

Kobl, K., & Schedl, T. (2022). *Meine 1. Klasse fördern & fordern Mathe. Individuelle Lernwege für jedes Kind.* Auer Verlag Donauwörth.

Leuders, T. (2020). Entdeckendes Lernen—Produktives Üben. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.): *Fachdidaktik Mathematik: Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (2. Auflage, S. 236–263). Hannover: Klett/Kallmeyer.

Musilek, M., & Varelija-Gerber, A. (2024). Mathematik aus der Kiste. In: S. Rogl, C. Resch, E. Bögl, B. Gürtler, S. Hinterplattner & J. Klug (Hrsg.), *Begabung verändert—Förderliche Lernwelten erforschen, gestalten, implementieren*, Waxmann Münster, S. 437—448.

Syring, M. (2022). „Ich finde Vielfalt im Klassenzimmer gut, aber…" Einstellungen von Lehrkräften zum Umgang mit Heterogenität. *Schulmagazin 5-10*, 2022(7+ 8), S. 9 –11.

Sundermann, B., & Selter, C. (2013). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht* (4., überarbeitete Neuauflage). Cornelsen Scriptor Berlin.

Winter, H. (1996). *Mathematik entdecken: Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule; Reformen und Gegenreformen; Entdeckendes Lernen; Kreatives Üben* (5. Aufl). Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor.

Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik* (3., aktualisierte Auflage). Springer Spektrum Heidelberg.

Wittmann, E. Ch. (2017). Wider die Flut der „bunten Hunde" und der „grauen Päckchen": Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. Ch. Wittmann, & G.N. Müller: *Mathe 2000+: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (Neufassung, 1. Auflage, S. 152–166). Seelze; Stuttgart: Klett/Kallmeyer.

Mehr Freude an Mathematik durch Englisch – mit CLIL

Themenauswahl und unterstützende Aktivitäten für sprach-integrierten Mathematikunterricht in der Primarstufe

Sabine Sperk, BEd MEd[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2024.i2.a1292

Zusammenfassung

Mit dem neuen Lehrplan der Volksschule (2023) haben sich wesentliche Rahmenbedingungen für die Vermittlung einer lebenden Fremdsprache geändert – in Österreich bedeutet dies in den allermeisten Fällen, dass es dabei um die englische Sprache geht. Lehrkräfte sehen sich mit der Aufgabe konfrontiert, die vier zentralen Sprachkompetenzen – Hören, Sprechen, Lesen und Schreiben – innerhalb einer begrenzten Unterrichtszeit effektiv zu fördern. Als eine Strategie zur Bewältigung dieser Herausforderung bietet sich CLIL (Content and Language Integrated Learning) an – ein Ansatz, der auf das integrierte Erlernen von Inhalten und Sprachen abzielt. Hierbei werden Unterrichtsinhalte in der Fremdsprache vermittelt, unterstützt durch spezifische Fördermaßnahmen. Obwohl der Einsatz von CLIL für die fremdsprachliche Behandlung von Sachunterrichtsthemen in der Theorie gut beschrieben ist, trifft dies auf den sprachintegrierten Mathematikunterricht weniger zu. Dennoch kann Englisch effektiv als Kommunikationsmittel im Mathematikunterricht der Volksschulen genutzt werden, wobei die Themenwahl entscheidend ist. Insbesondere eignen sich Bereiche wie *Zahlen und Zählen*, *einfache Rechenoperationen*, *Formen und Körper*, *Größen*, *Rechnen mit Geld* sowie der Umgang mit *Brüchen*. Lehrkräfte sollten innerhalb dieser Bereiche gezielte Fördermaßnahmen ergreifen, etwa durch den Einsatz interaktiver, visueller und kommunikationsintensiver Übungen. Solche Methoden werden beispielhaft für das Thema *Formen* („Shapes“) illustriert.

Stichwörter: CLIL, Englisch, Mathematik, Volksschule, Primarstufe

[1] Pädagogische Hochschule Niederösterreich, Mühlgasse 67, 2500 Baden.
E-Mail: sa.sperk@ph-noe.ac.at

1 Zur Situation: Englisch an Volksschulen

Seit den 1990er Jahren ist das Lehren einer lebenden Fremdsprache in Österreich Teil des Lehrplans der Volksschule. Abgesehen von einigen Grenzregionen, in denen im Fremdsprachenunterricht die Sprache des Nachbarlandes gelehrt wird, dominiert hierbei die englische Sprache den Fremdsprachenunterricht an Volksschulen: Etwa 98% der Volksschüler*innen in Österreich hatten im Schuljahr 2019/2020 Unterricht in Englisch (Statistik Austria, 2022).

Die Gründe für das Erlernen der englischen Sprache bereits im Volksschulalter sind vielfältig: Die englische Sprache ist in der Lebenswirklichkeit der meisten Kinder allgegenwärtig und Kompetenzen in Englisch eröffnen den Kindern globalen Zugang zu Wissen und Kulturen und verbessern zukünftige Bildungs- und Berufschancen. Eine wichtige Rolle spielt in diesem Zusammenhang auch das Alter der Lernenden: Kindern fällt das Erlernen einer neuen Sprache bis zum Alter von etwa 10 Jahren deutlich leichter als zu einem späteren Zeitpunkt (Kuhl, 2014) – dies verdeutlicht die nachfolgende Darstellung.

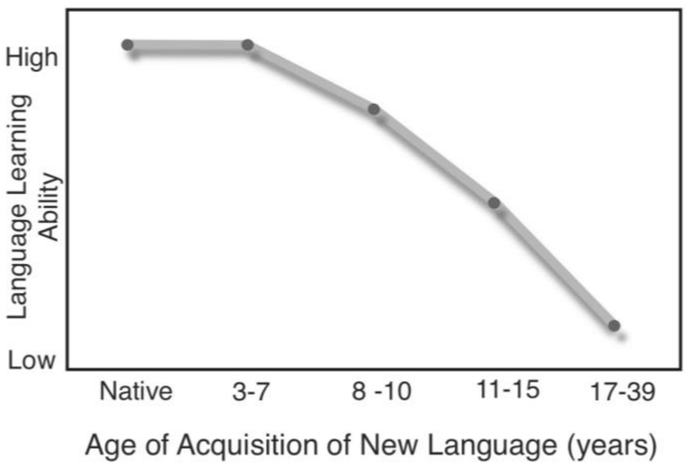


Abbildung 1: Fremdsprachenlernfähigkeit nach Alter (Kuhl, 2014)

Diesem Umstand hat auch die österreichische Bildungspolitik Rechnung getragen, indem ein ab dem Schuljahr 2023/2024 gültiger, neuer Lehrplan beschlossen wurde (BMBWF, 2023a). Der Fremdsprachenunterricht wurde darin insgesamt gestärkt und an internationale Standards, wie beispielsweise den gemeinsamen europäischen Referenzrahmen für Sprachen (Europarat, 2024) angepasst. Im neuen Lehrplan ist vorgesehen, dass der Englischunterricht in den ersten und zweiten Klassen integrativ zu erfolgen hat; entsprechende Unterrichtseinheiten müssen somit im Rahmen bestehender Fächer wie etwa Sachunterricht eingebaut werden. Eine wesentliche Neuerung dieses Lehrplans ist es jedoch, dass die lebende Fremdsprache in der dritten und vierten Schulstufe der Volksschule als verbindliche Übung mit jeweils einer Wochenstunde verankert wurde. Englisch wird in diesen Schulstufen somit zum

Pflichtgegenstand und Lehrer*innen müssen Ihren Unterricht dementsprechend (um)-gestalten.

Diese Neuausrichtung stellt Lehrer*innen jedoch vor Herausforderungen, da der neue Lehrplan zwar zu erlangende Kompetenzen beschreibt, jedoch nur wenig Handlungsanleitung für einen erneuerten Englischunterricht gibt. Obwohl hierzu keine empirischen Daten vorliegen, bleibt zu vermuten, dass die meisten Volksschullehrer*innen beim Übergang in ein neues Fremdsprachenlehrkonzept noch stark auf ihre bisherigen methodisch-didaktischen Ansätze zurückgreifen werden. Anders ausgedrückt: Angesichts der vielen Herausforderungen in einer Volksschulklasse werden viele Lehrer*innen versuchen, den Englischunterricht mit ähnlichen Mitteln wie bisher zu bestreiten. Dies wird jedoch – auch angesichts der noch nicht final geklärten Diskussion um Notengebung in Englisch in der Volksschule – zunehmend schwieriger werden.

Doch wie kann ein umfassenderer und integrativer Englischunterricht in der Volksschule gelingen, und zwar ohne größere zusätzliche (zeitliche) Ressourcen? Wie kann die Fremdsprache Englisch sogar in den Mathematikunterricht integriert werden? Diese Fragestellung wird im Folgenden beleuchtet.

2 CLIL als Ansatz für umfassenderen, integrativen Englischunterricht in der Volksschule

CLIL steht für *Content and Language Integrated Learning* und stellt einen Bildungsansatz dar, der „überzeugend und wirksam Sprache und fachliche Inhalte zusammenbringt und die Sprache nicht ausschließlich als Lerngegenstand begreift, sondern zum Medium, zum Vehikel der Kommunikation werden lässt“ (Endt, 2014, S. 6). Der Begriff wurde 1994 von David Marsh und Anne Maljers geprägt. Während beim traditionellen Fremdsprachenlernen und -lehren die Strukturen und Regeln der Fremdsprache im Vordergrund stehen (z.B. Vokabular, Grammatik), versteht sich CLIL als Bildungsansatz, der das integrierte Lernen von Sprache und Inhalt beschreibt. In dieser stark von Kommunikation geprägten Methode, werden Inhalte eines Sachfachs in der Fremdsprache unterrichtet. Deshalb wird CLIL auch als „integriertes Sprachenlernen“ bezeichnet.

Im neuen Lehrplan der Volksschule (BMBWF, 2023a, S. 16) wird CLIL ausdrücklich als Methode zur Verbesserung der fremdsprachlichen Kompetenz erwähnt. CLIL bietet dabei den Vorteil, dass in einer Volksschulklasse mehr Unterricht in Englisch gehalten werden kann, ohne andere Fächer zu vernachlässigen: „Using English in all subjects. Eine stärkere Gewichtung des Fremdsprachenunterrichts bei gleicher Unterrichtszeit (eine Wochenstunde) bedeutet für Lehrpersonen, dass sie Englisch auch in anderen Gegenständen einsetzen sollen. Eine Möglichkeit, dieser Herausforderung zu begegnen, ist CLIL“ (Österreichisches Sprachen-Kompetenz-Zentrum, 2024).

Die grundlegenden Prinzipien von CLIL sind:

- Sprache wird sowohl zum Lernen als auch zur Kommunikation verwendet.
- Die Inhalte des Sachfachs bestimmen, welche sprachlichen Komponenten gelernt werden sollen.
- Das Anbieten geeigneten Materials ist ein wesentlicher Faktor für den Lernerfolg.
- Um ihr volles Potenzial zu entfalten, benötigen CLIL-Unterrichtseinheiten spezifische Planung und Vorbereitung.
- Lehrkräfte müssen unterstützende Strukturen bereitstellen, die den Lernenden helfen, neue Verständnisse, neue Konzepte und neue Fähigkeiten zu entwickeln – sogenanntes *Scaffolding*. (Coyle, et al. 2010).

Als Grundpfeiler für erfolgreichen CLIL-Unterricht haben Coyle et al. (2010) die sogenannten 4Cs definiert:

1. **Content** (Inhalt): Hier geht es um das Fachwissen, das Schüler*innen lernen. Dies umfasst Fakten, Konzepte und Fähigkeiten in einem bestimmten Fachgebiet.
2. **Communication** (Kommunikation): Dies bezieht sich auf die Verwendung der Sprache als Werkzeug zur Vermittlung und zum Verständnis von Inhalten. Es geht darum, wie Schüler*innen durch Sprechen, Hören, Lesen und Schreiben in der Zielsprache lernen und kommunizieren.
3. **Cognition** (Kognition): Dies betrifft die Denkprozesse, die beim Lernen und Verstehen von Inhalten involviert sind. Es bezieht sich auf die Entwicklung von kritischem Denken und Problemlösungsfähigkeiten durch die Interaktion mit dem Fachinhalt.
4. **Culture** (Kultur): Dieses Element hebt die Bedeutung des Verständnisses und der Wertschätzung kultureller Vielfalt und Perspektiven hervor. Es geht darum, wie die Kultur die Art und Weise beeinflusst, wie die Welt verstanden wird und ist integraler Bestandteil des Lernens in einem CLIL-Kontext.

In der Praxis einer Volksschulklasse bedeutet CLIL also, dass der Unterricht so gestaltet wird, dass Schüler*innen gleichzeitig in einem bestimmten Sachfach lernen und ihre Sprachkenntnisse verbessern, indem der Lernstoff in der Zielsprache präsentiert wird.

3 Englisch als Kommunikationsmittel für Mathematik

Der Gedanke, in der Volksschule die englische Sprache zur Vermittlung von mathematischen Inhalten zu verwenden, mag auf den ersten Blick Fragen in Bezug auf die Praxistauglichkeit aufwerfen. CLIL bietet als Bildungsansatz zwar durchaus viele Vorteile, stellt Lehrer*innen in der Volksschule jedoch durchaus vor Herausforderungen, etwa in Bezug auf die Bereitstellung angemessener Materialien oder die Sicherstellung des Verständnisses des Fachinhalts in der Fremdsprache.

Prinzipiell kann CLIL aber als Methode verstanden werden, mit der – auch in der Volksschule – ein sehr breites Portfolio an Unterrichtsthemen gelehrt werden kann und dazu gehören neben dem Sachunterricht auch Mathematik, Kunst, Musik oder Sport (Pavesi et al., 2001).

Naturgemäß unterscheidet sich die verwendete Fachsprache in diesen Disziplinen stark. Bei einer sprachintegrierten Vermittlung von Inhalten ist deshalb besonders darauf zu achten, dass diese Fachsprache richtig eingesetzt wird.
Nachdem sich die Mathematik um Eindeutigkeit bemüht, gilt es für mathematische Themen besonders, eine *inhaltlich verpflichtende* Sprache zu vermitteln, diese wird im Englischen als *Content-obligatory Language* bezeichnet. Damit werden jene Sprachbausteine beschrieben, die notwendig sind, um die spezifischen Fachinhalte und die Lernziele des Fachunterrichts zu vermitteln (University of Cambridge, 2010, S. 3). Für ein erweitertes Verständnis benötigt es jedoch noch zusätzliche Sprachkomponenten, welche als *inhaltlich kompatible Sprache* (Content-compatible Language) bezeichnet werden. Es handelt sich hierbei um Sprachbestandteile, welche die Schüler*innen bereits in vorherigen Unterrichtseinheiten kennengelernt haben sollten und die ihnen dabei helfen, besser über das Thema zu kommunizieren (University of Cambridge, 2010, S. 3).

Für das Thema *Formen* könnten Volksschullehrkräfte beispielsweise folgende Sprachinhalte identifizieren:

Inhaltlich verpflichtende Sprache (*Content-obligatory Language*)	**Inhaltlich kompatible Sprache** (*Content-compatible Language*)
square (Quadrat)	part of (ein Teil von)
triangle (Dreieck)	flat (flach)
circle (Kreis)	round (rund)
rectangle (Rechteck)	sharp (scharf)
edge (Kante)	top, middle, bottom (oben, mittig, unten)
corner (Ecke)	

Tabelle 1 – Verpflichtende und kompatible Sprachelemente für das Thema „Formen und Körper“ (eigene Darstellung)

Unabhängig von diesen sprachlichen Überlegungen stellt sich die Frage, welche Sachinhalte sich für CLIL eignen – und welche nicht. Derzeit liegen keine empirischen Daten für die Verbreitung von CLIL-basiertem Unterricht an österreichischen Volksschulen vor. Dennoch kann angenommen werden, dass Lehrkräfte, die integrierten Sprachunterricht praktizieren, einen Schwerpunkt auf die Inhalte des Sachunterrichts legen. Der Grund dafür liegt in einer vergleichsweisen guten Verfügbarkeit von Lehrmaterialien, sowie dem starken Bezug vieler Sachunterrichtsthemen zur Lebenswirklichkeit von Volksschulkindern. Außerdem ist die Vermittlung von Sachunterrichtsinhalten mit einem CLIL-basierten Ansatz in der Theorie gut beschrieben. Anders sieht es im Bereich Mathematik aus – welche Ansätze für ein sprachintegriertes

Lernen von Mathematik in der Volksschule Erfolg versprechen, wird in der Literatur aktuell kaum behandelt.
Wäre – zumindest in der Theorie – der gesamte Mathematikunterricht für eine CLIL-basierte Vermittlung in englischer Sprache geeignet? Sehr wahrscheinlich nicht. Viebrock (2009) betont die besondere Bedeutung der Auswahl mathematischer Themen für eine Vermittlung mit CLIL und legt nahe, dass insbesondere solche Themen gewählt werden sollen, die visuell darstellbar sind und konkrete Anwendungen in der Lebenswirklichkeit der Lernenden haben.

Geht es etwa um komplexere Textaufgaben, so ist eine mehrschrittige Mathematisierung und Modellierung notwendig, die umfassendes Text- und Sprachverständnis voraussetzt (Schneeberger, 2009). Die dafür notwendigen sprachlichen Kompetenzen übersteigen den Anforderungsrahmen der Volksschule. Ein weiteres Beispiel für ein wenig geeignetes Thema der CLIL-basierten Inhaltsvermittlung wäre die Erarbeitung der 10er-Überschreitung. Es handelt sich hierbei um ein abstraktes Konzept, das viele Kinder bereits in ihrer Muttersprache vor Herausforderungen stellt (BMBWF, 2023b) und sich deshalb wenig für eine CLIL-basierte Vermittlung eignet.

Davon abgesehen, gibt es jedoch eine große Bandbreite an mathematischen Themen, die in der Volksschule sehr gut mit einem CLIL-Ansatz vermittelt, bzw. vertieft werden können.

Für eine konkrete Auswahl müssen Lehrkräfte dabei eine Reihe von Fragen berücksichtigen:

- Welches Vorwissen besitzen die Lernenden in der englischen Sprache zu einem Thema?
- Ist das Thema im Rahmen eines für die Volksschule angestrebten Sprachniveaus (A1) vermittelbar?
- Wie gut eignet sich das Thema methodisch für eine visuelle Darstellung?
- Lässt sich die Fachsprache (inhaltlich-verpflichtend, inhaltlich-kompatibel) altersadäquat umsetzen?
- Wie gut eignet sich das Thema für kommunikationsintensive und interaktive Lehrformate?
- Welchen Bezug hat das Thema zu konkreten Anwendungen in der Lebenswirklichkeit der Lernenden?
  (durch die Autorin für die Volksschule abgeleitet von BMBWF, 2022, S.19)

In der Zusammenschau dieser Fragestellungen, sowie den Lehrinhalten von Mathematik in der Volksschule, wurden die folgenden Unterrichtsthemen von der Autorin als besonders geeignet für einen CLIL-basierten Unterricht identifiziert:

Zahlen und Zählen (Numbers and Counting)	- Learning to count in English - Comparing numbers – more than, less than - There are numbers all around us
Formen und Körper (Shapes and Bodies)	- Names of shapes and bodies - Describing properties: sides, corners - Comparing sizes: big, long, small, short
Größen (Measurements)	- Learning units of measurement: meter, centimeter, kilogram, gram - Simple measurements: length, height, weight, volume

	- Understanding time: reading the clock
Rechnen mit Geld (Calculating with money)	- Recognizing currency: coins and notes - Simple calculations with money - Understanding buying and selling
Brüche (Fractions)	- Understanding the basics of fractions - Real-life applications of fractions - Comparing fractions
Einfache Rechenoperationen (Simple arithmetic operations)	- Basic addition and subtraction for real-life situations - Practicing the 1x1 multiplication table

Tabelle 2 – Themen für einen CLIL-basierten Mathematikunterricht in der Volksschule (eigene Darstellung)

4 Methoden und Tools in CLIL – Beispiele für einen sprach-integrierten Mathematikunterricht

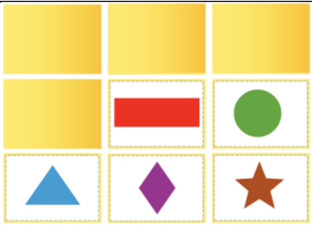
Für die praktische Umsetzung des CLIL-basierten Unterrichts ist Interaktion einer der zentralen Ansätze. Dies liegt daran, dass Interaktion automatisch auch Kommunikation fördert, welche eines der 4 Cs von CLIL darstellt. Wie kann also Interaktion gefördert werden? Eine Möglichkeit ist die Anwendung verschiedener Formen von Partner- oder Gruppenarbeit (Montalto & Walter, 2021, S. 42).

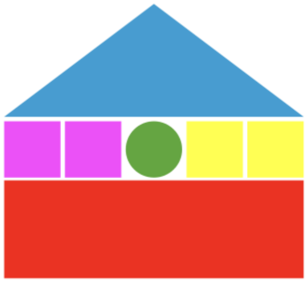
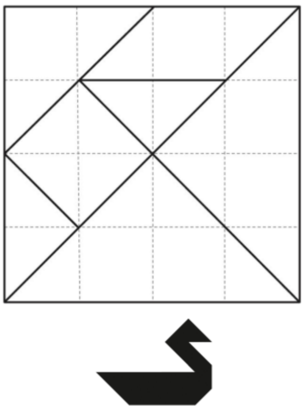
Im Folgenden werden dazu Methoden und Tools für interaktiven CLIL-Unterricht am Beispiel *Formen* (Shapes) dargestellt.

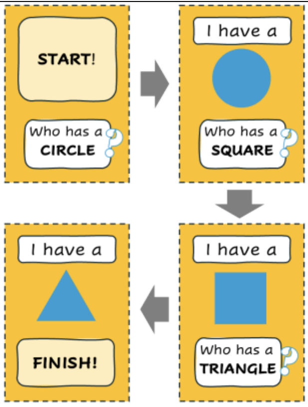
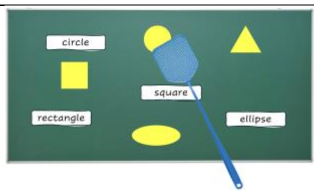
Nachdem mit CLIL ausdrücklich auch im Kontext Mathematik ein *Content First* Ansatz verfolgt wird (University of Cambridge, 2010), sollen zunächst die fachlichen Ziele für diese Unterrichtseinheiten definiert werden:

1. Formen erkennen und benennen
2. Eigenschaften von Formen (z.B. Anzahl der Ecken, Seitenlänge)
3. Vergleich und Klassifizierung von Formen
4. Räumliches Denken – Erlangung eines grundlegenden Verständnisses dafür, wie Formen in der realen Welt angewendet und erkannt werden können
5. Kreatives Gestalten mit Formen

Für eine Erarbeitung der Inhalte in der Zielsprache Englisch werden nachfolgend beispielhaft Aktivitäten dargestellt, mittels derer diese gesteckten Ziele erreicht werden können.

Beschreibung	Beispiel	Sprachliche Ziele
Flashcard Memory *Art der Aktivität*: Visualisierung, aktiver Abruf *Unterrichtsform*: Übung im Klassenplenum *Ablauf:* Formen werden als Karten an die Tafel geheftet und nacheinander in englischer Sprache benannt. Nach einem Durchlauf wird eine Form an der Tafel abgedeckt. Die Schüler*innen müssen die fehlende Form memorisieren. Danach werden alle Formen erneut durchgegangen und eine weitere Karte verdeckt. Dies erfolgt so lange, bis alle Flashcards verdeckt sind und – im Idealfall – memorisiert wurden. Danach werden die Flashcards schrittweise wieder aufgedeckt, bis alle wieder sichtbar sind.	 *(eigene Darstellung)*	- Wortschatzaufbau - Hörverstehen - Sprechfähigkeit
The little blue square *Art der Aktivität*: Verfestigung durch Storytelling *Unterrichtsform*: Übung im Klassenplenum *Ablauf:* Die Lehrerin vermittelt die Geschichte vom „Little blue Square“. Diese Geschichte ist im Deutschen unter dem Namen „Das kleine blaue Quadrat“ gut bekannt. Dazu werden verschiedene (blaue) Formen an die Tafel geheftet und direkt dort gefaltet. Die Präsentationsform einer Geschichte fördert einen kreativen Zugang zur Sprache und ermöglicht kontextbezogenes Lernen.	 *(eigene Darstellung)*	- Hörverstehen
I spy, I spy with my little eye *Art der Aktivität*: Spiel *Unterrichtsform*: Übung im Sitzkreis *Ablauf:* In der englischen Variante von „Ich seh, ich seh, was du nicht siehst“ werden im Klassenzimmer Formen gesucht und von den Kindern benannt. Diese Aktivität verbindet das Unterrichtsthema mit der Lebenswirklichkeit der Kinder.		- Hörverstehen - Visualisierung
Monster aus Formen *Art der Aktivität*: Kommunikationsübung *Unterrichtsform*: Übung im Klassenplenum *Ablauf:* Jedes Kind erhält ein Arbeitsblatt, auf dem unterschiedliche Monster abgebildet sind, welche aus geometrischen Formen bestehen. Die Lehrkraft		- Hörverstehen - Aktivierung von Vorwissen

beschreibt eines der Monster verbal und die Kinder müssen dieses auf dem Arbeitsblatt identifizieren.	*(eigene Darstellung)*	
Buildings *Art der Aktivität*: Sprechübung *Unterrichtsform*: Partnerarbeit *Ablauf:* Jedes Kind zeichnet ein einfaches Gebäude bestehend geometrischen Formen. Ein Kind sagt seinem Partner oder seiner Partnerin dann verbal woraus sein (verdecktes) Gebäude besteht. („At the bottom, there is a rectangle“). Das Kind jeweils andere Kind versucht dann, das Gebäude nachzuzeichnen bzw. dieses mit Plättchen nachzulegen. Am Ende der Übung werden die Arbeiten verglichen und diskutiert.	 *(eigene Darstellung)*	- Sprechfähigkeit - Hörverstehen - Sätze bilden
Find the shapes! *Art der Aktivität*: Suchspiel im Freien *Unterrichtsform*: Einzel- oder Partnerarbeit *Ablauf:* Die Kinder erhalten eine Liste mit Formen für eine Suche. Sie erhalten dann im Freien (z.B. Schulgarten) 10-15 Minuten Zeit, um dort nach Gegenständen zu suchen, die den auf dem Zettel angegebenen Formen entsprechen. Die Gegenstände werden dann auf der Liste mit dem dazugehörigen englischen Wort vermerkt.		- Schreibfähigkeit - Visualisierung
Tangram *Art der Aktivität*: Werkübung *Unterrichtsform*: Einzelarbeit *Ablauf:* Die Kinder gestalten im Werkunterricht ein einfaches Tangram-Spiel. Dieses wird aus dünnem Holz mittels Laubsäge gesägt. Aus den 7 Formen können Dutzende Figuren gelegt werden. Die Lehrperson erklärt den Kindern die einzelnen Arbeitsschritte in englischer Sprache.	 *(eigene Darstellung)*	- Hörverstehen - Sprechfähigkeit

I have, who has? *Art der Aktivität*: Kommunikationsspiel *Unterrichtsform*: Übung im Sitzkreis *Ablauf:* Bei dieser Übung erhält jedes Kind eine Karte mit einer Form, sowie einer Frage. Ein Kind startet und liest seine Karte vor. Beispiel: „I have a circle. Who has a square?“. Jenes Kind, das die Karte mit dem Quadrat besitzt, liest nun seinerseits die Karte vor. Das Spiel endet, sobald jedes Kind seine Karte vorgelesen hat. Diese Übung eignet sich zur Wortschatzfestigung für mehrfache Wiederholung über einen Zeitraum.	 *(eigene Darstellung)*	- Hörverstehen - Sprechfähigkeit - Wortschatzfestigung - Lesefähigkeit
Fly swatter *Art der Aktivität*: Spiel *Unterrichtsform*: Übung mit 10-14 Kindern *Ablauf:* Eine Variante des bekannten Spiels mit Fliegenklatschen. An der Tafel sind unterschiedliche geometrische Formen, sowie deren englische Begriffe abgebildet. Jedes Kind bekommt eine Fliegenklatsche. Die Lehrkraft spricht nun entweder das englische Wort für eine Form aus, oder zeigt den Kindern eine Form. Die Kinder müssen schnellstmöglich zu einem ausgesprochenen Begriff die Form, bzw. zu einer gezeigten Form den Begriff mit der Fliegenklatsche abklatschen.	 *(eigene Darstellung)*	- Wortschatzfestigung - Hörverstehen

Literatur

Attard Montalto, S., Walter, L. (2021). *The CLIL4U Guidebook*. https://languages.dk/archive/clil4u/book/clil%20book%20en.pdf

Bundesministerium für Bildung, Wirtschaft und Forschung (2022). *Content and Language Integrated Learning (CLIL). Handreichung zur Umsetzung an Höheren land- und forstwirtschaftlichen Schulen.* *https://www.hum.at/images/unterrichtsentwicklung/CLIL/CLIL_Handreichung_2022_Druckversion.pdf*

Bundesministerium für Bildung, Wirtschaft und Forschung (2023a). *Lehrplan der Volksschule.* https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_vs.html

Bundesministerium für Bildung, Wirtschaft und Forschung (2023b). *Der schulische Umgang mit Rechenschwierigkeiten. Eine Handreichung.* *https://www.schulpsychologie.at/fileadmin/upload/lernen_leistung/Dyskalkulie/Rechenschwaeche_web.pdf*

Coyle, D., Hood, P. & Marsh, D. (2010). *CLIL: Content and Language Integrated Learning*. Cambridge University Press.

Endt, E. (2014). CLIL – einige Anmerkungen zum Gewinn integrierten Sprach- und Sachfachlernen. *Frühes Deutsch Heft 33,* S. 6–8. Bertelsmann

Europarat (2024). *Gemeinsamer europäischer Referenzrahmen für Sprachen.* https://www.coe.int/en/web/common-european-framework-reference-languages

Kuhl, P. (2014). *Early Language Learning and the Social Brain. Cold Spring Harb Symp Quant Biol.;79*: S. 211–20.

Österreichisches Sprachen-Kompetenz-Zentrum (2024). *Englisch für die Primarstufe.* https://www.oesz.at/themen/fremdsprachen/englisch-fuer-die-primarstufe

Pavesi, M., Bertocchi, D., Hofmannová, M., & Kazianka, M. (2001). *Teaching through a foreign language; a guide for teachers and schools to using foreign languages in content teaching*. http://www.ub.edu/filoan/CLIL/teachers.pdf

Schneeberger, M. (2009): *Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog. Der Erwerb von Mathematisierkompetenz als Initiation in eine spezielle Diskurspraxis*. Waxmann Verlag GmbH.

Statistik Austria (2022). *Bildung in Zahlen. Tabellenband.* https://www.statistik.at/fileadmin/pages/325/Bildung_in_Zahlen_20_21_Tabellenband.pdf

University of Cambridge (2010). *Teaching Maths through English – a CLIL approach.* https://www.cambridgeenglish.org/Images/168751-teaching-maths-through-english-a-clil-approach.pdf

Viebrock, B. (2009). M2 (multilingual x mathematical) – Some Considerations on a Content and Language Integrated Learning Approach to Mathematics. *ForumSprache*, 2009(2), S. 62–82.

R&E-SOURCE
Eigentümerin und Medieninhaberin:
Pädagogische Hochschule Niederösterreich
Mühlgasse 67, 2500 Baden
www.ph-noe.ac.at | journal.ph-noe.ac.at

Die Beiträge der Zeitschrift **R&E**-SOURCE erscheinen unter der Lizenz CC-BY-NC-ND.
2024 by Pädagogische Hochschule Niederösterreich
ISSN 2313-1640

Die nächste reguläre Ausgabe von **R&E**-SOURCE im 11. Jahrgang des Journals widmet sich dem Thema

wissen schaffen.lernen

Einreichungen sind bis 31. Juli 2024 herzlich willkommen unter
https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/about/submissions
Erscheinungsdatum: 15. Oktober 2024