R&E SOURCE

research & education

More of Mathematics

10. Jg. (2023), Nr. 2

Konferenzband zum

Tag der Mathematik

Inhaltsverzeichnis

ISSN 2313-1640

Editorial

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1181

Der Tag der Mathematik am 17. Februar 2023 widmete sich einem ganz speziellen Thema: Mathematik und ICH – Selbstkonzept durch Freude und Sinn in Mathematik stärken**.** Eine Herausforderung an die Referent*innen des Tages, denn die Erwartungen der Teilnehmer*innen waren hoch – und sie wurden nicht enttäuscht. Basierend auf grundlegenden Überlegungen zum Selbstkonzept und dem Einfluss von Emotion und Motivation auf den Mathematikunterricht wurden diese Gedanken in den unterschiedlichen Workshops in die Praxis umgesetzt. An dieser Stelle ein Dankeschön an die hervorragenden internationalen Expert*innen. Die Bedürfnisse der Kolleg*innen aus der Primarstufe konnten ebenso gestillt werden – wie der Tag auch den Erwartungen der Kolleg*innen aus der Sekundarstufe gerecht wurde.

Die Einschätzung der eigenen mathematischen Kompetenzen und das Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten wird als Selbstkonzept dieser spezifischen Domäne bezeichnet. Ein tragfähiges Selbstkonzept beeinflusst einen positiven mathematischen Lernprozess, woraus sich eine höhere Erfolgserwartung schließen lässt, die einen positiven Einfluss auf die Leistung in Lernprozessen nach sich zieht. Dies zeigt sich in motiviertem Bearbeiten mathematischer Problemstellungen und einer höheren Selbstwirksamkeitserwartung auf die zukünftigen Lernsituationen und Aufgabenbewältigungen. Motivationale und emotionale Überzeugungen beeinflussen die auf Mathematik bezogene Selbstwirksamkeit, stärken das gesamte Selbstkonzept und beeinflussen nicht nur den mathematischen Lernprozess, sondern auch die Berufswahl und das gesamte, lebenslange Lernen. Die Angst vor Mathematik kann einen großen Einfluss auf das weitere Leben unserer Schüler*innen haben. Selbstkonzept und Selbstwirksamkeit korrelieren positiv mit der eigenen mathematischen Leistung. Eine durch negative Erfahrung manifestierte Überzeugung („Ich kann Mathematik nicht. Ich bin nicht gut mit Zahlen“ u. ä.), den Erwartungen nicht zu entsprechen und dafür selbstverantwortlich zu sein, drückt sich in erlernter Hilflosigkeit aus.

Positive Emotionen gehen aus einer gelingenden Aufgabenbewältigung hervor sowie aus einem Mathematikunterricht, der den Lernenden Möglichkeiten für Erfolgserlebnisse vermittelt, Lernumgebungen schafft, die die verschiedenen Bedürfnisse der Lernenden einbezieht, und vor allem Freude am mathematischen Denken erzeugt.

In den Workshops wurden die Teilnehmer*innen zu möglichen Wegen zu einem gelingen Selbstkonzept, zur Umsetzung von Freude an Mathematik angeleitet. Unterschiedliche Konzepte wurden vorgestellt, sodass auch jede Lehrperson für sich passende Ideen gefunden hat.

Die ideale Ergänzung dazu bildete die *Mathematik-Messe*, die verschiedenen Verlagen, sowie GeoTec und Check-it-Games, die Möglichkeit bot, den Teilnehmer*innen mit ihren Produkten weitere Unterstützung bei ihrem Vorhaben, den Mathematikunterricht mit Sinn und Freude auszustatten, damit niemand mehr Angst vor Mathematik haben muss und sein mathematisches Selbstkonzept positiv konnotieren kann.
Ein besonderer Dank soll noch an das *Mathematik-Team der PH NÖ* ausgesprochen werden, ohne deren Unterstützung dieser erfolgreiche Tag mit über 200 Teilnehmer*innen aus verschiedenen Bundesländern – so wie aus Ungarn und Deutschland – nicht so gelingen hätte können. Außerdem möchte ich die Hochschulvertretung nicht unerwähnt lassen, die mit großem Einsatz für das leibliche Wohl der Tagungsteilnehmer*innen und Tagungsreferent*innen gesorgt hat.

Elisabeth Mürwald-Scheifinger

R&E SOURCE

10. Jg. (2023), Nr. 2: More of Mathematics
Konferenzband zum Tag der Mathematik

Zufällig Mathematik

Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik für die Grundschule handlungsorientiert aufbereitet

Sabine Apfler[1], Monika Musilek[2], Anita Summer[3]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1169

Zusammenfassung

Die Themen Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik werden neu in den Lehrplan der Volksschule aufgenommen. Dies macht es notwendig, dass sich Lehrpersonen damit auseinandersetzen, wie diese Themenbereiche handlungsorientiert im Unterricht bearbeitet werden können. Beim Tag der Mathematik wurden in einem Workshop konkrete Praxisbeispiele zu allen Themenbereichen vorgestellt und der fachdidaktische Hintergrund diskutiert. Exemplarisch wird in diesem Beitrag jeweils ein Beispiel veranschaulicht.

Stochastik, Handlungsorientierung, Praxisbeispiele, Grundschule

1 Ausgangslage

Mit Inkrafttreten des neuen Lehrplans der Volksschule (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung [BMBWF], 2023) ist auch die Vermittlung stochastischer Inhalte vorgesehen. So sollen Schüler*innen …

> Daten aus ihrer unmittelbaren Lebenswelt erheben und mit Strichlisten und Tabellen darstellen; Strichlisten und Tabellen interpretieren (1. Schulstufe), [...] Daten aus ihrer Lebenswelt erheben und mit Säulen- und Balkendiagrammen darstellen; Säulen- und Balkendiagramme sowie Piktogramme interpretieren (2. Schulstufe), [...] einfache kombinatorische Abzählaufgaben darstellen und lösen; die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen ihrer Lebenswelt qualitativ beschreiben und vergleichen (3. Schulstufe), [...] sowie einfache Zufallsexperimen-

[1] Pädagogische Hochschule Niederösterreich, Mühlgasse 67, 2500 Baden.
E-Mail: s.apfler@ph-noe.ac.at
[2] Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.
E-Mail: monika.musilek@phwien.ac.at
[3] Kirchliche Pädagogische Hochschule Wien/Krems, Mayerweckstraße 1, 1210 Wien.
E-Mail: anita.summer@kphvie.ac.at

te durchführen und wiederholen; Ergebnisse und ihre absoluten Häufigkeiten darstellen sowie Wahrscheinlichkeiten qualitativ vergleichen (4. Schulstufe).

Diese Vorgaben stellen neue fachliche Anforderungen an die (angehenden) Lehrpersonen. Die Vorerhebung „DaWaKo“ (Musilek, Apfler & Summer, im Druck) zeigt für die Stichprobe aus den Hochschulen NÖ, Wien und KPH, dass in den Bereichen Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik sowohl in der Einschätzung des eigenen Wissens als auch im Wissen um die unterrichtliche Umsetzung Mängel bei angehenden Grundschullehrpersonen bzw. Lehrpersonen in den ersten Dienstjahren bestehen.
Dies belegen Studien im deutschsprachigen Raum, obwohl diese Bereiche dort schon seit längerem in den Curricula verankert wurden. So bestätigen Sill & Kurtzmann (2019, S. 3 f), dass Lehrende der Primarstufe aufgrund ihrer Ausbildung den fachlichen Anforderungen möglicherweise nicht ausreichend gewachsen wären.
Es besteht daher die dringende Notwendigkeit, die Bereiche der Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik bei Lehrerfortbildungen, Konferenzen und Tagungen nicht nur zu thematisieren, sondern auch konkrete Umsetzungsmöglichkeiten für die Bearbeitung zu präsentieren. Dies hatte der am „Tag der Mathematik 2023“ durchgeführte Workshop zum Ziel: Die Teilnehmer*innen arbeiteten an den drei Themenbereichen und erhielten konkrete Umsetzungsideen für die Schulwirklichkeit. Exemplarisch soll im vorliegenden Artikel jeweils ein Handlungsfeld pro Themenbereich eröffnet werden.

2 Zur Arbeit mit Daten in der Primarstufe

2.1 Theoretischer Hintergrund

Die theoretische Basis für die Entwicklung von Datenkompetenz bei Kindern der Primarstufe stellt der Datenanalyse-Zyklus (PPDAC-Cycle) nach Wild und Pfannkuch (1999) dar. Dieser Zyklus besteht aus den Phasen *Problem* (Entwicklung einer statistischen Fragestellung), *Plan* (Planen der Datenerhebung), *Data* (Datenerhebung auf Basis einer Umfrage, Beobachtung oder eines Experiments), *Analysis* (Darstellung und Analyse der gesammelten Daten) und *Conclusions* (Interpretation der Ergebnisse). Zentrale Unterrichtsziele der Primarstufe sind das Erheben, Strukturieren und Darstellen von Daten (PIKAS, 2020b).
Die Schüler*innen sollen demnach lernen, wie man Daten über Objekte oder Ereignisse erfasst, wie man sie dokumentiert, und dass es erforderlich ist, Kriterien oder Merkmale festzulegen, nach denen die beobachteten Objekte oder Ereignisse unterschieden werden sollen. Weiters sollen die so erfassten Daten sinnvoll dargestellt werden (z.B. in Diagrammen und Tabellen) und es soll erarbeitet werden, wie man aus derartigen Darstellungen Informationen entnimmt und diese benutzt, also beispielsweise vergleicht und interpretiert (Neubert, 2012, S. 37).

Zu Beginn können den Kindern Fragestellungen aus dem schulischen Kontext oder aus Themengebieten wie Haustiere, Hobbies etc. zur Verfügung gestellt werden. Allerdings wirkt sich die Generierung eigener Fragestellungen besonders positiv auf die Motivation der Kinder aus. Dabei müssen die Lernenden allerdings z. B. durch Wortspeicher, die bereits Fragesegmente vorgeben, unterstützt werden (PIKAS, 2020a).
Die gesammelten Daten sollen von den Kindern in geeigneter und übersichtlicher Form festgehalten werden. Strukturierte Strichlisten oder die Übertragung von Säulen aus Bausteinen in ein einfaches Säulendiagramm werden erarbeitet. Die Achsenbeschriftung und das Finden von kurzen und aussagekräftigen Kategorienamen stellen hierbei eine große Herausforderung dar (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 54 f).
Ergebnisse von Datenerhebungen können auch beispielsweise auf einem Plakat präsentiert werden, verschiedene Darstellungsformen (wie z. B. Säulendiagramm, Kreisdiagramm, Strichliste) von Daten sollen miteinander vergleichen und Vor- bzw. Nachteile herausgearbeitet werden (PIKAS, 2020a). Die Interpretation von Daten kann in drei Typen von Fragestellungen unterteilt werden:

1. reading the data („Auslesen“ von Informationen zur Beantwortung expliziter Fragen, für welche die offensichtliche Antwort direkt im Diagramm zu finden ist)
2. reading between the data (Interpolieren und Auffinden von Beziehungen zwischen den dargestellten Daten)
3. reading beyond the data (Extrapolieren, Vorhersagen machen oder von der Darstellung ableiten, um implizite Fragen zu beantworten) (Monteiro & Ainley, 2003, S. 32).

In der Primarstufe wird der Fokus auf die ersten beiden Fragetypen gelegt.
Ruwisch (2020, S. 7) weist darauf hin, dass Kinder am Ende der Volksschulzeit dazu in der Lage sind, „auch anhand gegebener Daten in verschiedenen Repräsentationsformen [zu] argumentieren, ohne diese selbst erhoben haben zu müssen”, wenn statistische Betrachtungen im Laufe der Volksschulzeit immer wieder einbezogen wurden.

2.2 Praktische Umsetzung

Im Rahmen des Workshops „Zufällig Mathematik“ wurden verschiedene praktische Umsetzungsmöglichkeiten zur Einführung der Arbeit mit Daten in der Grundschule vorgestellt. Ein Beispiel zum handlungsorientierten Erheben von Daten, das bereits ab der ersten Klasse Volksschule eingesetzt werden kann, ist die Frage:

„Wie bist du heute zur Schule gekommen?“

In einem ersten Schritt legen die Kinder einen Baustein zu jenem Fahrzeug, mit dem sie in der Früh zur Schule gekommen sind.

In einem nächsten Schritt werden die Bausteine gestapelt und so die erhobenen Daten strukturiert. So können die Kinder nachvollziehen, dass je ein Stein für ein Kind steht. Bei der Übertragung der so entstandenen Säulendiagramme auf kariertes Papier wird für jeden Baustein, also für jedes Kind, ein Kästchen angemalt.

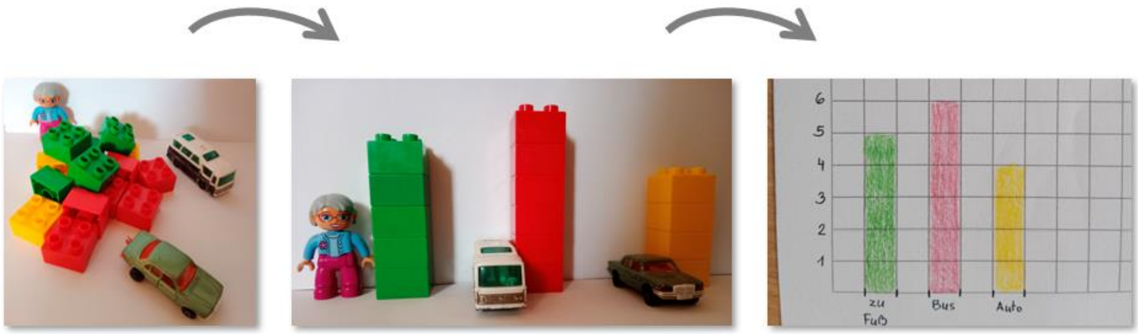


Abbildung 1: Von der Erhebung zum Säulendiagramm.

Durch die handlungsorientierte Erarbeitung mit Materialien gelingt den Kindern der nächste Abstraktionsschritt und sie können die aus den Bausteinen entstandenen Säulendiagramme ins Heft übertragen. Dabei muss auf die korrekte Beschriftung der Achsen Acht gegeben werden.

3 Zur Arbeit mit der Wahrscheinlichkeit in der Primarstufe

3.1 Theoretischer Hintergrund

Wahrscheinlichkeit befasst sich mit dem Zufall. „Aufgabe des Unterrichts ist es […], die sehr subjektiven und intuitiven kindlichen Vorstellungen über die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen zu mehr objektiven und in einfachen Spielsituationen auch quantitativen Einschätzungen zu führen.“ (Schipper, 2009, S. 284). Gegenstand des Mathematikunterrichts der Primarstufe ist keinesfalls die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

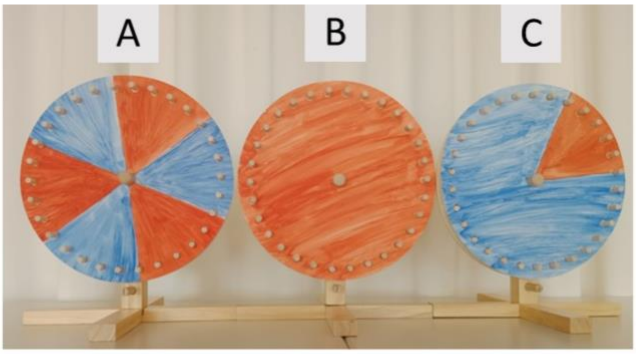
Junge Kinder verfügen häufig über eine deterministische Vorstellung von Wahrscheinlichkeit. Das Kind ist beispielsweise überzeugt, dass es schwieriger ist, die Zahl Sechs zu würfeln als eine andere Zahl. Diese Vorstellung soll durch stochastisches Denken abgelöst werden, wobei dem Kind bewusst werden soll, dass es Ereignisse gibt, die nicht mit Sicherheit, sondern nur mit einem gewissen Grad von Wahrscheinlichkeit vorhergesagt werden können. Die Anbahnung des stochastischen Denkens ist ein lang andauernder Prozess und kann nicht innerhalb einer Unterrichtseinheit vollzogen werden. Vielmehr bedarf es aufeinander aufbauender Erfahrungen, die bereits in der Elementar- und Primarstufe beginnen sollen (Schipper, 2009, S. 284 f).

Bei der Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs kann zur Darstellung der qualitativen Schätzung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses eine vertikale Wahrscheinlichkeitsskala

eingesetzt werden. Durch die Kennzeichnung der Schätzung des Kindes auf der Skala wird angegeben, für wie wahrscheinlich das Kind das Eintreten des Ereignisses hält (Sill & Kurtzmann 2019, S. 17).
Ein wesentlicher Schwerpunkt in der Grundschule liegt auf der Begriffsbildung: Begriffe wie *sicher*, *möglich* und *unmöglich* sowie in weiterer Folge auch *wahrscheinlich* und *unwahrscheinlich* sollen erarbeitet werden. Schipper (2009, S. 285) weist auch auf die Bedeutung der Begriffe *wahrscheinlicher als*, *weniger wahrscheinlich als* und *gleich wahrscheinlich* hin. Diese Begriffe sind auch zentrale Inhalte im neuen Lehrplan der Volksschule (BMBWF, 2023).

3.2 Praktische Umsetzung

Glücksräder sind der Lebenswelt der Kinder entnommen und stellen eine gute Möglichkeit dar, Begriffsbildung zum Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten anzubahnen. Schüler*innen beschreiben mögliche Ausgänge beim Drehen des Glücksrads mit den Begriffen „sicher, möglich und unmöglich“ und begründen ihre Entscheidung. Abbildung 2 zeigt eine mögliche Aufgabenstellung. Durch das Drehen der Glücksräder machen die Schüler*innen Handlungserfahrungen, welche zum Beantworten der Fragestellungen hilfreich sind.



	sicher	möglich	unmöglich
Wenn ich das Glücksrad A drehe, zeigt der Zeiger auf rot.			
Wenn ich das Glücksrad B drehe, zeigt der Zeiger auf rot.			
Wenn ich das Glücksrad C drehe, zeigt der Zeiger auf grün.			
Wenn ich das Glücksrad B drehe, zeigt der Zeiger auf blau.			

Abbildung 2: Aufgabenstellung zum Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten.

In Folge können ähnliche Glücksräder entwickelt oder weitere Aussagen formuliert werden. Das Drehen von Glücksrädern kann wieder in Bezug zum Erheben von Daten gesetzt werden: Die Kinder drehen die Glücksräder und sammeln mit einer Strichliste die möglichen Versuchsausgänge.

4 Zur Arbeit mit Kombinatorik in der Primarstufe

4.1 Theoretischer Hintergrund

Die Kombinatorik wird auch als „Kunst des geschickten Abzählens” (Neubert, 2019, S. 7) bezeichnet. Das Ziel kombinatorischer Aufgabenstellungen ist demnach einerseits die Ermittlung, *welche Kombinationsmöglichkeiten es gibt*, andererseits herauszufinden, *wie viele solcher Kombinationen* möglich sind.
Durch kombinatorische Aufgabenstellungen können systematisches Zählen sowie stochastisches Denken angebahnt werden (Häring, 2017).
Sill und Kurtzmann (2019, S. 170) beschreiben folgende Zielsetzungen kombinatorischer Aufgaben im Unterricht der Primarstufe:

- Entwicklung und Freude am selbstständigen Lösen von Problemen,
- Entwicklung der geistigen Beweglichkeit und Kreativität,
- Förderung der Kommunikations- und Argumentationsfähigkeit,
- Festigung des Rechnens mit natürlichen Zahlen,
- Beitrag zur Umwelterschließung.

Je jünger Kinder sind, umso wichtiger ist es, konkretes Material zur Lösung kombinatorischer Aufgabenstellungen bereit zu stellen, um strukturiertes Herangehen zu ermöglichen (Neubert 2022b, S. 21). Durch die Offenheit der Aufgabenstellungen lassen kombinatorische Aufgaben unterschiedliche Herangehensweisen und Lösungsmöglichkeiten zu und eignen sich dadurch besonders zur Differenzierung (Sill & Kurtzmann 2019, S. 171).
Kombinatorische Aufgaben können auf unterschiedliche Art gelöst werden. Zu Beginn werden die Kinder noch ohne System probieren, um auf eine Lösung zu kommen. Am besten eignen sich dafür konkrete Materialien wie Steckbausteine, Tierfiguren oder reale Objekte. In einem nächsten Schritt werden die Gegenstände durch ikonische Darstellungen ersetzt und erst in einem weiteren Abstraktionsschritt wird auf der symbolischen Ebene gearbeitet.
Durch das unsystematische Probieren können die Schüler*innen erkennen, dass entweder Lösungen doppelt gefunden oder nicht alle Möglichkeiten entdeckt wurden. Dies kann zum Anlass genommen werden, über Möglichkeiten der Systematisierung nachzudenken und Lösungsstrategien, wie Tabellen oder ein Baumdiagramm, zu entwickeln.
Kombinatorische Aufgaben, wie etwa die Suche der Anzahl an Möglichkeiten, ein Menü zusammenzustellen, können mit Hilfe des kartesischen Produkts gelöst werden. Weitere Aufgabenstellungen, die sich dafür eignen, sind etwa die Bildung von Gruppen, das Ermitteln verschiedener Wege zu einem Zielort, der Code eines Zahlenschlosses oder das Bekleiden von Puppen etc.

4.2 Praktische Umsetzung

Ein Beispiel, das sich ohne großen Vorbereitungsaufwand in der Klasse umsetzen lässt, ist die Anordnung von Personen. Bei dieser Aufgabenstellung stehen wieder die grundlegenden Fragen kombinatorischer Aufgabenstellungen im Fokus:

- Welche Kombinationsmöglichkeiten ergeben sich?
- Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten ergeben sich für die Personen, nebeneinander zu stehen?
- Wie können diese Varianten dokumentiert werden?

Abbildung 3: Drei in einer Reihe.

Die Abbildung 3 zeigt eine Möglichkeit, wie die Kinder für das erste Foto angeordnet werden können. Um die Kombinationsmöglichkeiten zu dokumentieren, können Handyfotos gemacht und miteinander verglichen werden. Diese eignen sich auch gut dazu, beim Auflegen der Fotos Strukturen zu erkennen.

5 Fazit

Durch die Implementierung des neuen Lehrplans für die Volksschule (BMBWF, 2023) sind die Lehrpersonen gefordert, sich mit den Themen Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik auseinanderzusetzen. Werden die Forderungen nach Handlungsorientierung und Veranschaulichung in die Überlegungen mit einbezogen, so ist es notwendig, diese Themenbereiche in Fortbildungsveranstaltungen, wie dem „Tag der Mathematik“, aufzugreifen. Die in diesem Beitrag vorgestellten Beispiele zeigen, wie eine *handlungsorientierte Bearbeitung der Themen Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik gelingen kann.*

Literatur

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) (2. Jänner 2023). *Lehrplan der Volksschule.* BGBI. II Nr. 1/2023, Anlage A zu Artikel 1. Wien.

Häring, G. (2017). Zählen, ohne zu zählen. *Grundschule Mathematik*, 52, S. 2–5.

Monteiro, C., Ainley, J. (2003). *I*nterpretation of Graphs: Reading through the Data. In: Williams, J. (Hrsg.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 23(3)*, pp. 31–36.

Musilek, M., Apfler, S., Summer, A. (im Druck). DaWaKo in der Primarstufe. Empirische Untersuchung zum fachlichen und methodischen-didaktischen Vorwissen von angehenden Lehrpersonen. *Forschungsperspektiven 15*, LIT Wien.

Neubert, B. (2012): *Leitidee: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Aufgabenbeispiele für die Grundschule.* Offenburg Mildenberger.

Neubert, B. (2019): *Kombinatorik. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule.* Offenburg Mildenberger.

PIKAS (2020a). *Daten und Diagramme.* Verfügbar unter: https://pikas-kompakt.dzlm.de/sites/pikaskp/files/uploads/11-DatenUndHaeufigkeiten/diagramme_daten_sammeln_und_diagramme_darstellen.pdf

PIKAS (2020b). *Statistische Projekte. Reale und umfangreiche Datensätze mit der Software TinkerPLots erforschen.* https://pikas-digi.dzlm.de/sites/pikasdg/files/uploads/Unterricht/StatistischeProjekte/um_statistische_projekte_digi_tinkerplots.pdf

Ruwisch, S. (2020). *Das Diagramm ist viel zu perfekt. Kinder auf dem Weg zur kompetenten Datenanalyse.* Grundschule Mathematik, 65, S. 4–7.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schrödel Hannover.

Sill, H., Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer Spektrum Berlin Heidelberg.

Wild, C.J., Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review, 67*, 3, pp. 223-265.

R&E SOURCE

10. Jg. (2023), Nr. 2: More of Mathematics
Konferenzband zum Tag der Mathematik

Rund und bunt!

Mathematisches Tätigsein mit Schokolinsen

Franziska Strübbe[1], *Julia Kaiser*[2]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1172

Zusammenfassung

Wie Kinder in ihrem mathematischen Tätigsein und ihrer Freude an mathematischen Inhalten gefördert werden können, zeigt das analog sowie digital zu adaptierende Konzept ‚Alltags|Mathe|real' auf. Als handlungspraktisches Beispiel wird im Beitrag das Aufgabenbeispiel ‚Rund und bunt – Mathematisches Tätigsein mit Schokolinsen' zur mathematischen Begabungsförderung von vier- bis achtjährigen Kindern an authentischen Eigenproduktionen von Kindern vorgestellt. Ziel von Alltags|Mathe|real ist es, allen Kindern Anregungen zum mathematischen Tätigsein zu bieten, sodass die verschiedenen Potenziale aller Kinder im Übergang von der Kita in die Grundschule individuell gefördert werden.

Mathematische Begabungsförderung, Alltags|Mathe|real, Eigenproduktionen

1 Einleitung

Junge Kinder in ihrem mathematischen Tätigsein zu fördern und sie durch geeignete Aufgabenformate in ihrer Freude und Sinnerleben an mathematischen Inhalten zu stärken, stellt für pädagogische Fachkräfte eine besondere Herausforderung dar. Daran anknüpfen soll das sowohl analog als auch digital zu adaptierende Konzept Alltags|Mathe|real, welches aus den drei Teilbereichen ‚Alltäglichkeit', ‚Mathematik' und ‚Realität' besteht (Kaiser, Strübbe & Witte, 2022). Das Konzept sowie das Materialangebot lassen sich für die (Schul-)Praxis im Sinne einer Förderung für alle Kinder adaptieren. Ausgehend von geeignetem Alltagsmaterial zum Mathematiktreiben und anlehnend an die Idee, Kindern ein Material in großer Menge (Lee, 2014) anzubieten, werden im Beitrag Schokolinsen als Praxisbeispiel für ein mathematisches Tätigsein mit Alltagsmaterialien vorgestellt. Der Beitrag soll zu einem interessierten Blick durch die ‚Mathe-Brille' einladen (Käpnick, Kaiser, Strübbe & Witte, 2021,

[1] Westfälische Wilhelms-Universität Münster, ICBF, Georgskommende 14, 48143 Münster.
E-Mail: struebbe@uni-muenster.de
[2] Westfälische Wilhelms-Universität Münster, ICBF, Georgskommende 14, 48143 Münster.
E-Mail: j.kaiser@uni-muenster.de

S. 15) und dazu anregen, eigene Aufgabenformate zu entwickeln, die für ein analoges sowie digitales Lernen genutzt werden können.

2 Theoretische Grundlegung

2.1 Mathematisch begabte Kinder

Mathematisch begabt sein heißt, begabt sein für Mathematik (Käpnick, 1998, S. 53). Bereits junge Kinder können im Hinblick auf Erstindikatoren, begabungsstützende Persönlichkeitseigenschaften und mathematikspezifische Begabungsmerkmale über ein erstaunliches Begabungspotenzial für mathematisches Tätigsein verfügen (Meyer, 2015). Wenn pädagogische Fachkräfte vier- bis achtjährige Kinder beim mathematisches Tätigsein beobachten, können sie vielfach diese besonderen Begabungen erkennen. Alle Kinder entsprechend ihren individuellen Potenzialen und Bedarfen zu fördern, damit sich die jeweiligen Begabungspotenziale zu einer überdurchschnittlichen und sichtbaren Leistungsfähigkeit entwickeln können, stellt eine besondere Herausforderung für pädagogische Fachkräfte in Kita und Grundschule dar (Käpnick, Fuchs, Makl-Freund, Mürwald-Scheifinger & Spreitzer, 2020).

2.2 Alltags|Mathe|real

Alltags|Mathe|real greift die Komplexität, Individualität und Bereichsspezifik mathematischer Begabungen auf und realisiert eine Möglichkeit der Begabungsförderung in heterogenen Gruppen (Kaiser et al., 2022). Das Konzept Alltags|Mathe|real bildet die Schnittmenge der drei Wortteile Alltag, Mathematik und Realität. Das bedeutet: Mathematisches Tätigsein vollzieht sich für kleine Matheforschende in ihrer alltäglichen Umwelt. Sie erleben mathematische Inhalte konkret und können ihre mathematische Realität durch die ‚Mathe-Brille' erleben und erforschen (Käpnick et al., 2021). Die Mathematik stellt für das Konzept die inhaltstragende Fachdisziplin dar.

3 Praxeologische Umsetzung

3.1 Schokolinsen als Alltags|Mathe|real

Süßigkeiten als Anschauungsmaterial im Mathematikunterricht zu nutzen, ist nicht neu (Schröder, 2019). Dieser Idee bedient sich das Aufgabenbeispiel ‚Rund und bunt – Mathematisches Tätigsein mit Schokolinsen' und nutzt Schokolinsen als Alltags|Mathe|real zur mathematischen Begabungsförderung in formellen und informellen Settings. Schokolinsen sind rund und bunt. Sie finden sich von verschiedenen Herstellungsfirmen mit unterschiedlich nutzbaren Verpackungen im Süßigkeitenregal und offenbaren unter einem mathematischen Blick vielfältige Anregungen zum mathematischen Tätigsein. Das Material kann (ggf. durch Impulse von außen unterstützt) von den Kindern eigenständig mit verschiedenen Sinnen und unterschiedlichen Möglichkeiten zur Auseinandersetzung entdeckt und erfahren werden. Erfahrungen zeigen, dass die Schokolinsen als mathematisches Material einen hohen Aufforderungscharakter haben und die Kinder zu einem selbsttätig handelnden und spielerischen Umgang anregen. Dabei können sie sich freudvoll und vielfältig mit dem Material auseinandersetzen. Als unstrukturierte Menge mit ähnlichen Eigenschaften (Form und Farbe) regen sie zum Ordnen und Sortieren an, woran sich Zählanlässe anschließen können. Mit Schokolinsen lassen sich darüber hinaus Muster legen. Beispielsweise können Musterfolgen und Bandornamente erstellt bzw. fortgesetzt werden. Ebenso lassen sich mit Schokolinsen statistische Daten erheben und Zufallsexperimente durchführen. Demgemäß laden runde und bunte Schokolinsen zu einem freien mathematischen Tätigsein für vielfältige Entdeckungen ein, sind für viele mathematische Inhaltsbereiche anschlussfähig und stellen ein verbindendes Material des Mathematiktreibens für Kinder im Übergang von der Kita in die Grundschule dar.

3.2 Mathematisches Tätigsein mit runden und bunten Schokolinsen

Zur Einführung in das Material kann Kindern in Kita, Grundschule oder außerinstitutionellen Arrangements (Familie, Enrichmentprojekte o. Ä.) eine große Menge an Schokolinsen zum freien Experimentieren, Legen und Bauen angeboten werden (Abb. 1). Ohne konkreten Arbeitsauftrag können die Kinder das Material frei erkunden. Dies entspricht dem Gedanken des Konzepts ‚Gleiches Material in großer Menge' von Kerensa Lee. Sie sagt, dass

> … beim Tätigsein mit gleichem Material in großer Menge es keine vorgegebenen Aufgaben gibt, sondern erst einmal nur das Gestalten und damit das eigene Erleben im Vordergrund steht. [...] In erster Linie geht es darum, Mathematik zu tun, weil es schön ist, sie zu tun (Lee, 2014, S. 4).

In der ersten Auseinandersetzung mit den Schokolinsen entstehen vielfältige Legearbeiten, die oftmals intuitiv faszinierende mathematische Muster und Strukturen aufweisen (Abb. 2).

Abbildung 1: Große Menge an Schokolinsen. Abbildung 2: Regenbogen aus Schokolinsen.

Nachdem die Kinder mit dem Material der Schokolinsen durch die Einstiegsüberlegungen vertraut sind, können Entdeckungsaufgaben und Knobelaufgaben folgen.

3.2.1 Einstiegsüberlegungen

Beginnend bietet sich eine thematische Annäherung und Sensibilisierung der Kinder für das Beispiel ‚rund und bunt' an. Einstiegsüberlegungen ermöglichen Kindern ein selbsttätiges, individuelles erstes Erkunden des Materials. Dies kann intrinsisch motiviert oder anhand verschiedener Impulse von außen erfolgen. (Mathematisch begabte) Kinder können aufgrund ihrer Intuition bzw. ihres sensiblen Gefühls die mathematische und ästhetische Qualität der Schokolinsen wahrnehmen. Sie entdecken die Schokolinsen als Materialien zum individuellen Mathematiktreiben und können bei der Auseinandersetzung eigene Erfahrungen sammeln, die zu weiteren vielfältigen Ideen anregen können. Durch die folgenden Impulse für Einstiegsüberlegungen können die Kinder auf das mathematische Potenzial der Schokolinsen aufmerksam gemacht werden:

- Wie viele Schokolinsen findest du auf der Verpackung?
- Wie viele Boxen mit Schokolinsen hast du?
- Was kannst du mit den Boxen machen?
- Was kannst du mit den Schokolinsen machen?
- Wie viele Farben von Schokolinsen findest du?
- …

Abbildung 3: Einstiegsüberlegungen ‚rund und bunt‘.

Mathematisch interessierte und begabte Kinder haben zumeist kreative Ideen, wie sie mit dem angebotenen Material auf spielerische Weise mathematisch tätig sein können. Schwerpunkte der individuellen Auseinandersetzung sind dabei allen mathematischen Inhaltsbereichen zuzuordnen, sodass die Kinder entsprechend ihren persönlichen Interessen und mathematischen Präferenzen in das Forschen mit Schokolinsen einsteigen können. Pädagogische Fachkräfte können dabei einiges über das mathematische Verständnis der Kinder beobachten. Es zeigt sich, ob bei den Kindern eher ein numerisch oder geometrisch geprägtes Bild der Mathematik dominiert. Ebenso geben die Beobachtungen Anlass, um Aussagen zur mathematischen Kreativität und Sensibilität (als wesentliche mathematikspezifische Begabungsmerkmale) zu treffen. Die nachfolgenden Eigenproduktionen von Jule und Finn illustrieren und stützen die Einschätzungen der Einstiegsüberlegungen (Abb. 4 und 5).

Abbildung 4: Jules Eigenproduktionen. Abbildung 5: Finns Eigenproduktionen.

3.2.2 Entdeckungsaufgaben

Das mathematische Tätigsein aus den Einstiegsüberlegungen kann mittels Entdeckungsaufgaben intensiviert werden. Entdeckungsaufgaben haben zum Ziel, dass sich die Kinder entsprechend ihren individuellen Interessen einer mathematischen Tätigkeit vertieft widmen können. Nachfolgende Impulse können die Kinder in ihrem Entdeckungsprozess unterstützen:

- Beschreibe die Form der Boxen. Was fällt dir auf?
- Beschreibe die Form der Schokolinsen. Was fällt dir auf?
- Schätze erst, überprüfe dann: Wie viele Schokolinsen sind in einer Box?
- Schätze erst, überprüfe dann: Wie viele Schokolinsen passen in eine Box?
- Sind in allen Boxen gleich viele Schokolinsen?
- Sind alle Farben in jeder Box enthalten?
- Schätze erst, überprüfe dann: Was ist schwerer? Eine Schokolinse oder eine leere Box?
- Schätze erst, überprüfe dann: Wie viele Schokolinsen sind insgesamt in allen Boxen?
- Lege Schokolinsenmuster. Welches findest du besonders schön?
- Was kannst du aus den Boxen bauen?
- Kannst du Schokolinsen stapeln?
- Kannst du mit den Schokolinsen rechnen?
- ...

Abbildung 6: Entdeckungsaufgaben ‚rund und bunt'.

Um die Beschaffenheit und Eigenschaften von Schokolinsen genauer zu erkunden, sind Schätzaufgaben geeignet, die bei kleinen Matheassen in aufwändigen Zähl- und Messvorgängen münden können. Beispielsweise widmet Jule sich der Aufgabe, wie viele Schokolinsen in einer Box sind. Sie schätzt erst und überprüft dann alle Boxen (Abb. 7). Jule verschätzte sich deutlich. Sie zählt jedoch beharrlich die Schokolinsen aller fünfzehn Verpackungen nach und stellt fest, dass zwischen 37 und vierzig Schokolinsen pro Box enthalten sind. Auch die Verpackungsangabe kontrolliert sie, indem sie den Inhalt der Verpackung erst mit Papierverpackung und anschließend ohne mit einer Küchenwaage wiegt. Ebenso wiegt sie die Schokolinsen ohne Box und stellt fest, dass die auf die Verpackung angegeben 216 g nicht mit dem auf der Küchenwaage angegeben 215 g übereinstimmten. Hierbei zeigt sich das genaue Arbeiten und die Anstrengungsbereitschaft von Jule.
Mats schätzt, dass sich dreißig Schokolinsen in den Boxen befinden und kommt beim Nachzählen auf 39 bis vierzig. Bei der Frage, wie viele Schokolinsen in allen Boxen zusammen sind, schreibt Mats fünfzehn Mal die Vierzig auf. Er zögert, wie er das berechnen kann, weil ihm das Ergebnis groß erscheint. Mats wendet einen Trick an, denn er legt die Boxen in eine Reihe und sagt: *„Die ersten beiden geöffneten Pakete und ein halbes Paket ergeben hundert. Das zweite halbe geöffnete Paket und zwei geschlossene Pakete sind nochmal hundert."* Dann legt er immer zwei ganze Pakete (hochkant) und ein halbes Paket (quer). Mats weiß, dass die quer gelegten Boxen immer geteilt werden müssen. Als Rechnung ergibt sich 6 (40 + 40 + 20) = 600. Die Lösungszahl schreibt er anschließend unter die vielen Vierziger (Abb. 8).

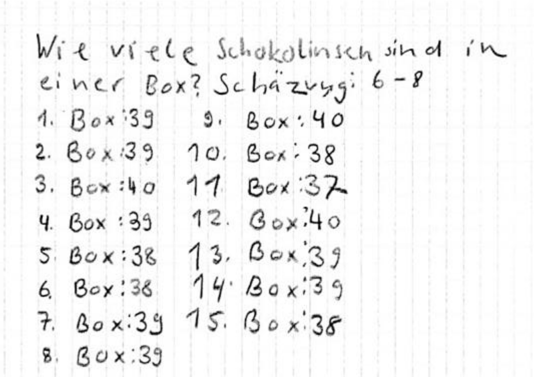


Abbildung 7: Jules Eigenproduktion.

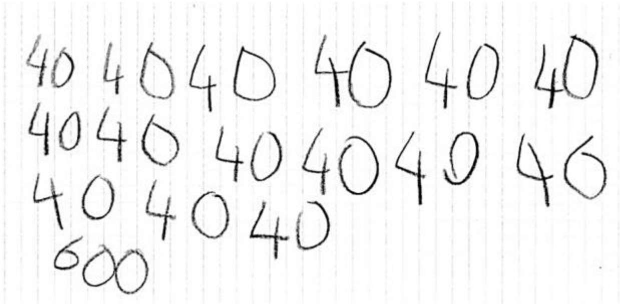


Abbildung 8: Mats Eigenproduktion.

3.2.3 Knobelaufgaben

Schokolinsen eignen sich des Weiteren als Material, um kindliche Lösungsprozesse von Knobelaufgaben auf enaktiver Ebene zu unterstützen. (Mathematisch begabte) Kinder knobeln gerne und ausdauernd, sodass positive Emotionen durch eine Beschäftigung mit komplexen Knobelaufgaben ausgelöst werden können. Beispielsweise kann die Nussaufgabe (Käpnick, 2001, S. 18, Abb. 9) mit Schokolinsen gelegt und gelöst werden. Dafür wird das entsprechende Quadratfeld aus Schokolinsen erstellt. Durch das flexible Material können Lösungsversuche vollzogen werden. Ebenso ist eine Lösungspräsentation mittels Schokolinsen möglich.

Theo legt 36 Schokolinsen in einem Quadrat auf den Tisch und sagt zu Linus:
Du darfst sechs Schokolinsen aus meinem Quadrat wegnaschen. Aber es müssen in jeder Zeile und in jede Spalte eine gerade Anzahl an Schokolinsen liegen bleiben. Kannst du das?

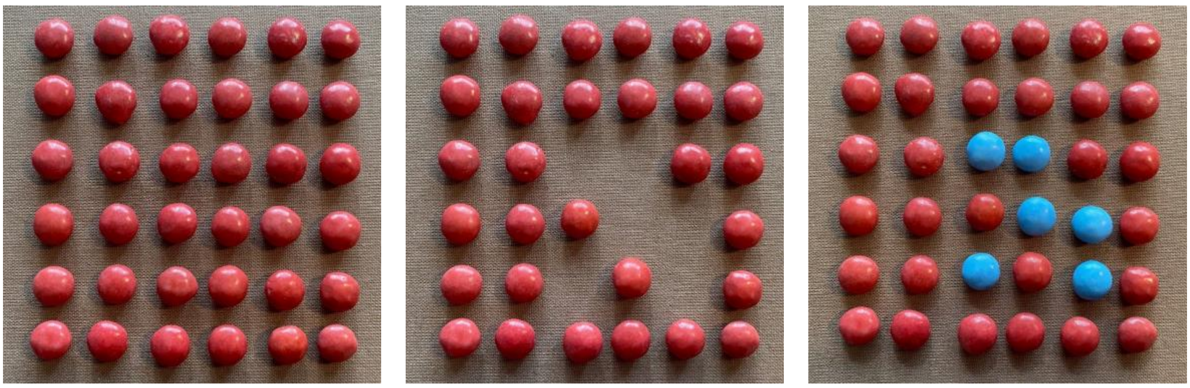


Abbildung 9: Nussaufgabe von Käpnick (2001) mit Schokolinsen.

4 Anschlussideen und Abschlussüberlegungen

Das vielfältige mathematische Tätigsein mit Schokolinsen veranlasst Kinder zumeist dazu, sich neue, eigene Aufgaben zu überlegen, die Anreiz zu weiterführenden Anschlussideen bieten. Viele Kinder fragen sich, was noch rund und bunt ist (z. B. Münzen, Flaschendeckel, Konfetti, Muggelsteine). Ebenso kann das Materialangebot dahingehend ausgeweitet werden, dass überlegt wird, mit welchen Süßigkeiten – ähnlich wie mit den Schokolinsen – mathematisches Tätigsein möglich ist (z. B. Gummibären, Schokoladentafeln, Salzstangen und -brezeln). Hier sind den kindlichen Anschlussideen keine Grenzen gesetzt. Ebenso ist eine weitere, intrinsische Anschlussbeschäftigung mit den Schokolinsen als Alltags|Mathe|real für die jungen sowie für ältere Kinder möglich. Beispielsweise können die Schokolinsenboxen aufgefaltet und die dadurch entstehenden Quadernetze erkundet werden. Eigene Boxen bzw. andere geeignete Verpackungen können für (eine spezifische Anzahl an) Schokolinsen kreativ gestaltet werden. Darüber hinaus können disziplinübergreifende Ideen für eine künstlerische Auseinandersetzung (z. B. eine enaktive Produktion von Schokolinsen-Kunstwerken und ikonische Dokumentation durch rund und bunt gemalte Abbildungen oder ein selbstständiges Entwickeln und Nutzen von Stempel) oder ein eigenes Herstellen von Schokolinsen (und Verkaufen auf der nächsten Schulveranstaltung) erfolgen.
Das vorgestellte Aufgabenbeispiel ‚Rund und bunt – Mathematisches Tätigsein mit Schokolinsen' ist eine zu adaptierende Materialidee für eine mathematische Begabungsförderung von vier- bis achtjährigen Kindern. Viele weitere Materialien, die im Alltag vorzufinden sind, einen realen Bezug zur Lebenswelt der Kinder aufweisen und mathematisches Tätigsein fördern, können in analoger Weise zum mathematischen Tätigsein genutzt werden. Um die Eignung von Materialien zum mathematischen Tätigsein im Sinne von Alltags|Mathe|real zu entscheiden, sollten vorab folgende Überlegungen angestellt werden:

- Ist das Material Kindern bereits aus ihrer Lebenswelt bekannt?
- Sind die Materialeigenschaften eindeutig und leicht verständlich?
- Kann das Material (kostengünstig) in einer großen Menge angeschafft werden?
- Sind mit dem Alltags|Mathe|real vielfältige mathematische Entdeckungen möglich?
- Welches mathematische Potenzial bietet das Alltags|Mathe|real konkret?
- Welche mathematischen Inhaltsbereiche können mit dem Alltags|Mathe|real erarbeitet werden?
- Können Kinder mit dem Alltags|Mathe|real eigene kreative Ideen und Entdeckungsfragen erforschen?
- Weckt das Alltags|Mathe|real Neugier zum mathematischen Tätigsein?
- Fördert das Alltags|Mathe|real Freude und Spaß am mathematischen Tätigsein?
- Mit welchen Sinnen kann das Alltags|Mathe|real erkundet werden?

Anreize für adaptive mathematische Entdeckungen im Sinne von Alltags|Mathe|real findet man beispielsweise im Haushalt, in der Natur, im Lebensmittelmarkt, im Büro oder in Spielzimmern. Und wer weiter mit Schokolinsen forschen möchte, kann sich am Weltrekord[1] im Schokolinsenstapeln versuchen. Der liegt aktuell bei sechs Schokolinsen.

Literatur

Kaiser, J., Strübbe, F., & Witte, A. (2022). Alltags|Mathe|real – Digitale Entdeckerfelder für die Förderung mathematisch begabter vier- bis zehnjähriger Kinder. In J. Bonow, T. Dexel, R. Rink, C. Schreiber & D. Walter (Hrsg.), *Digitale Medien und Heterogenität. Chancen und Herausforderungen für die Mathematikdidaktik*. WTM Münster, S. 229-224.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder.* Peter Lang Frankfurt.

Käpnick, F. (2001). *Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr.* Cornelsen Berlin.

Käpnick, F., Fuchs, M., Makl-Freund, B., Mürwald-Scheifinger E., & Spreitzer, C. (2020). *Mathe-Asse in der ersten Klasse. Begabungen früh erkennen und fördern: ein Leitfaden mit Indikatoraufgaben und Beobachtungsbögen.* AOL Hamburg.

Käpnick, F., Kaiser, J., Strübbe, F., & Witte, A. (2021). Ein Erfahrungsbericht zur Entwicklung digitaler Förderformate im Lehr-Lern-Labor Mathe für kleine Asse. *GDM-Mitteilungen*, 111, S. 12–19.

Lee, K. (2014). *Kinder erfinden Mathematik. Gestaltendes Tätigsein mit gleichem Material in großer Menge.* Verlag das Netz Weimar Berlin.

Meyer, K. (2015). *Mathematisch begabte Kinder im Vorschulalter. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen zur Entwicklung mathematischer Begabungen bei vier- bis sechsjährigen Kindern.* WTM Münster.

Schröder, J. (2019). Die Gummibären erobern den Mathematikunterricht. Eine Reise quer durch die Welt der Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten. *Grundschulunterricht, Mathematik 4*, S. 25–33.

[1] https://twitter.com/GWR/status/1494614785480175617

Was ist sinnvolle Schulmathematik?

Bernhard Krön[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1182

Zusammenfassung

Mathematik-Didaktik muss sich auch mit der Frage beschäftigen, welche mathematischen Inhalte in der Schule behandelt werden sollen. „Warum müssen wir das lernen?“ – Oft hat es historische oder andere zweifelhafte Gründe, warum ein mathematischer Inhalt Schulstoff geworden ist. „Wozu müssen wir das lernen?“ – Dies ist eine andere Frage, die Frage nach dem Zweck, dem Nutzen, sie verdient eine Antwort. Ausgehend von Roland Fischers Überlegungen zur Rolle der Mathematik in der höheren Allgemeinbildung (Stichwort: Fähigkeit, mit Expert*-innen zu kommunizieren) werden Kriterien für die Sinnhaftigkeit von Schulstoff besprochen und einzelne schulmathematische Themen dahingehend kritisch hinterfragt.

Höhere Allgemeinbildung, Schulmathematik, Sinnkriterien

1 Warum müssen wir das lernen?

„Warum müssen wir das lernen?“ – Diese Frage kennen Lehrkräfte nur zu gut aus dem Mathematikunterricht. Wenn danach gefragt wird, welchen Nutzen der Lehrstoff für das spätere Leben hat, müsste allerdings gefragt werden: „Wozu müssen wir das lernen?“, denn ein „Warum“ bezieht sich auf die Gründe, die dazu geführt haben, dass ein bestimmter Stoff im Unterricht behandelt wird. Fachwissenschaftler*innen wissen, dass die Welt der Mathematik sich zu einem riesigen Universum entwickelt hat, das niemand vollständig verinnerlichen kann. Die Schulmathematik ist nicht eine abgespeckte Form der wissenschaftlichen Mathematik, sondern die abgespeckte Form einer winzigen Auswahl aus möglichen Inhalten, siehe dazu Abbildung 1.

[1] Kirchliche Pädagogische Hochschule Wien-Krems, Dr. Gschmeidler-Straße 28, 3500 Krems.
E-Mail: *bernhard.kroen@univie.ac.at*
Homepage: https://kphvie.ac.at/bernhardkroen/home.html

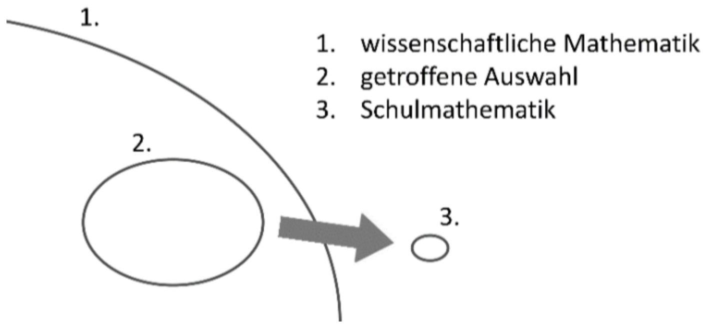


Abbildung 1. Auswahl Schulmathematik

„Warum?", das ist Suche nach den Vorgängen, die dazu geführt haben, dass diese Auswahl getroffen wurde und keine andere. Damit beschäftigt sich die wenig beachteten Disziplin der Geschichte der Fachdidaktik. Zwei Diplomarbeiten von Lehramtsstudentinnen an der Universität sind zum Beispiel diesem Fach zuzuordnen: Maria Radl (2019) beleuchtet die Auswirkungen der Revolution 1848/1849 auf das Schulsystem und die verwendeten Lehrbücher. Brigitte Bogensberger (2014) recherchierte die Epoche der Neuen Mathematik und welche Reste davon heute noch in den Schulbüchern zu finden sind.
In der Mitte des 19. Jahrhunderts waren die deutschsprachigen Länder wissenschaftlich führend und Wien war die größte Stadt im deutschsprachigen Raum. Als 1833 Adam Freiherr von Burg, Professor für Mathematik und Maschinenlehre am Kaiserlich-Königlichen Polytechnischen Institut in Wien (später Technische Universität) die erste Ausgabe seines einflussreichen Standardwerks „Compendium der höheren Mathematik" veröffentlichte, prägten Pferdefuhrwerke das Straßenbild, von der industriellen Revolution war noch wenig zu spüren und der spätere Kaiser Franz Josef I. war ein Kleinkind. So fern und fremd diese alte Welt für uns heute ist, so vertraut wird das Inhaltsverzeichnis der Ausgabe von 1837 für all jene sein, die die Schulmathematik aus der Zeit vor der Einführung der Zentralmatura kennen. Es liest sich wie ein Oberstufenlehrplan aus dem späten 20. Jahrhundert: Trigonometrie, Funktionen, Gleichungen, analytische Geometrie, einfache Folgen und Reihen, Polynome, binomischer Lehrsatz, Exponentialfunktion, Logarithmus, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kegelschnitte, Differential- und Integralrechnung. Warum mussten Schüler*innen vor Einführung der Zentralmatura genau diese Kapitel beherrschen und warum wird vieles davon noch heute unterrichtet? Lautet die Antwort tatsächlich: Weil dieser Stoffkanon 150 Jahre lang tradiert wurde, ohne je hinterfragt worden zu sein? Man darf nicht vergessen, dass die Gesellschaft in der Monarchie, später im Austrofaschismus oder Nationalsozialismus viel autoritärer war, als dies heute der Fall ist. Ein kritisches Anzweifeln der Sinnhaftigkeit von Dingen, die von der Obrigkeit verordnet wurden, war tendenziell unerwünscht. Geändert hat sich dies insbesondere im Zuge der gesellschaftlichen Veränderungen, die seit den 1970er-Jahren stattgefunden haben.
Der Großteil der heutigen Fachmathematik ist stark durch die Entwicklungen im 20. Jahrhundert geprägt. Was in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts ein Abriss der wichtigsten Teilge-

biete der Mathematik war, ist heute nur noch eine beliebig erscheinende winzige Auswahl an möglichen Themen, siehe Abbildung 1.
Eine mathematische Revolution fand im frühen 20. Jahrhundert statt, als das gesamte fachmathematische Theoriegebäude mithilfe der axiomatischen Mengenlehre neu errichtet wurde. Dadurch konnten bis dahin getrennte Bereiche, wie Geometrie und Arithmetik, in einer Theorie vereint werden, was sich innermathematisch als ungeheuer fruchtbar erwies.
Die Sowjetunion schoss 1957 erfolgreich den ersten Satelliten „Sputnik“ ins All. Im Westen löste dies den sogenannten Sputnikschock aus. Man hatte vor dem Hintergrund des Kalten Kriegs Angst, die Sowjetunion könnte den Westen technologisch und somit militärisch überholen. Um sich technologisch besser zu entwickeln, rückten Mathematik und Naturwissenschaften im Schulsektor in den Fokus. In einer Zeit, in der Mathematikdidaktik als eigenständige wissenschaftliche Disziplin noch nicht existierte, übernahm die Fachwissenschaft die Initiative. So kam es, dass Fachwissenschaftler*innen versuchten, genau jenes wissenschaftliche Theoriegebäude aus Mengenlehre und Logik, das sie in den letzten Jahrzenten kennen und schätzen gelernt hatten, als „Neue Mathematik“ („New Math“) in den Schulunterricht zu implementieren. Als Folge wurde bereits in der Primarstufe versucht, den Kindern Mengenlehre nahezubringen. In der Sekundarstufe wurden sogar algebraische Strukturen wie Gruppen, Körper und Ringe axiomatisch eingeführt. Übersehen wurde dabei, dass Mathematik als axiomatisch konstruiertes wissenschaftliches Theoriegebäude in der Schule nicht mit den Zielen der Pflichtschulbildung begründet werden kann. In den USA scheiterte „New Math“, begleitet von breiter öffentlicher Kritik, bereits ab den 1970ern. Der deutschsprachige Raum hatte diese Entwicklungen zeitverzögert übernommen. Dass die „Neue Mathematik“ hierzulande in den 1970er Jahren zeitglich mit der ersten Schulbuchaktion zur vollen Blüte gelangte, war reiner Zufall. Brigitte Bogensberger (2014) analysiert auch, welche Spuren diese Epoche bis heute hinterlassen hat.
Es ist wichtig zu verstehen, dass bestimmte Inhalte in der Schule nicht wegen ihrer vermeintlichen Sinnhaftigkeit behandelt werden, sondern weil sie aufgrund historischer Entwicklungen in die Schule gelangt sind und sie seither nicht in Frage gestellt wurden.

2 Höhere und fächerorientierte Allgemeinbildung und inhaltliche Medienkompetenz

Roland Fischer (2012b) definiert: „Bildung ist die selbstreflexive Gestaltung von Individuen und Kollektiven in wechselseitiger Bezugnahme.“ Das Kollektiv hat auf das Individuum Rücksicht zu nehmen und umgekehrt das Individuum auf das Kollektiv. Vor diesem Hintergrund geht Fischer von einem dialektischen Bildungsbegriff aus, schulische Strukturen und Lehrinhalte werden in einem gesellschaftlichen Diskurs in wechselseitiger Rücksichtnahme von Individuum und Gesellschaft ausverhandelt. In diesem Sinne ist es Ziel, diese Artikel, die Diskussion über schulmathematische Inhalte nicht nur Gremien zu überlassen, sondern in die Öffentlichkeit zu tragen.

Während die Aufgabe der Pflichtschulen weitgehend klar ist (Vermittlung des nötigen Rüstzeugs für Beruf, Privatleben, öffentliches Leben), stellt sich für weiterführende Schulen die Frage, was unter höherer Allgemeinbildung zu verstehen ist. Nach welchen Kriterien werden Inhalte in die Lehrpläne aufgenommen (vgl. Fischer 2003)? Aufbauend auf dem Begriff der Allgemeinbildung nach Heymanns (1996) im Kontext der Mathematik spricht Fischer (2012a) von der fächerorientierten Allgemeinbildung. Dabei ist die Kommunikationsfähigkeit mit Expert*innen wesentlich. Diese Konzepte waren bei der Konzipierung der SRP Mathematik AHS zentral, vgl. Kapitel 2.4.2 in (BIFIE 2013).
Medienkompetenz beinhaltet nicht nur technisch-operative Aspekte, die Auswahl der Medien oder das Überprüfen von Quellen und deren Qualität, sondern auch das kritische Bewerten auf inhaltlicher Ebene und darauf aufbauend das Treffen von Entscheidungen und das Entwickeln von Haltungen (vgl. BMBWF 2023). Letzterer Aspekt kann auch inhaltliche Medienkompetenz genannt werden. Diese soll durch das Zusammenwirken verschiedener Unterrichtsfächer im Sinne einer fächerorientierten Allgemeinbildung gefördert werden.
Eine demokratische Gesellschaft erwartet von ihren Bürger*innen ein kritisches politisches Engagement als staatsbürgerliche Tugend. Neben parteipolitischen Tätigkeiten gibt es Möglichkeiten, sich in Organisationen, wie NGOs oder lose strukturierten Bewegungen, einzubringen. Auch persönliche Gespräche, das Verfassen von Texten oder kurzen Kommentaren in Internet-Foren oder sozialen Medien können ein politisches Engagement darstellen.
Um z.B. umfassend an Diskussionen rund um die Covid-Pandemie teilzunehmen, sind zahlreiche mathematische Kompetenzen erforderlich: ein Verständnis für funktionale Abhängigkeiten und die Interpretation der Darstellungen von Funktionsgraphen. Bei Prognosen ist oft von exponentiellem Wachstum die Rede. Wenn sich ein solches abflacht und an einen Maximalwert annähert, liegt unter Umständen ein logistisches Wachstum vor, welches wiederum vom exponentiellen Wachstum mit Beschränkung unterschieden werden muss. Letzteres spielt bei physikalischen Prozessen, wie der Temperaturanpassung, eine große Rolle. Für die höhere Allgemeinbildung ist es nicht nur wichtig, solche Funktionsverläufe graphisch zu erkennen und modellieren zu können, sondern auch die zugrundeliegenden Prinzipien zu verstehen und zu erkennen. Möglichst viele Menschen mit höherer Allgemeinbildung sollen Äußerungen von Entscheidungsträger*innen oder Expert*innen in den Medien hinsichtlich ihrer Glaubwürdigkeit beurteilen können, dazu sind die genannten mathematischen Kompetenzen erforderlich.
Statistik spielt in diesem Zusammenhang eine zentrale Rolle, z.B. bei Diskussionen über die Wirksamkeit von Impfstoffen: Man benötigt ein grundlegendes Verständnis für bedingte Wahrscheinlichkeiten und dafür, was „statistisch signifikant" bedeutet. Daher ist auch ein grobes Verständnis für Konfidenzintervalle im Sachzusammenhang wichtig. Beurteileilende Statistik muss ein zentrales Element der mathematischen höheren Allgemeinbildung sein, damit ein möglichst großer Teil der Bevölkerung aus empirischen Studien die richtigen Schlüsse ziehen kann.
Zu dem Thema, wie sinnvolle Schulmathematik Menschen helfen kann, Fake News zu erkennen, schreibt Jürgen Maaß in „Fake News und realitätsbezogener Mathematikunterricht" (Maaß 2022).

Wichtig für die inhaltliche Medienkompetenz in Zusammenhang mit politischen Diskussionen ist auch elementare Logik im Sachkontext. Fallunterscheidungen und Negationen von Aussagen mit Quantoren („für alle" und „es gibt") sollten in der Sekundarstufe 2 behandelt werden. Eine Aufgabe dazu könnte folgendermaßen aussehen:
„Alle Erwachsenen in Baumdorf unterstützen die Regierung." Wie lautet die Negation dieser Aussage? Kreuze die richtige Negation an!

▢ Niemand in Baumdorf unterstützt die Regierung.
▢ Kein Erwachsener in Baumdorf unterstützt die Regierung.
▢ Zumindest ein Erwachsener in Baumdorf unterstützt die Regierung.
▢ Zumindest ein Erwachsener in Baumdorf unterstützt die Regierung nicht.
▢ Zumindest ein Kind in Baumdorf unterstützt die Regierung nicht.
▢ Alle Kinder in Baumdorf unterstützen die Regierung.

Und das ist eine der Antworten, die auf die Frage „Wozu muss ich das lernen?" gegeben werden kann: Du lernst das, weil es dir hilft, wissenschaftsnahe Medieninhalte besser verstehen und hinterfragen zu können, was eine Voraussetzung für kritisches und qualitätsvolles politisches Engagement ist.

3 Stärkung allgemeiner kognitiver Fähigkeiten

„Mathematik ist gut für das logische Denken, daher ist es gut, dass Jugendliche in der Schule Mathematik lernen." Ein solche Argumentation ist aus zwei Gründen problematisch. Erstens wird suggeriert, Mathematik sei eine einheitliche Materie. Tatsächlich macht es einen großen Unterschied, welche mathematischen Inhalte behandelt werden. Selbst wenn ein mathematischer Inhalt gut für „das logische Denken" wäre, wer sagt, dass dies auch auf einen anderen Inhalt zutrifft? Zum Zweiten ist unklar, was mit „logischem Denken" gemeint ist. Geht es um eine allgemeine Argumentationskompetenz oder um das Durchexerzieren mathematischer Beweise? Oder wird dabei an die formale Aussagen- und Prädikatenlogik gedacht?
Was ist eine kognitive Fähigkeit bzw. eine Kompetenz? Kognition bezieht sich auf Prozesse im zentralen Nervensystem: Erkennen und weitere Verarbeitung von Informationen im Gehirn. Für den Begriff „Kompetenz" sind drei Aspekte wichtig: Kognition, längerfristige Verfügbarkeit und Einsetzbarkeit in variablen Situationen.
Basale kognitive Kompetenzen sind solche, über die alle Menschen verfügen. Sie gehen über den schulischen Kontext hinaus und betreffen das ganze Leben: Objekt- oder Formerkennung, räumliches Vorstellungsvermögen, näherungsweises Abschätzen von Anzahlen usw. Diese basalen Kompetenzen können oft auch neurowissenschaftlich erfasst und neuroanatomisch zugeordnet werden.
Das räumliche Gedächtnis kann dem Hippocampus zugeordnet werden, beim Abschätzen von Anzahlen spielt der Intraparietale Sulcus eine zentrale Rolle. Beim räumlichen Vorstellungs-

vermögen geht es um eine komplexere Kompetenz. Das Projekt Raum-Intelligenz-Förderung 3.0 (RIF 3.0, 2023) bietet über die Internetseite www.adi3d.at/rif30/ wissenschaftlich basierte Förderung und Diagnose des räumlichen Vorstellungvermögens bzw. der Raumintelligenz. Raumintelligenz kann beispielsweise durch Aufgaben mit mentalen räumlichen Rotationen getestet werden, siehe Abbildung 2.

Aufgabe: Welche der abgebildeten Körper sind mit dem links abgebildeten Körper deckungsgleich? Kreuze die richtigen Antworten an!

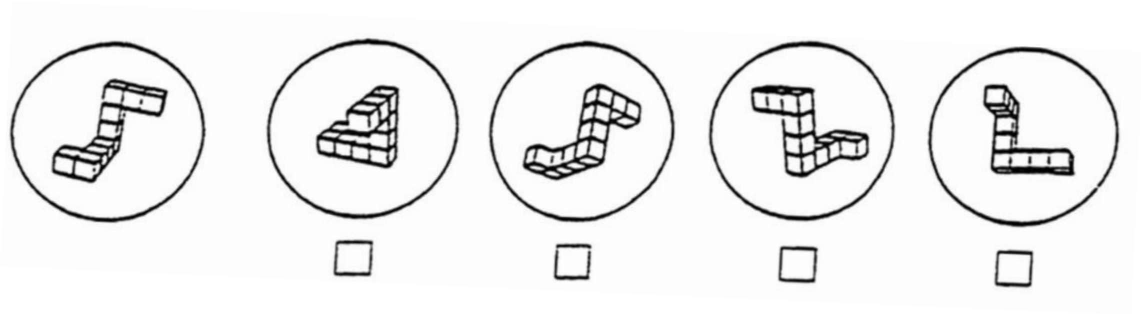


Abbildung 2. Mentale räumliche Rotation.

Der klassische Mathematikunterricht leistet in diesem Kontext leider keinen Beitrag, denn das Zeichnen von Quadern und das Berechnen von Oberflächen und Volumina fördert die Raumintelligenz ebenso wenig wie das Rechnen mit Parameterdarstellungen von Geraden im Raum.

4 Sinnkriterien als Matrix

Ausgehend von den vorangegangenen Überlegungen können mögliche Kriterien für die Sinnhaftigkeit von Schulstoff tabellarisch dargestellt und mit Großbuchstaben kodiert werden, siehe Abbildung 3. Im Sinne von Fischers Bildungsbegriff wird zwischen dem Nutzen für das Individuum (Kode = I) und für die Gesellschaft (Kode = G), zusätzlich werden vier Zielbereiche unterschieden:

- Anwendungen im beruflichen Umfeld (Kode = B).
- Im privaten persönlichen Umfeld (Kode = P) werden mathematische Kompetenzen benötigt, wenn z.B. Geld eine Rolle spielt: Einkaufen, Haushaltsplanung, Versicherungen, Kredite und Investitionen. Auch technische Fragen können im Alltag eine Rolle spielen im Zusammenhang mit Längen-, Flächen- und Volumeneinheiten oder physikalischen Größen, wie Druck, Dichte, Stromstärke und Widerstand, Energie, Leistung, Lichtstrom, Lautstärke usw. Beim Heimwerken oder im Hobbybereich kann elementare Geometrie nützlich sein.
- In Kapitel 4 wurde das Ziel besprochen, durch höhere Allgemeinbildung besser mit Expert*innen kommunizieren zu können (Kode = E). Ebenso wurde die inhaltliche Medienkompetenz besprochen, mit der man besser über wissenschaftsnahe Medieninhalte reflektieren und darauf reagieren kann.

- Möglichkeiten, allgemeine Kognitive Fähigkeiten (Kode = K) im Mathematikunterricht zu stärken, wurden in Kapitel 5 erörtert.

	Individuum	**Gesellschaft**
Beruf	**IB**	**GB**
Persönliches Umfeld	**IP**	**GP**
Expert*innen/Medien	**IE**	**GE**
Kognitive Fähigkeiten	**IK**	**GK**

Abbildung 3. Kriterien für die Sinnhaftigkeit von Schulstoff

Die folgenden Aufgabenbereiche stehen stellvertretend für entsprechende schulmathematische Inhalte, deren Sinnhaftigkeit anhand der Matrix (Abbildung 3) illustriert wird.

1. Kompetenz: Prozente abschätzen ohne Technologie
   15% von EUR 61 sind ca.
   ☐ EUR 6 ☐ EUR 9 ☐ EUR 15
   ☐ EUR 20 ☐ EUR 30 ☐ EUR 60
   Sinnkriterien: IP, GP, IB, GB, etc.
2. In Kapitel 5 wurde die Förderung des räumlichen Vorstellungvermögens besprochen und eine mentale räumliche Rotationsübung angeführt, siehe Abbildung 2. Raumintelligenz hilft beim Autofahren, wenn rückwärts eingeparkt wird, insbesondere mit einem Anhänger oder wenn nur über Spiegeln nach hinten gesehen werden kann oder wenn man sich mit Straßenkarten oder in größeren Gebäudekomplexen orientieren muss. Räumliches Vorstellungvermögen ist auch in zahlreichen technischen Berufsfeldern wichtig und spielt somit für die Wirtschaft insgesamt eine Rolle.
3. Kompetenz: Konfidenzintervalle und Signifikanz im Kontext verstehen und verwenden.
   „Der durchschnittliche Antikörperwert der Geimpften ist signifikant erhöht."
   a) Was bedeutet das genau? Hat jeder Geimpfte überdurchschnittlich viele Antikörper?
   b) Es werden eine geimpfte und eine ungeimpfte Person ausgewählt. Weiß man, wer mehr Antikörper hat?

Hier kommt insbesondere das Kriterium GE zu tragen, speziell die inhaltliche Medienkompetenz. Je mehr Menschen über Kompetenzen aus dem Bereich der schließenden bzw. beurteilenden Statistik verfügen, desto qualitätsvoller wird der politische Diskurs. Diese Kompetenzen tragen somit auch zur Stärkung der Demokratie bei.

5 Was sinnlose Schulmathematik fördert

Historische Wurzeln problematischer Schulmathematik, die keine Sinnkriterien erfüllen, wurden in Kapitel 1 besprochen. Aktuell können für solche Inhalte drei Quellen identifiziert werden: 1. Unterrichtstraditionen, 2. Schulbuchtraditionen, 3. Lehrpläne und andere Vorgaben, wie Kompetenzkataloge.

Ein Beispiel solcher Unterrichtstradition ist das Auswendiglernen von Multiplikationen. Die moderne Einmaleinsdidaktik geht schon lange andere Wege, siehe Gaidoschik 2022. Besonders sinnlos ist z.B. das Auswendiglernen aller Quadratzahlen bis 20^2. Zwar spielt z.B. $16^2 = 256$ als 2er-Potenz eine wichtige Rolle, aber zu verlangen, dass z.B. die Quadratzahlen 289, 324, 361 im Langzeitgedächtnis gespeichert werden, hat wohl keinen Sinn.

Die oft geforderte „Entrümpelung der Lehrpläne" hat auf fachlicher Ebene längst stattgefunden, auch wenn die allgemeinen Teile der Lehrpläne immer länger werden. Weniger entrümpelt wurden hingegen die Schulbücher. Gerne orientieren sich Autor*innen an älteren Schulbüchern, anstatt Traditionen kritisch zu hinterfragen. Hinzu kann eine Erwartungshaltung seitens des Verlags kommen, wo man sich zwar über äußerlich oder methodisch neue Konzepte freut (insbesondere digitale), aber sich inhaltlich nicht traut, jene Stoffbereiche zu streichen, die in anderen Büchern weit verbreitet sind, weil man Kritik fürchtet, wenn traditionelle Aufgabengruppen oder Kapitel fehlen. Dies führt außerdem dazu, dass Lehrbücher oft über 250 Seiten haben, da sind Übungsbücher und andere Aufgabensammlungen sowie digitale Inhalte noch nicht mitgerechnet.

Anstatt die SRDP-Mathematik in Österreich weiterzuentwickeln, hat seit der Gründung der Beratungsgruppe Mathematik unter BM Fassmann eine didaktisch reaktionäre Bewegung an Einfluss gewonnen, in der Vertreter der Fachmathematik eine wesentliche Rolle spielen. Sie richtet sich im Kern gegen die Reformen, die durch die Einführung der SRDP eingeleitet wurden. Die Einbeziehung von Unterrichtsleistungen aus dem vergangenen Schuljahr ist im Sinn dieser Gegenbewegung.

Parallele Entwicklungen können auch in Deutschland beobachtet werden, wo die Kritik an der Kompetenzorientierung dadurch geprägt ist, dass nicht verstanden wird, was Kompetenzorientierung bedeutet, und fälschlicherweise davon ausgegangen wird, es handle sich dabei um oberflächliche Wissensvermittlung zur Bearbeitung von geschlossenen Aufgabenformaten.

Dies führt uns zum dritten Punkt (Lehrpläne und andere Vorgaben): Auf Betreiben der Beratungsgruppe Mathematik soll beispielsweise die Produktregel der Differentialrechnung ab dem Maturahaupttermin 2027/28 ohne Technologie angewendet werden. In (BMBWF 2022) wird dazu folgendes Beispiel gegeben:

$$(x^2 \cdot \sin(x))' = 2 \cdot x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

Es handelt sich um die Rückkehr einer Formel aus der Zeit vor der Zentralmatura im Sinne der gegenwärtigen reaktionären Bestrebungen. Die Herleitung der Produktregel muss nicht beherrscht werden, sie wird rezeptartig ohne Verständnis angewendet, was natürlich nicht im Sinn der Kompetenzorientierung ist. Die Aufgabenstellungen dazu sind sehr speziell und künstlich konstruiert und im Kontext einer höheren Allgemeinbildung sinnlos (siehe Abbildung 3). Gleichzeitig wurden die oben bereits als wichtig und sinnvoll erkannten Konfidenzintervalle aus dem AHS-Maturastoff gestrichen.

Hier offenbart sich ein Konflikt, der auf unterschiedliche Sichtweisen zurückzuführen ist: Während das ursprüngliche Konzept der Zentralmatura (so wie der vorliegende Artikel) den Sinn der Schulmathematik außerhalb der Schule sucht, steht für manche Fachmathematiker*innen die Mathematik an sich im Zentrum der Argumentation. Das Streichen der schließenden Statistik, die für Anwendungen besonders wichtig ist, wird damit begründet, dass diese Art der Statistik nicht mathematisch ausreichend exakt im schulischen Kontext behandelt werden kann und die alte, auf händischen Termumformungen basierte, Schulmathematik besser geeignet sei, da hier die einzelnen Schritte genauer nachvollziehbar sind. Dabei wird nicht auf Basis der Sinnhaftigkeit einzelner Stoffkapitel, sondern mit dem Nutzen der Mathematik im Allgemeinen argumentiert: Weil Mathematik in so vielen Anwendungen steckt, sei Mathematik auch in der Schule so wichtig und sinnvoll. Diese Argumentation ist jedoch falsch. Denn aus der Bedeutung mancher Teile der Mathematik im außerschulischen Kontext folgt nicht, dass jede Art von Mathematik in der Schule Sinn hat. Letztlich besteht der Hauptfehler der aktuellen, reaktionären Bestrebungen darin, die Mathematik selbst als Endziel und Zweck zu sehen, was trotz anderslautender Beteuerungen in Drittmittelanträgen der Lebenswelt mancher Fachmathematiker*innen entspricht, zu denen auch der Autor des vorliegenden Artikels in der ersten Hälfte seines Berufslebens zählte.

Beschwerden seitens der Fachwissenschaft, dass seit Einführung der Zentralmatura Mathematikstudierende, im Vergleich zu früher, weniger gut Terme händisch manipulieren können, kann entgegnet werden, dass es nicht Aufgabe des Mathematikunterrichts ist, auf ein Mathematikstudium vorzubereiten.

Literatur

Burg, A. (1837*). Compendium der höheren Mathematik*. Carl Gerold Verlag.

BIFIE, (2013). *Standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung, Grundlagen – Entwicklung – Implementierung*. Stand Nov. 2013. https://www.yumpu.com/de/document/-view/22539405/standardisierte-kompetenzorientierte-reifepra-1-4-fung-i-reife-bi-fie, abgerufen am 27.02.2023).

BMBWF, (2023) Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Minoritenplatz 5, A-1010 Wien. *Medienkompetenzen* https://www.bmbwf.gv.at/Themen/-schule/schulpraxis/uek/medien.html

Kompetenzenlandkarte Medienkompetenzen: https://www.bmbwf.gv.at/dam/jcr:2cebe2a7-2732-4b86-9548-c739f2247499/medien_kl_25724.pdf

BMBWF, (2022) SRP Mathematik (AHS): 3-Stufen-Plan zur Weiterentwicklung des Mathematik-Unterrichts und der Mathematik-Matura.

Bogensberger, B. (2014), *Die Neue Mathematik und was von ihr übrig blieb*. Diplomarbeit, Universität Wien.

Fischer R. (2012a). Fächerorientierte Allgemeinbildung: Entscheidungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit mit ExpertInnen. In R. Fischer, U. Greiner, H. Bastel (Hg.) *Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung*, Trauner Verlag + Buchservice GmbH, S. 9 – 17.

Fischer R. (2012b). Bildung von Individuum und Gesellschaft. In R. Fischer, U. Greiner, H. Bastel (Hg.) *Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung*, Trauner Verlag + Buchservice GmbH, S. 262 – 276.

Fischer R. (2003). Höhere Allgemeinbildung und Bewusstsein der Gesellschaft. *Erziehung und Unterricht*, S. 559 – 566.

Gaidoschik M. (2022). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken: Strategien gegen Lernschwierigkeiten*. 6. Aufl, Klett-Verlag.

Heymann H.-W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz Verlag.

Maaß J. (2022). Fake News und realitätsbezogener Mathematikunterricht. *R&E-SOURCE, Journal for Research and Education*. Ausg. 18.

Radl M. (2019). *Der Einfluss der Revolution 1848/1849 in Österreich auf die Mathematik-Schulbücher*. Diplomarbeit, Universität Wien.

Raumintelligenz-Förderung 3.0 (RIF 3.0), Arbeitsgemeinschaft Didaktische Innovation für Geometrie und Forschungsgruppe für Didaktik der Mathematik (Universität Salzburg). www.adi3d.at/rif30 ,abgerufen am 24.04.2023.

Natürlich Mathematik

Monika Musilek[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1167

Zusammenfassung

Objekte aus der Natur können für Mathematiktreiben herangezogen werden. Vorgestellt wird ein Lernsetting, bei dem ausgehend von kugelförmigen Früchten (Orangen) die Leitidee des Messens handlungsorientiert umgesetzt wird. Mathematische Merkmale wie Volumen, Oberflächeninhalt werden mit Orangen untersucht. Es wird gezeigt, wie sich eine Verkettung von allen zentralen fachlichen Konzepten mit allen mathematischen Prozessen gemäß des Lehrplans 23 für die Sekundarstufe 1 realisieren lässt. Dokumente aus der Erprobung und dem Workshop ergänzen die Beschreibung.

Lernsetting, Handlungsorientierung, Leitidee Messen

1 Einleitung

Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen, soll Lernenden, laut Winter, im Mathematikunterricht ermöglicht werden (Winter, 1996). Daher richten wir den Blick auf die Natur und betrachten sie mit der mathematischen Brille.

Im Workshop „Natürlich Mathematik“ beim Tag der Mathematik 2023 an der PH Niederösterreich wurde ein Lernsetting vorgestellt und bearbeitet, bei dem der mathematische Inhalt „Körper“ mit allen weiteren zentralen fachlichen Konzepten aber auch mit allen mathematischen Prozessen verknüpft wurde (siehe Abbildung 1).

Grundidee dieses Lernsettings ist es, dass durch einen lebensnahen Kontext Schüler*innen zu motivieren, sich mit mathematischen Inhalten aktiv auseinanderzusetzen. Grundvorstellungen zu mathematischen Körpern, insbesondere zu den Eigenschaften Volumen und Oberflächeninhalt von Kugeln sollen aktiviert und in Vernetzung zu anderen Körpern bzw. ebenen geometrischen Figuren ausgebaut werden.

In den Vordergrund dabei rückt das Finden eigener Lösungswege auf selbsterfundene oder von der Lehrperson aufgeworfene Fragen, bei deren Beantwortung es möglich ist, eine starke Handlungsorientierung zu bieten und dadurch das Arbeiten mit Formeln erst an das Ende des Lernprozesses gestellt wird.

[1] Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.
E-Mail: monika.musilek@phwien.ac.at

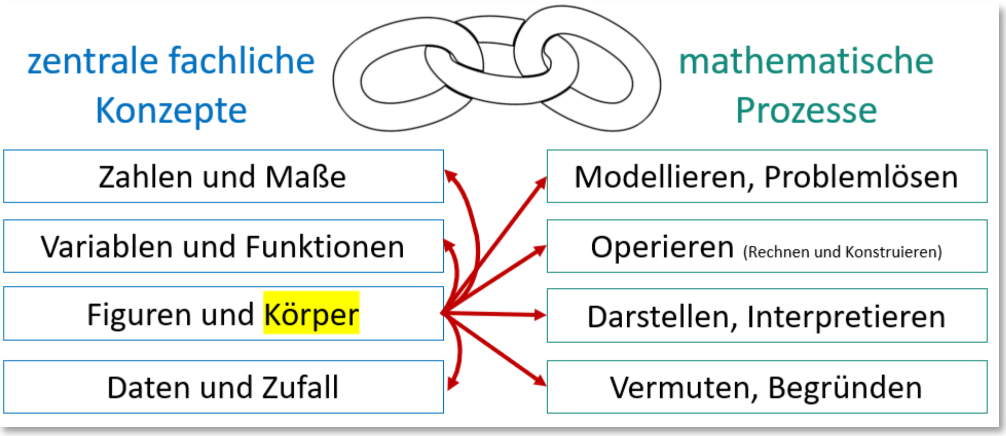


Abbildung 1: zentrale fachliche Konzepte und mathematische Prozesse im Lehrplan der Sekundarstufe 1 (vgl. BGBl. II Nr. 1/2023, 2023).

Eigenschaften von Körpern können durch das Messen zugänglich gemacht werden. Die Grundidee des Messens hat viele Gesichter oder Aspekte. Messen kann bedeuten, dass

- … verglichen wird (Vergleichsaspekt),
- ... mit einer ausgezeichneten Größe ausgelegt wird (Messen-durch-Auslegen-und-Zählen-Aspekt),
- … abgelesen wird (Messgerät-Aspekt),
- … gerechnet wird (Messen-als-Berechnen-Aspekt). (vgl. Weigand et al., 2018, S. 150)

In vielen unterrichtlichen Situationen wird der Idee des Messens zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt, oft wird schnell zu einem Berechnen übergegangen. Doch gerade die Leitidee des Messens bietet die Möglichkeit, verständnisorientiert Eigenschaften einer Kugel zu erarbeiten.
Im hier vorgestellten Lernsetting werden alle Aspekte des Messens berücksichtigt. Als Modell einer Kugel werden kugelförmige Früchte herangezogen, wie etwa Äpfel, Mandarinen, Klementinen oder in unserem Fall der Jahreszeit entsprechend Orangen.

2 Fragen über Fragen

Zu Beginn des Lernsettings wird die mathematische Brille aufgesetzt und mögliche Fragen an die Orange formuliert.
Abbildung 2 zeigt die Zusammenfassung der Erhebung während des Workshops am Tag der Mathematik 2023. Man erkennt, dass Fragen zur (Körper-)Form, zum Volumen und zur Oberfläche mit Abstand am häufigsten genannt werden. Unter der Kategorie „sonstige“ sind alle Fragen zusammengefasst worden, die nur jeweils von einer einzigen Person formuliert wurden. Diese Fragen, die sich natürlich in weiterer Folge noch für Untersuchungen anbieten

würden, beziehen sich beispielsweise auf das Bestimmen des Verhältnisses essbarer/trinkbarer Teile zur Gesamtfrucht. Aber auch kamen Vorschläge, Experimente durchzuführen, so zum Beispiel: Wie weit kann die Orange rollen?

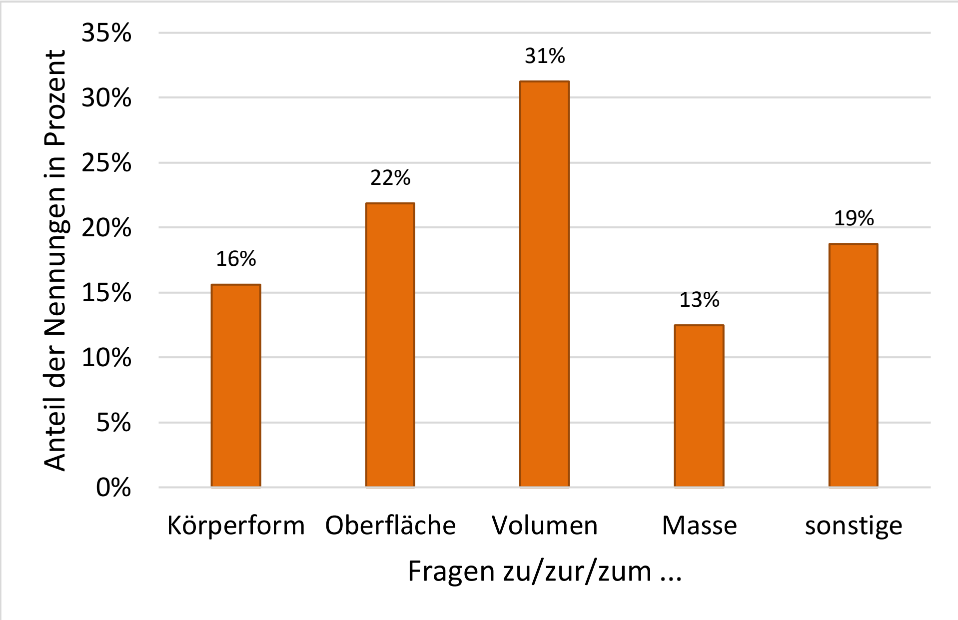


Abbildung 2: Relative Häufigkeit, dass die gestellte Frage einem bestimmten Inhalt zuzuordnen ist.

Es zeigt sich somit, dass in dieser ersten Phase des Lernsettings sehr wohl den Schüler*innen die vermeintliche Freiheit eingeräumt werden kann, ihre brennendste mathematische Frage an die Orange zu formulieren. Als Lehrperson kann man mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, dass Fragen zur Körperform, zum Volumen und zur Oberfläche gestellt werden.

Nachdem die möglichen Fragen formuliert sind, wird im Lernsetting darauf geachtet, dass alle Untersuchungen mit einem Stück Obst pro Lernenden durchgeführt werden kann, d.h. dass zuerst Fragen beantwortet werden, deren Lösungswege ein „Zerstören“ der Frucht vermeiden.

Der Tisch wird im Sinne Maria Montessori als „vorbereitete Umgebung“ eingesetzt. Die vorbereitete Umgebung ist eine, die der Aktivität der Lernenden Rechnung trägt. Sie ist genau und klar durchstrukturiert und hält alle notwendigen Materialien geordnet bereit (vgl. Montessori & Michael, 2021). Es werden den Lernenden im Ablauf des Lernsettings daher immer nur ganz bestimmte Materialien zur Verfügung gestellt, die für die Lösung einer Aufgabenstellung eingesetzt werden dürfen. Und diese Materialien sind zu Beginn der Bearbeitung ordentlich, ohne weitere Materialien, auf dem Tisch platziert. Durch die Vorgabe des Materials kann u.U. auch ein Denken in eine bestimmte Richtung gelenkt werden. Da Schulstunden nur eine beschränkte Zeitdauer aufweisen, ist dies manches Mal eine adäquate

Möglichkeit, Hilfestellung zu geben oder auch den Lernprozess ein Stück weit zu beschleunigen.
Die nachstehenden Fragen sind in einer gleichbleibenden Struktur dargestellt: Die Materialliste gibt Auskunft, welche Materialien (zusätzlich) verwendet werden dürfen. Die Anweisung formuliert den Auftrag für die Schüler*innen. Ein antizipierender Lösungsweg wird vorgestellt. Weitere Lösungswege oder Umsetzungsmöglichkeiten im Unterricht werden aufgezeigt.

2.1 Wie groß ist der Radius?

Materialliste:
1 Orange, 1 Maßband, 1 Smartphone, 1 Stift, 1 Blatt Papier
Anweisung:
Bestimme möglichst genau den Radius der Orange in cm.
Antizipierender Lösungsweg:

1. Umfang entlang des Äquators mit dem Maßband messen (siehe Abbildung 3).
2. Wert mit Stift auf Papier notieren.
3. Recherche nach der Formel für den Umfang eines Kreises mit dem Smartphone.
4. Umformen der Formel zu $r = \frac{u}{2 \cdot \pi}$
5. Einsetzen des gemessenen Wertes.
6. Mehrmalige Wiederholung der Prozedur und bilden des arithmetischen Mittelwerts der Messergebnisse, um den Radius „möglichst genau“ zu bestimmen.

Abbildung 3: Lösungsweg zur Bestimmung des Radius.

Bei der Erprobung des Lernsettings ergab sich eine weitere sehr interessante Methode, die kurz erläutert werden soll: Während eine Person die Taschenlampe des Smartphones verwendete und einen Schatten der Orange auf das Blatt Papier projizierte, der genauso groß wie der Umfang der Orange war, zog eine andere Person den Rand dieses Schattens mit dem Stift nach. Die Orange wurde beiseitegelegt und der Durchmesser konnte bequem gemessen werden. Die Berechnung des Radius erfolgte (im Kopf) durch Halbieren.

ISSN 2313-1640

2.2 Wie groß ist das Volumen?

Um das Volumen eines Körpers zu bestimmen, bieten sich vier verschiedene Zugänge an (vgl. Helmerich & Lengnink, 2016, S. 167). Man kann einerseits den Körper mit Einheitswürfeln ausmessen. Das klappt bei Kugeln nur sehr eingeschränkt. Man kann durch Umschütten den Rauminhalt bestimmen. Das geht aber nur bei Hohlkörpern. Man kann Formeln zur Berechnung verwenden. Das widerspricht der Idee, mit Handlungsorientierung diese Größe zu bestimmen. Also bleibt nur der vierte Zugang, der auf dem Archimedischen Prinzip basiert. Dieser Messvorgang wurde schon vor mehr als 2000 Jahren vom griechischen Gelehrten Archimedes entdeckt. Grundidee ist es, dass das Volumen eines Körpers genau so groß ist wie das Volumen des von ihm verdrängten Wassers.
Dementsprechend wurde der Tisch „vorbereitet" und zusätzlich Material ausgehändigt:

Materialliste:

1 Messbecher mit Skalierung in ml gefüllt mit Wasser bis zu einer definierten Marke, 1 Zahnstocher

Anweisung:

Bestimme das Volumen der Orange in cm^3.

Antizipierender Lösungsweg:

1. Ablesen des Wasserstandes.
2. Orange in den Messbecher geben und mit dem Zahnstocher unter die Wasseroberfläche drücken.
3. Den neuen Wasserstand ablesen.
4. Das gesuchte Volumen ergibt sich aus der Differenz der beiden abgelesenen Werte.
5. Umwandeln der Einheiten von ml in cm^3.

2.3 Wie groß ist die Oberfläche?

Materialliste:

1 Blatt kariertes Papier, wobei die einzelnen Kästchen genau 1 cm^2 groß sind.

Anweisung:

Bestimmt den Oberflächeninhalt der Orange in cm^2. Dokumentiert euren Lösungsweg mit Fotos. Ladet am Ende eure Fotos hoch und präsentiert euren Lösungsweg.

Antizipierender Lösungsweg:

1. Orange schälen.
2. Die Schalenstücke in möglichst einfacher geometrischer Form (Rechteck oder Quadrat) auf das karierte Papier legen (siehe Abbildung 4).
3. Durch Zählen der Kästchen die Größe der Oberfläche in cm^2 bestimmen.

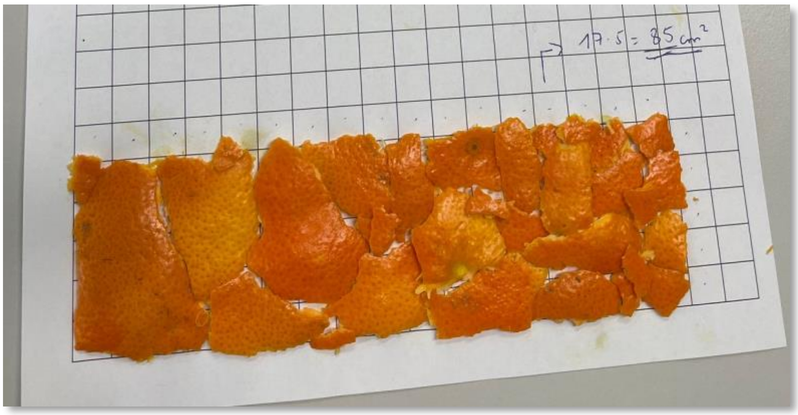
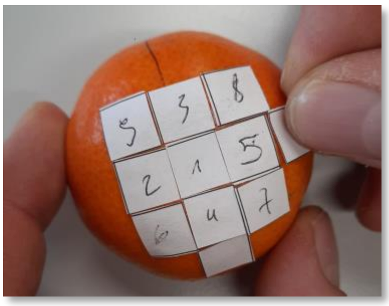


Abbildung 4: Bestimmung der Größe der Oberfläche durch Auflegen der Schale.

Die Bestimmung des Oberflächeninhalts kann auf unterschiedliche Weise passieren, obwohl das Material beschränkt ist. Daher ist es hier besonders reizvoll, eine Unterrichtsphase einzuplanen, in der die verschiedenen Wege vorgestellt und auf ihre Plausibilität hin überprüft werden. Während der Bearbeitung müssen die Lösungsschritte daher mit Fotos dokumentiert werden. Diese werden dann einfach auf ein Flinga Whiteboard [1] geladen. Für die Schüler*innen reicht es aus, den Link (am besten über einen QR-Code) aufzurufen, und die Bilder hochzuladen, es sind keine weiteren Registrierungsschritte notwendig. Wenn alle Gruppen die Größe der Oberfläche bestimmt haben, wird das Whiteboard projiziert und die Schüler*innen haben, durch ihre eigenen Bilder unterstützt, die Möglichkeit, ihren Lösungsweg vorzustellen und für andere nachvollziehbar zu machen. Auf diese Weise werden das Kommunizieren und Argumentieren anhand geometrischer Eigenschaften sehr gefördert. Bei der Erprobung des Lernsettings ergaben sich, wie in

Abbildung 5 dargestellt, weitere spannende Lösungswege, um die Größe der Oberfläche zu bestimmen:



Die Orange wird mit Einheitsquadraten ausgelegt.

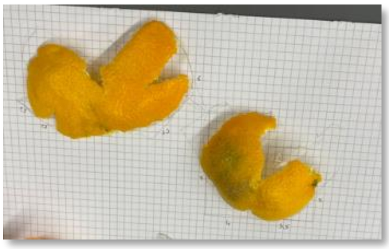
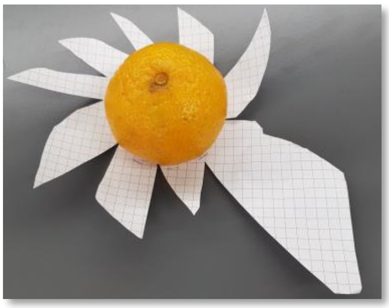
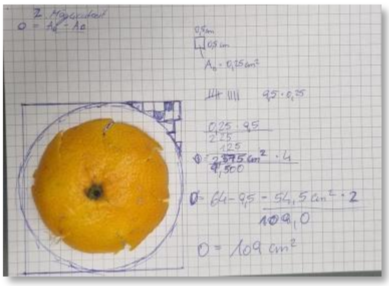
	Schalenteile werden umrandet. Die so gezeichneten ebenen Figuren durch Dreiecke, Rechtecke, … annähern.
	Es wird versucht, ein Netz über die Orange zu legen. Und nach dem Auffalten dessen Größe bestimmt.
	Die Hälfte der Orangenschale wird plattgedrückt. Umfang gezeichnet. Ein Quadrat, das den Kreis umschließt, wird gezeichnet. Und die Kästchen außerhalb des Kreises von der Gesamtanzahl der Kästchen im Quadrat subtrahiert.

Abbildung 5: Verschiedene Lösungswege zur Bestimmung der Größe der Oberfläche.

2.4 Wie viele Kreise (mit dem Radius der Orange) lassen sich mit der Schale füllen?

Materialliste:

1 Zirkel

Anweisung:

Schätze zuerst!

Zeichne dann die geschätzte Anzahl an Kreisen. Fülle sie mit der Schale.

Was fällt dir auf?

Antizipierender Lösungsweg:

1. Einen Kreis zeichnen. Mit Orangenschalenstücken befüllen.
2. Schätzung durchführen.
3. Weitere Kreise gemäß der Schätzung zeichnen.
4. Die Schalenstücke in die Kreise legen (siehe Abbildung 6).
5. Zusammenhang beschreiben.

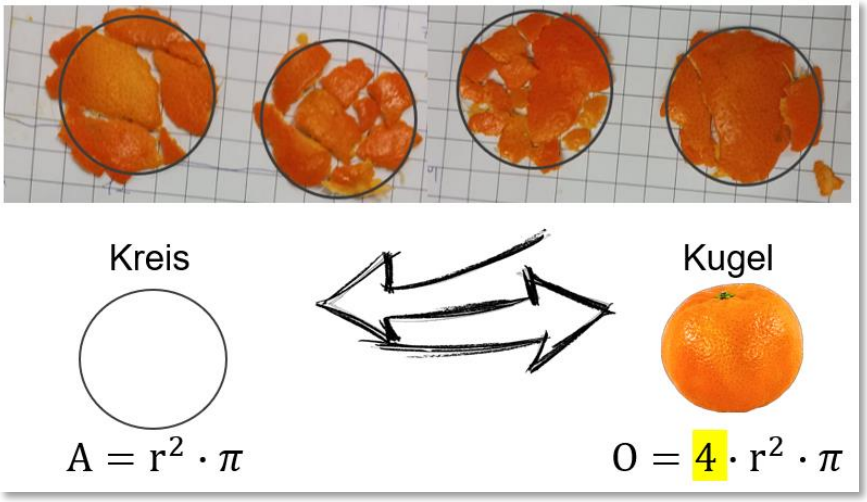


Abbildung 6: Zusammenhang Flächeninhalt Kreis und Oberflächeninhalt Kugel.

3 Weitere Ideen

Es lassen sich noch viele weitere Aufgabenstellungen finden, die eine Vernetzung zu anderen Inhaltsbereichen gewährleisten.

Will man beispielsweise das Thema „funktionale Zusammenhänge" aufgreifen, so können die bisher ermittelten Werte (Radius, Volumen, Oberfläche) verwendet werden. In einem von allen Lernenden gemeinsam genutzten Tabellenkalkulationsblatt tragen die Schüler*innen ihre ermittelten Werte ein. In der graphischen Darstellung der Punktewolke werden dann zwei Trendlinien ergänzt: einerseits die Größe der Oberfläche in Abhängigkeit vom Radius (O(r)) und andererseits das Volumen in Abhängigkeit vom Radius V(r). Es lässt sich erkennen, dass die Funktion O(r) eine Potenzfunktion vom Grad 2 und die Funktion V(r) eine Potenzfunktion vom Grad 3 ist.

Um Vernetzungen innerhalb der Geometrie aufzugreifen, ist nachstehende Aufgabenstellung denkbar:

Materialliste:

1 Blatt Papier, Geodreieck

Anweisung:

Haben eine Kugel und ein Würfel mit gleichem Volumen die gleiche Oberfläche? Zeichne das Netz eines Würfels, der das gleiche Volumen wie die Orange hat. Lege es mit der Orangenschale aus. Was fällt dir auf?

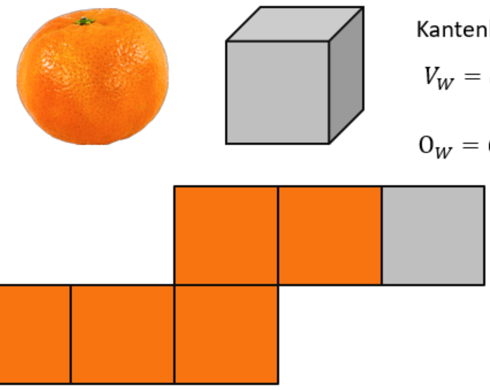
Durch das Auslegen stellt man fest, dass nur rund 5 der 6 Quadrate des Netzes befüllt werden können. Die wichtige Erkenntnis, die daraus anschaulich wird, ist, dass bei Volumen-Gleichheit die Kugel einen kleineren Oberflächeninhalt als der Würfel hat. Der Oberflächeninhalt der

Kugel beträgt nur rund 80% der Würfeloberfläche. Diese Veranschaulichung kann man rechnerisch noch verifizieren (siehe Abbildung 7):

Radius r

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O_K = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$



Kantenlänge a

$$V_W = a^3$$

$$O_W = 6 \cdot a^2$$

$$a = \sqrt[3]{V_K} = \sqrt[3]{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} = r \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3} \cdot \pi}$$

$$\frac{O_K}{O_W} = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi}{6 \cdot a^2} = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \pi}{3 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi\right)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot \pi}{3 \cdot 2^4}} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0{,}806$$

Abbildung 7: Verhältnis der Größe der Oberflächen bei gleichem Volumen.

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass auf YouTube ein Rap[2] über das Volumen und den Oberflächeninhalt einer Kugel von DorFuchs zu finden ist.

4 Zusammenschau

Die Natur als Ausgangspunkt zu nutzen war das Ansinnen dieses Beitrags. Die Orange als Prototyp für eine Kugel wird im Hinblick auf ihre mathematischen Eigenschaften (Volumen, Oberfläche) handlungsorientiert untersucht. Das Lernsetting ist so konzipiert, dass vielfältige Vernetzungen in Bezug zu zentralen fachlichen Konzepten und mathematischen Prozessen realisiert werden: Bei der Bestimmung des Radius geht es um Problemlösen, aber auch um den Umgang mit Daten. Für das Messen des Volumens sind Interpretieren und Maße zentrale Punkte. Problemlösen, Operieren, Interpretieren kombiniert mit Körpern sind bei der Suche nach dem Zusammenhang von Flächeninhalt des Kreises und Oberflächeninhalt der Kugel gefordert. Operieren, Technologieeinsatz und funktionale Zusammenhänge (insbesondere Potenzfunktionen) werden bei weiteren Ideen gebraucht. Und dass bei gleichem Volumen die Kugel wirklich kleinere Oberfläche als der Würfel hat, kann zentrale fachliche Konzepte aus dem Bereich Variable mit Operieren verknüpfen.

Wenn am Ende des Lernsettings sich der Raum mit dem Duft nach Orangen gefüllt hat, dann weiß man, dass die Natur in den Mathematikunterricht Einzug gehalten hat.

Literatur

BGBl. II Nr. 1/2023, (2023). https://www.ris.bka.gv.at/eli/bgbl/II/2023/1

Helmerich, M. A., & Lengnink, K. (2016). *Einführung Mathematik Primarstufe—Geometrie*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-47206-4

Montessori, M. & Michael, B. (2021). *Grundlagen meiner Pädagogik: Und weitere Aufsätze zur Anthropologie und Didaktik* (13., unveränderte Auflage). Quelle & Meyer Verlag.

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3., erweiterte und überarbeitete Auflage). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *4*(2), S. 35–41. https://doi.org/10.1515/dmvm-1996-0214

[1] www.flinga.fi

[2] https://www.youtube.com/watch?v=jQoHp_P8Y0A

R&E SOURCE

10. Jg. (2023), Nr. 2: More of Mathematics
Konferenzband zum Tag der Mathematik

Motivation im Mathematikunterricht

Möglichkeiten Lernende beim Entwickeln eines positiven Selbstkonzepts (im und durch Mathematikunterricht) zu unterstützen

Martina Müller[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1176

Zusammenfassung

Motivation, Selbstkonzept und Selbstwirksamkeit bedingen einander und sind für Lernprozesse bedeutsam. Weisen Lernende eine hohe Motivation auf, beschäftigen sie sich länger und intensiver mit mathematischen Aufgabenstellungen. Dies begünstigt die Entstehung von Selbstwirksamkeitsüberzeugungen, die Ausbildung eines positiven Selbstkonzepts und mathematischer Resilienz. Umgekehrt können wiederholte Misserfolgserfahrungen und Frustrationserlebnisse eine Negativspirale in Gang setzen und zur Entstehung von erlernter Hilflosigkeit und der Ausbildung von Mathematikangst führen. Der vorliegende Artikel beschreibt, wie sich diese Vorgänge im Mathematikunterricht vollziehen, welche Möglichkeiten Lehrkräfte haben, Einfluss auf diese Prozesse zu nehmen und ein positives Selbstkonzept von Lernenden unterstützen können. Ein konkretes Praxisbeispiel aus dem Unterricht einer 4. Klasse der Sekundarstufe I zeigt eine Möglichkeit, wie Schüler*innen zu mathematischen Erkundungen motiviert werden können, für sie relevante Beispiele zu einem Thema finden und kooperativ arbeiten.

Selbstwirksamkeit, Selbstkonzept, mathematische Resilienz

1 Motivation

Unter Motivation versteht man die Bereitschaft einer Person, sich intensiv und anhaltend mit einem Gegenstand auseinanderzusetzen. Motivation kann als Prozess aufgefasst werden, in dessen Verlauf zwischen Handlungsalternativen ausgewählt wird. Das Handeln wird dabei auf ausgewählte Ziele ausrichtet und auf dem Weg dorthin in Gang gehalten, also mit psychischer Energie versorgt (Hasselhorn & Gold, 2009, S. 103). Welche Aktivitätseinheiten von einem Individuum verfolgt und welche verworfen werden, hängt von verschiedenen Faktoren ab.

[1] Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.
E-Mail: martina.mueller@phwien.ac.at

Betrachtet man nur die elementare Struktur des motivierten Handelns, so ist dieses von zwei universellen Charakteristiken bestimmt, die auf evolutionärer Ebene verankert sind:

1. *Dem Streben nach Wirksamkeit:* Der Mensch strebt danach, Kontrolle und Einfluss auf die ihn umgebende physische und soziale Umwelt zu haben.
2. *Dem Zielengagement:* Organisiertes Verhalten, Fertigkeiten, Emotionen und Aktivitäten werden in koordinierter Weise eingesetzt, um ein Ziel zu erreichen (Heckhausen & Heckhausen, 2018, S. 2).

Um die Richtung, Persistenz und Intensität von zielgerichtetem Verhalten genauer zu betrachten, kann man die Vielzahl von beteiligten Faktoren in personenbezogene und situationsbezogene Faktoren aufteilen. Diese lassen sich nicht voneinander isolieren und stehen zueinander in einer dynamischen Wechselwirkung (Heckhausen & Heckhausen, 2018, S 7).

Bei der Beschreibung der drei psychischen Grundbedürfnisse eines Menschen nach Deci und Ryan (1993) finden sich ebenso Ziele wieder, die Motivation begründen:

1. *Autonomie*: Der Wunsch nach Selbstbestimmung ist in uns allen vorhanden. Jeder möchte sich selbst als eigenständig handelnd im Rahmen seiner eigenen Kompetenz und Fähigkeit erleben.
2. *Kompetenzerleben*: Man ist bestrebt, die anstehenden Anforderungen und Herausforderungen aus eigener Kraft bewältigen zu können. Später werden wir uns dieses Ziel auch unter dem Begriff „Selbstwirksamkeit“ nochmals ansehen.
3. *Sozialer Eingebundenheit*: Jeder von uns hat den Wunsch, von der Bezugsgruppe akzeptiert zu werden und sich anerkannt zu fühlen. (Deci & Ryan, 2000, S. 230)

Es gilt, Schüler*innen im Lernprozess im Erleben und Erreichen der drei psychischen Grundbedürfnisse zu unterstützen, einerseits um die entstehende Motivation für die Lehr- und Lernprozesse zu nutzen, aber auch, um andererseits gemeinsam mit den Lernenden einen Grundstein für ein erfülltes Leben in der Gemeinschaft zu legen. Für den Schulunterricht gilt, dass die Motivationstendenz aus den verschiedenen, nach dem persönlichen Motivprofil gewichteten Anreizen der Tätigkeit und des Handlungsergebnisses, geprägt ist. Das Handlungsergebnis wird sowohl unter dem Aspekt der internen, die Selbstbewertung betreffenden Folgen, als auch der externen Folgen betrachtet.

Motivation ist ein Prozess mit erkennbaren Merkmalen. Für die Lehrperson ist es wichtig, die Anzeichen für motiviertes Handeln der Lernenden zu erkennen. Ein Merkmal hierfür kann sein, dass sich Lernende aktiv auf gestellte Mathematikaufgaben einlassen und auch bereit sind, sich über die Mathematikstunde hinaus mit einem Thema zu beschäftigen. Weiters zeichnen Beharrlichkeit und Durchhaltevermögen Lösungsversuche motivierter Schüler*innen aus. Die Intensität mit der Lernende ihre Aufmerksamkeit auf ein Problem richten, inhaltsbezogene Fragen stellen und sich nicht leicht ablenken lassen und Störungen ignorieren, kann ein weiteres Kennzeichen sein. Engagement und Interesse in der Auseinandersetzung mit einer Aufgabenstellung im Unterricht führen häufig zu „Aha-

Erlebnissen“, durch die Lernenden Handlungserleben ermöglicht wird. Ihre Selbstdefinition über die Komponenten Selbstkonzept (generalisierte Selbstwahrnehmung, kognitiv – Beispiel: „Ich bin ein*e gute*r Schüler*in.“), Selbstwertgefühl (generalisierte Selbstbewertung, emotional) und Kontrollüberzeugung (Beispiel: „Ich weiß genug, um dieses Beispiel zu lösen.“) entwickelt sich positiv (Frick, 2019, S. 93). In diesem Prozess spielt auch Motivationsregulation eine Rolle, insbesondere in Fehlersituationen, die Lernende demotivieren können, womit einerseits das in diesen Situationen enthaltene Lernpotenzial nicht genutzt werden (Tulis et al., 2011, S. 30) und ein Negativkreislauf entstehen kann, wie er in 2.5 beschrieben wird.

2 Affektive Ziele beim Mathematiklernen

2.1 Selbstwirksamkeit

Menschen mit hoher Selbstwirksamkeit haben Vertrauen in ihre Fähigkeiten, eine Aufgabe zu lösen, erholen sich schnell von Rückschlägen, trauen sich mehr zu. Im Fall von niedriger Selbstwirksamkeit verliert man schnell Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten und gibt schneller auf. Selbstwirksamkeit ist also wichtig für das Mathematiklernen.
Es lassen sich folgende vier Quellen der Selbstwirksamkeit festmachen (Bandura, 1993, S. 121):

1. *Bewältigungserfahrung:* Erfolgserlebnisse sind hierbei die treibende Kraft. Allerdings kann auch ein gelegentlicher Misserfolg verkraftet werden, wenn in Summe erkannt wird, dass sich Anstrengung lohnt.
2. *Stellvertretende Erfahrung:* Beobachtet man, dass ein*e Mitschüler*in, der*die als ähnlich zu einem selbst wahrgenommen wird, eine Aufgabe bewältigt, kann dies durchaus motivierend sein. Identifiziert sich der*die Schüler*in nicht mit dem anderen kann es allerdings auch zu einem gegenteiligen Effekt kommen.
3. *Verbale Ermutigung:* Angemessenes Feedback muss sich nicht immer auf das richtige Ergebnis beziehen, sondern sollte das Durchhaltevermögen und die Lösungsversuche beinhalten.
4. *Physiologische und emotionale Zustände:* Auch sonst motivierte Schüler*innen können einmal müde, krank oder von Sorgen geplagt sein. Eine große Rolle spielen auch Nervosität und Angst, worauf in 2.5 noch genauer eingegangen werden wird (Johnston-Wilder et al., 2017, S. 56 f.).

2.2 Mindsets – Theorien über einen selbst

Mindsets sind systematische Überzeugungen, die Menschen bezüglich ihrer intellektuellen Fähigkeiten haben, wobei zwischen Fixed und Growth Mindset unterschieden wird (Johnston-Wilder et al., 2017, S. 56). Beim Fixed Mindset wird Intelligenz als angeborene Eigenschaft gesehen, die nicht veränderbar ist. Herrscht, beispielsweise in einer Familie, die Überzeugung

„Wir sind schlecht in Mathe“ kann das für das Lernen im Mathematikunterricht problematisch werden. Lehrer*innen können aufgrund ihrer Unterrichtsgestaltung solche Überzeugungen aufbrechen. Durch differenzierte Aufgabenstellungen gekoppelt mit verbalen Ermutigungen können Wachstumsmentalität und Selbstvertrauen in kleinen Schritten gefördert werden. Günstig ist es, das Bemühen, die Idee und die Strategie zu loben. Werden hingegen nur Ergebnisse gelobt, bleibt die Denkweise des Lernenden eher starr. Menschen mit einem Growth Mindset sehen Ausdauer und Anstrengung als Möglichkeit, ihre intellektuellen Fähigkeiten und Leistungen zu verbessern. Sie sind daher auch eher bereit, sich neuen Aufgaben zu widmen. Ein*e Schüler*in mit positiver Selbsttheorie sagt: „Ich kann es zwar jetzt noch nicht, aber mit Mühe und Ausdauer kann ich mich dieser Aufgabe irgendwann stellen.“
Auch wenn Lernende mit einem „Fixed Mindset“ in der Schule und auch im Beruf durchaus erfolgreich sein können, sollte das Ziel einer Lehrperson unbedingt sein, das „Growth Mindset“ zu fördern, denn um die Herausforderungen des Lebens bewältigen zu können, benötigen Menschen die Fähigkeit, über sich hinauszuwachsen (Johnston-Wilder et al., 2017, S. 58 f).

2.3 Mathematische Resilienz

Die Psychologie versteht unter Resilienz die Kraft, Belastungen auszuhalten. Auch im schulischen Bereich, insbesondere im Mathematikunterricht, sind Lernende in verschiedenen Unterrichtssettings mit belastenden Situationen konfrontiert. In diesem Zusammenhang spielen selbsterfüllende Prophezeiungen und die mit ihnen einhergehende Er- bzw. Entmutigung eine entscheidende Rolle. Glaubt jemand, dass er mathematisch unbegabt ist, wird er bei mathematischen Problemstellungen eher vermuten, keine Lösung finden zu können und nach Fakten suchen, die diese Meinung bestätigen. Entsprechend wird der Lernende nur zaghafte Versuche unternehmen, auftretende Probleme alleine zu lösen. Wer es trotzdem versucht, wird bei auftretenden Schwierigkeiten rasch resignieren, weil er denkt, er habe es ja gewusst, dass er das nicht könne. Wer früh aufgibt, wird auch eher ein schlechtes Ergebnis erzielen und sich leichter als Versager fühlen (Frick, 2019, S. 79). Damit wird eine negative Vorerwartung (Laskowski, 2000, S. 20) bestätigt und dies führt wiederum zu einer negativen Bekräftigung, wodurch sich das Selbstbild bezüglich mathematischer Fähigkeiten weiter vermindert. Menschen mit mathematischer Resilienz hingegen erleben Mathematik als wichtig für die Gesellschaft und für sich selbst. Sie haben eine Wachstumsmentalität und wissen, dass Fortschritt in Mathematik mit Anstrengung, Wissensdurst und Ausdauer verbunden ist. Da Mathematiklernen oft negativ behaftet ist, müssen, um das Ziel der mathematischen Resilienz zu erreichen, diese negativen Emotionen durch positives Denken ersetzt werden. Dabei hilft es, die Lernenden in eine Art mathematische Gemeinschaft einzuladen, in der sie sich wohlfühlen und entwickeln können. Um die Wachstumsmentalität der Schüler*innen zu fördern, sollte die Lehrperson unterstreichen, wie wertvoll die Beiträge jedes Einzelnen für die Gemeinschaft sind. Genauso wichtig ist es, dass die Lernenden auf die

Anstrengungen und Schwierigkeiten vorbereitet sind, die die Beschäftigung mit Mathematik mit sich bringt. Zeigt man ihnen dann noch, wie sie sich Unterstützung holen können, fördert man als Lehrperson den Ideenreichtum bei der Bewältigung von Aufgaben genauso wie das gezielte Fragenstellen (Johnston-Wilder et al., 2017, S. 65 f.).

2.4 Angst und erlernte Hilflosigkeit

Fakt ist, dass viele Menschen Angst vor Mathematik haben (Ashcraft, 2002, S. 181). Dies liegt daran, dass sie Mathematik als unzusammenhängende Ideen und Prozesse erleben, die sie sich merken sollen. Wird die Angst so groß, dass Denk- und Lernprozesse dadurch behindert werden, kann sie vom Lernenden schließlich kaum mehr verborgen werden. Ein Mathematikunterricht, der immer wieder dieselben Methoden verwendet, Algorithmen immer gleich durchführt, mindert die Kommunikation der Lernenden untereinander. Durch Depersonalisierung wird weiteres die Idee unterstützt, dass Mathematik nichts mit dem Alltag, den Menschen, ihrem Leben und ihren Ideen zu tun hat (Nardi & Steward, 2003, S. 351). Sue Johnston-Wilder vom „Math Anxiety Trust" geht sogar so weit zu behaupten, dass die Angst vor dem Fach Mathematik mehr als alle anderen Schulfächer das Selbstbewusstsein von Schüler*innen zerstören kann. Schwierigkeiten bei Erlernen wichtiger Werkzeuge und Methoden über Jahre hinweg sieht sie als das traurige Resultat. Eine Möglichkeit der Entstehung und Manifestation von „Mathematikangst" entgegenzuwirken, kann das Wachstumsmodell (Johnston-Wilder et al., 2017, S. 62) darstellen. In diesem Modell wird zwischen drei Zonen, der Komfort-, der Wachstums- und der Angstzone unterschieden. In der Komfortzone (grün) fühlt man sich wohl, ist entspannt. Daher ist der grüne Bereich nützlich, um Ideen zu konsolidieren, Sprachfluss und Automatismus zu entwickeln und die Idee aufzubauen, dass eine bestimmte Technik in Mathematik gekannt und angewandt werden kann.

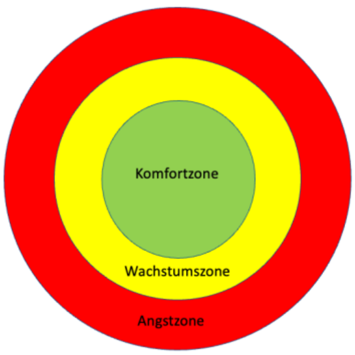


Abbildung 1: Wachstumsmodell nach Johnston-Wilder (2017); eigene Darstellung

Zu langes Verweilen in der Komfortzone verursacht aber Langeweile. Daher wäre es zielführend, sich in die Wachstumszone (gelb) zu begeben. Hier findet Herausforderung statt. Neue Ideen und Aufgaben sollen angegangen werden, aber die notwendige vermehrte Anstrengung soll als „positiver Stress" empfunden werden. Die Auseinandersetzung mit den eigenen Ängsten soll dazu beitragen, dass Barrieren und Lernhemmungen überwunden werden. Da diese Arbeit anstrengend ist und müde machen kann, darf man zwischendurch zumindest für eine Zeit lang, in den grünen Bereich zurückkehren. Die Lehrkraft kann in diesen Prozess entscheidend eingreifen und die Schüler*innen unterstützen, indem sie die Aufgabe in kleinere Schritte zerlegen hilft, für Rückfragen zur Verfügung steht, Tipps gibt usw.

Schüler*innen mit großer Angst vor Mathematik können von der Kenntnis des Wachstumsmodells (Johnston-Wilder et al., 2017, S. 67) profitieren. Es könnte hilfreich sein, ihnen das Modell der drei Zonen vorzustellen und mit ihnen zu besprechen. Die Lernenden sollen im Unterricht selbst angeben, in welcher Zone sie sich gerade befinden.

Ein*e Schüler*in erkennt gemeinsam mit der Lehrkraft, dass er*sie sich im roten Bereich befindet, wenn Angst und Panik aufkommen, die Lernenden erstarren oder ins „Nichtstun" flüchten. In der roten Zone ist normales Denken nicht mehr möglich. Während anfänglich noch die Lehrenden die Schüler*innen unterstützen, wieder in die gelbe Zone zurückzukehren, sollen diese im Lauf der Zeit durch Selbstwirksamkeit Strategien entwickeln, um in die gelbe Zone zurückzukehren. Diese können beispielsweise durchatmen, sich sagen, dass Fehler dazu gehören, man aus ihnen lernen, über den Fehler sprechen kann usw. Auch kollaborative Arbeit mit Mitschüler*innen kann zur Rückkehr in die gelbe Zone beitragen.

Verweilen Lernende lange in der roten Zone, kann es zur Entstehung von erlernter Hilflosigkeit kommen, worunter man die aufgrund von negativer Erfahrung entwickelte Überzeugung versteht, die Fähigkeit zur Veränderung der eigenen Lebenssituation verloren zu haben und für diesen Zustand selbst verantwortlich zu sein. Symptome dafür sind motivationale, kognitive und emotionale Defizite, die letztlich wieder zu Angst und Stress bis hin zu Depressionen führen können. Im Mathematikunterricht kann sich erlernte Hilflosigkeit zum Beispiel dadurch äußern, dass ein*e Schüler*in sich für mathematisch unfähig hält. Schreibt er*sie dann doch eine gute Note auf eine Schularbeit, wird das auf reines Glück (extrinsisch) geschoben. Bei Misserfolgen hingegen bezieht er*sie diesen jedoch sehr stark auf die eigene Person und auf mangelnde Fähigkeiten (intrinsisch). Dieses Denken kann dazu führen, dass diese Person im Unterricht nicht mehr aufpasst und beginnt, das Fach zu meiden. Damit startet ein Kreislauf, in dem die im Mathematikunterricht geforderten Leistungen tatsächlich nicht mehr erbracht werden können.

Um als Lehrperson diesen Kreislauf zu durchbrechen, müssen die Probleme konkret angesprochen werden. Die Strategie dahinter ist, dass sich der*die Lernende irgendwann mit positivem Denken wieder selbst Mut machen kann. Die Lehrkraft kann durch Wiederholen von bereits vorhandenem Wissen dem*der Schüler*in die sehr wohl vorhandene Selbstwirksamkeit (vgl. 2.1) wieder bewusst machen. Mit kleinen Schritten kann dann im Lernstoff vorangegangen werden, wobei sich der*die Schüler*in genau beobachten soll. Mit Hilfe der Selbstreflexion können so die Erwartungen an sich selbst wieder gesteigert und die verzerrte Selbstwahrnehmung richtiggestellt werden (Johnston-Wilder et al., 2017, S. 65).

3 Motivationsfördernder Mathematikunterricht

Da die Idealform von Motivation, die sogenannte „intrinsische Motivation“, das heißt, dass Schüler*innen von sich aus motiviert sind, alles zu lernen, nur selten vorkommt, liegt es an den Lehrenden, passende Lerngelegenheiten zu schaffen, um Lernen anzuregen. Nach Posamentier (1992, S. 8) lassen sich verschiedene Methoden festmachen, mit denen es gelingen kann, Lernende zur Beschäftigung mit Mathematik zu motivieren. So können beispielsweise das Aufzeigen einer Lücke im Wissen, das Präsentieren einer Herausforderung oder unterhaltsamer Mathematik, wie Rätsel, Zaubereien etc., der Reiz mathematischer Kuriositäten sowie das Erzählen einer passenden Geschichte Interesse wecken. Das Erkennen der Nützlichkeit eines Gebiets für das gegenwärtige oder zukünftige Leben der Lernenden in Ausbildung, Beruf aber auch im sozialen Umfeld kann unterstützend wirken. Schließlich können vom Lehrer produzierte oder mitgebrachte, vorbereitete Materialen hilfreich sein, um die Bereitschaft für die Auseinandersetzung mit einem neuen Thema zu steigern, wie an folgendem Beispiel aus dem Unterricht einer 4. Klasse der Sekundarstufe I gezeigt wird.

3.1 Praxiseinblick Expertenpuzzle

Um das Thema „Oberfläche und Volumen von Drehzylinder und -kegel“ zu erarbeiten, wurden die Lernenden einer 8. Schulstufe AHS in Stammgruppen zu vier Schüler*innen eingeteilt. Aus diesen bildeten sich für die Erarbeitungsphase Expertengruppen, die jeweils einen der Körper bezüglich Volumina oder Oberfläche näher untersuchen sollten. Gruppe 1 wurde durch Fragen angeleitet, ausgehend von den aus dem vorangegangenen Unterricht bekannten Volumsberechnungen für Prismen, Überlegungen für die Berechnung des Volumens eines Zylinders anzustellen, wobei ein Geogebra Applet (https://www.geogebra.org/m/RKmmaa5m#material/PsNTKYwZ), das mittels Schieberegler zur Variation der Ecken eines Prismas eine Annäherung an einen Zylinder anregt, eine gute Unterstützung bot. Jede der Gruppen erhielt im Anschluss an die Beobachtungen und eigenen Überlegungen die Aufgabe, eine Formel zu finden und ein Beispiel, an dem die gefundene Formel den Mitgliedern der anderen Gruppen erklärt werden kann.

Abbildung 2: Arbeiten mit dem Geogebra Applet (Foto: Martina Müller)

Gruppe 1 und 2 kommunizierten bereits in der Erarbeitungsphase, da den Lernenden beim Experimentieren mit den „Schüttkörpern“ (Foto 1, 2 und 3 in Abbildung 3) der Zusammenhang über die Verhältnisse der Volumina schnell klar war. Die Erkenntnisse der Gruppe 1, die sich mit dem Zylindervolumen befasste, unterstützten Gruppe 2 beim Auffinden einer Volumsformel für den Drehkegel. Interessant war auch, dass die Lernenden gut kooperierten und bereit waren, ihre Kenntnisse zu teilen.

Abbildung 3: Arbeit in den Gruppen (Fotos: Martina Müller)

Gruppe 3 war mit der Formel für die Oberfläche eines Drehzylinders befasst und konnte die im vorangegangenen Unterricht erfolgte Vermittlung von Kreisumfang und -fläche gut zur Herleitung einer Formel nutzen. Mehr Unterstützung (mittels Tippkarten) benötigte Gruppe 4, die am Weg zur Oberflächenformel für den Drehkegel mit der Berechnung des Mantels vor einer schwierigeren Herausforderung stand. Letztendlich konnten alle Experten nach der Rückkehr in die Stammgruppen die Formeln mit Beispielen gut an die weiteren Gruppenmitglieder vermitteln. Bei den Beispielen erfolgten in keinem Fall explizite Rechnungen, es wurden vielmehr Bilder und Sachsituationen beschrieben. In der Plenumsrunde zeigte sich weiters, dass keine der Gruppen Formeln durch Herausheben vereinfacht hatte, wie es in Schulbüchern häufig zu finden ist.

4 Resümee und Ausblick

In der Folgestunde wurden die Lernenden in einer Übungsphase mit Aufgaben konfrontiert, die eine Anwendung der zuvor gelernten Formeln erforderten, gleichzeitig jedoch eine fallspezifische Differenzierung verlangten. So musste beispielsweise der Materialaufwand einer nach oben offener Tonne ermittelt werden, was eine Adaption der Oberflächenformel des Zylinders erforderte. In der Unterrichtsgruppe, die die Formel durch Zusammensetzen der Teilflächen eigenständig erarbeitet und nicht herausgehoben hatte, erfolgte die Lösung in allen Fällen fehlerfrei, ohne fälschlicherweise eine zweite Kreisfläche hinzuzurechnen. In einem an die Schüler*innen ausgegebenen Fragebogen gaben diese zu einem hohen Prozentsatz an, Formeln, die sie selbst hergeleitet hatten, besser zu behalten. Die die Klasse unterrichtende Lehrperson zeigte sich in einem abschließenden Interview überrascht, wie viele Beiträge und Interaktionen von sonst introvertierten und stillen Schüler*innen zu beobachten waren. Die gesamte Unterrichtssequenz war durch konzentriertes, kooperatives Arbeiten und einen hohen Anteil kommunikativer Prozesse der Lernenden untereinander gekennzeichnet. Durch die Möglichkeiten, die die von der Lehrperson bereitgestellte Lernumgebung bot, die Fragestellungen eigenständig bearbeiten und Lösungen präsentieren zu können, erlebten sich die Schüler*innen als Akteur*innen des Lernprozesses. Sie erfuhren Selbstwirksamkeit, die zur Entwicklung eines positiven Selbstkonzepts beiträgt, das in weiterer Folge Freude am „Mathematik treiben" begünstigt.

Literatur

Ashcraft, M. H. (2002). Math Anxiety: Personal, Educational, and Cognitive Consequences. *Current Directions in Psychological Science*, *11*(5), pp. 181–185. https://doi.org/10.1111/1467-8721.-00196

Bandura, A. (1993). *Perceived Self-Efficacy in Cognitive Development and Functioning. 28*, pp. 117-148.

Deci E., Ryan L., D. (2000). *The "What" and "Why" of Goal Pursuis: Human Needs and the Self-Determination of Behavior.* In: Psychological Inquiry 11(4), pp. 227–268. https://www.researchgate.net/publication/284515746_Deci_and_Ryan's_self-determination_theory_A_view_from_the_hierarchical_model_of_intrinsic-_and_extrinsic_motivation

Frick, J. (2019). *Die Kraft der Ermutigung: Grundlagen und Beispiele zur Hilfe und Selbsthilfe* (3., überarbeitete und ergänzte Auflage). Hogrefe. https://doi.org/10.1024/85747-000

Hasselhorn, M., & Gold, A. (2009). *Pädagogische Psychologie. Erfolgreiches Lernen und Lehren.* Kohlhammer.

Heckhausen, J., & Heckhausen, H. (Hrsg.). (2018). *Motivation und Handeln* (5., überarbeitete und erweiterte Auflage). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53927-9

Johnston-Wilder, S., Lee, C. S., & Pimm, D. (Hrsg.). (2017). *Learning to teach mathematics in the secondary school: A companion to school experience* (4th edition). Routledge.

Laskowski, A. (o. J.). *Was den Menschen antreibt. Entstehung und Beeinflussung des Selbstkonzeptes.* Campus.

Nardi, E., & Steward, S. (2003). Is Mathematics T.I.R.E.D? A Profile of Quiet Disaffection in the Secondary Mathematics Classroom. *British Educational Research Journal*, *29*(3), pp. 345–366. https://doi.org/10.1080/01411920301852

Posamentier, A. (1992). *Motivation im Mathematikunterricht. Eine vernachlässigte Kunst. 50*, S. 6–11.

Tulis, M., Grassinger, R., & Dresel, M. (2011). *Motivation, Selbstregulation und Leistungsexzellenz* (M. Dresel & L. Lämmle, Hrsg.). LIT-Verl.

10. Jg. (2023), Nr. 2: More of Mathematics
Konferenzband zum Tag der Mathematik

Größen und Maße

Messen – Schätzen – Umwandeln

Robert Schütky[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1173

Zusammenfassung

Größenvorstellungen und Verständnis für konzeptuelle Prinzipien von Messverfahren sind zentrale Inhalte des Mathematikunterrichts mit großer Relevanz für das Mathematiklernen und die Arbeitswelt. Das hier vorgestellte didaktische Stufenmodell und die speziell für die Größen und Maße entwickelten Testinstrumentarien, die Reihe der Größen und Einheiten Tests (GETs), bieten dabei einen Rahmen für den Größen-Unterricht in der Schule und die Möglichkeit gezielter Diagnostik und Förderung.

Größen, Maße, Stufenmodell

1 Relevanz von Größen und Maßen in Unterricht und Alltag

Größen (wie die in der Grundschule behandelten physikalischen Größen Länge, Fläche, Raum, Masse und Zeit sowie die bürgerliche Größe Geld) stellen eine Beziehung zwischen Mathematik und Realität her (Griesel, 1997, S. 259) und helfen Kindern so die abstrakte Mathematik verständlich zu machen (Smith, Van den Heuvel-Panhuizen & Teppo, 2011).
Sie sind das Resultat eines Abstraktionsvorganges, bei dem reale Gegenstände bzgl. eines Vergleichsaspekts klassifiziert werden. Objekten, wie einem Bleistift, einer Schnur oder einem Unterarm, können durch einen Messprozess beispielsweise Längen zugeordnet werden. Das Ergebnis einer solchen Längenmessung kann dann als eine Größe (die Länge) geschrieben mittels Maßzahl und Maßeinheit dargestellt werden (Kirsch, 1970, zitiert nach Nührenbörger, 2002, S. 12).
International herrscht Einigkeit darüber, dass Größen und ihre Messprozesse wichtige elementare mathematische Kompetenzen darstellen, die allerdings offenbar nur ungenügend beherrscht werden. Das Fehlen der den Messverfahren zugrunde liegenden konzeptuellen Prinzipien beeinträchtigt dabei die Fähigkeit, fortgeschrittenere mathematische und wissenschaftliche Inhalte zu erlernen und zu verstehen (Smith, Van den Heuvel-Panhuizen & Teppo, 2011). Dies wirkt sich auch auf den Zugang zu wichtigen Arten qualifizierter Arbeit –

[1] Private Pädagogische Hochschule Augustinum, Lange Gasse 2, 8010 Graz.
E-Mail: robert.schuetky@pph-augustinum.at

sowohl professioneller als auch nicht professioneller Art aus, wie Marterer und Härtel in ihrer im Jahr 2017 erschienen Studie darlegen (Marterer & Härtel, 2017).
Grassmann et al. (2005) bezeichnet das Thema Größen in der Grundschule deshalb als einen zentralen Inhalt des Mathematikunterrichts. Auch Franke und Ruwisch (2010) sehen durch die Größen und das Messen die Verbindung von Zahlen und Operationen mit Raum und Formen vermittelt und bezeichnen gesicherte Größenvorstellungen als Grundlage für das erfolgreiche Bearbeiten von Sachaufgaben.

1.1 Entwicklungspsychologische Grundlagen von Messkonzepten

Piaget zeigt in seinen Arbeiten über Kinder-Längenmesskonzepte (Piaget et al., 1974) u.a. die Relevanz des Verständnisses der Konstruktion und Koordination einer Einheitslänge. Obwohl seine Erkenntnisse von Hiebert (1984) und Schmidt & Wieser (1986) teilweise widerlegt wurden – so können Kinder Messideen auch dann erwerben, wenn sie bei traditionellen piagetischen Aufgaben versagen – gilt Piaget nach wie vor als Pionier der Messwissenschaft (Nührenbörger, 2004).
Weiterhin sind drei zentrale Aspekte auch in neuen theoretischen Modellen von zentraler Bedeutung (Piaget, 1967):

- Invarianz: Die Länge eines Objekts ist unabhängig von seiner Lage (z. B. gestreckt, wellen- oder bogenförmig) erhalten.
- Transitivität: Ist ein Objekt A gleich lang wie ein Objekt B und Objekt B genauso lang wie Objekt C, dann ist auch Objekt A so lang wie Objekt C.
- Einheiten eines Ganzen bilden: Die Länge eines Objekts kann durch die Länge eines weiteren Objekts dargestellt werden. So kann die Länge einer 2 m langen Schnur aus fünf 40 Zentimeter langen Stäben dargestellt werden.

Für weiterführende Literatur zur Entwicklung von Größenvorstellungen und dahinterstehenden Modellen wird an Halford (1993) und Battista (2006) verwiesen.

1.2 Größen und Maße im Lehrplan

In den Lehrplänen für die Volksschule (2023) und die (AHS) Unterstufe (2023) findet man in Abhängigkeit von Größe und Schulstufe, stets die folgenden Fähigkeiten und Fertigkeiten:

- *Vergleichen*, *Klassifizieren* und *Ordnen*. Beim Vergleichen werden zwei Objekte in Bezug auf eine Eigenschaft in Relation gesetzt „Objekt A ist länger als Objekt B“. Das Klassifizieren teilt Objekte gleicher Größe in Äquivalenzklassen ein „Objekt A ist gleich lang wie Objekt B“ und beim Ordnen werden Objekte hinsichtlich einer Eigenschaft (z.B. der Länge) der Größe nach angeordnet „Objekt A ist am kürzesten; Objekt B ist länger als Objekt A, aber kürzer als Objekt C; Objekt C ist am längsten“.
- *Größenvorstellungen im Alltag.* Wissen über Größenverhältnisse in der Alltagswelt der Kinder – z.B., dass ein dickes Buch schwerer ist als ein Bleistift.

- *Erlernen des Messprozesses:* beginnend bei *willkürlich gewählten Maßeinheiten zum Messen* „Der Tisch ist so lang wie 15 Bleistifte" bis hin zum *Messen* mit standardisierten Maßeinheiten „Ich bin 25 kg schwer".
- *Anwendung in Sachaufgaben* – Mathematikaufgaben mit Bezug zum Alltag.
- *Modellvorstellungen* – z.B. ein Kilogramm = ein Liter Wasser.
- *Umwandlungen* („1 m = 10 dm").
- *Schätzen*.

2 Didaktisches Konzept

Es existieren mehrere didaktische Modelle für den Größenunterricht, allen voran das didaktische Stufenmodell und seine Modifizierungen (Baireuther, 1999; Franke, 2003; Radatz, Schipper, Dröge & Ebeling, 1998; Ruwisch, 2008; Schütky & Haider, 2018), das Modell von Zöllner & Reuter (Zöllner, 2020) oder das Drei-Säulen-Modell von Baireuther (Rechtsteiner, 2018).

2.1 Stufenmodell

In Abbildung 1 findet sich eine feingliedrige Darstellung, wie sie bei Schütky und Haider (2018) zu finden ist. Dieses modifizierten Stufenmodell soll einen Rahmen schaffen, an dem sich die Lehrpersonen orientieren können. Ein Schwerpunkt liegt dabei bei verinnerlichten Größen-Vorstellungen, sogenannten Stützpunkten (Schütky & Schaupp, 2020a), die die Grundlage für das kognitive Schätzen nach Brand (Brand, 2003) darstellen (Heid, 2018).

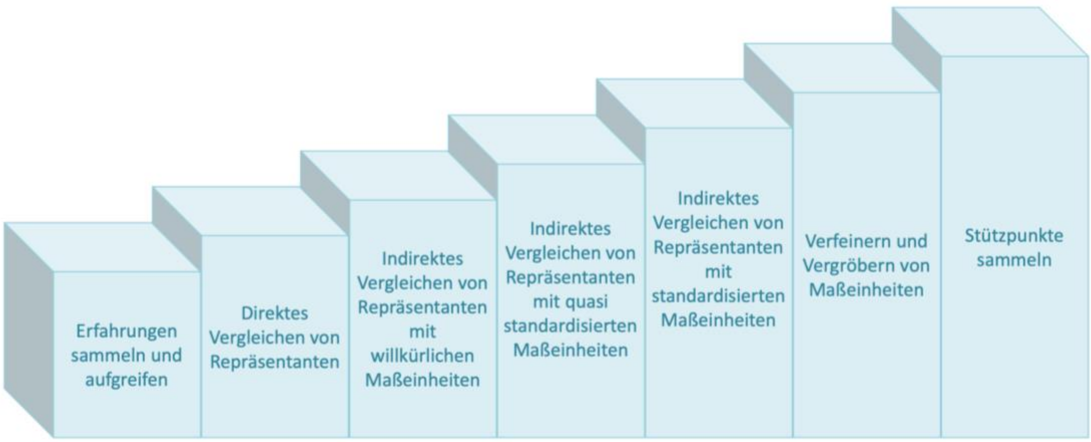


Abbildung 1: Didaktisches Stufenmodell nach Schütky und Haider (2018).

Den meisten Versionen des Stufenmodells gemein sind die folgenden zentralen Elemente:

- Erfahrungen sammeln und aufgreifen
- Messprozess erlernen
- Umwandeln: Verfeinern und Vergröbern von Maßeinheiten
- Stützpunkte

2.1.1 Beschreibung der Stufen des Stufenmodells

Im Folgenden werden die einzelnen Stufen des Stufenmodells anhand der Erarbeitung der Größe Länge beschrieben (Schütky & Haider, 2018). Auch in höheren Schulstufen ist es empfehlenswert, grundsätzlich alle Stufen des Stufenmodells zu durchlaufen. Einerseits dient dies der Wiederholung und der Einstimmung auf das neue Thema, andererseits ist noch nicht bei allen Schüler*innen jede einzelne Stufe, die es braucht, um ein echtes Verständnis zu entwickeln, vollkommen gefestigt. Nicht selten kommt es beispielsweise vor, dass zwar mit einer Größe schon seit mehreren Jahren gerechnet wird, der dahinterstehende Messprozess aber nicht verstanden wurde. Das Operieren findet in so einem Fall also rein auf der symbolischen Ebene statt, eine sprachliche Darstellung oder gar die Handlungsebene sind nicht verinnerlicht. Wie schnell die einzelnen Ebenen durchschritten werden können und auf welchem Niveau, ist stark von den einzelnen Schüler*innen abhängig und kann nur von der Lehrperson individuell begleitet werden.

2.1.2 Erfahrungen sammeln und aufgreifen

Die Einführung neuer Größen beginnt mit einer Aufgabenstellung in der Klasse, bei der bereits vorhandenes Wissen der Kinder gesammelt wird. Hauptgrund dafür ist die Schaffung von Bewusstsein für das neue Thema bzw. die Verknüpfung zu bereits vorhandenem Vorwissen. Dies soll vorrangig der Motivation dienen. Durch gezielte Aufgaben und Experimente als Denkanstöße sollen die Kinder dabei zum weiterführenden Kapitel „Messprozess erlernen – direktes Vergleichen von Repräsentanten" hingeführt werden. In höheren Schulstufen kann sich dieses „Erfahrungen Sammeln und Aufgreifen" auch auf bereits in der Vergangenheit erarbeitete Stufen des Stufenmodells beziehen, die folglich nicht mehr explizit durchschritten werden müssen.

2.1.3 Messprozess erlernen

Messen ist mehr als das Ablesen einer Skala auf einem Messinstrument. Hier sollen die Kinder an die Grundprinzipien des Messens herangeführt werden. Beginnend beim direkten Vergleichen von Repräsentanten („der Bleistift ist länger als der Radiergummi") stoßen sie dabei schnell auf Probleme, wenn sehr große, unbewegliche Gegenstände miteinander verglichen werden sollen. Dabei entdecken sie das indirekte Vergleichen von Repräsentanten. Hier wird ein weiterer Gegenstand benutzt, um nun eine echte erste Messung („Wie oft hat der Stift der Länge nach im Klassenzimmer Platz?“) durchzuführen. Anfangs werden dafür beliebige Gegenstände als Messinstrument bzw. als Maßeinheit verwendet. Schon bald stoßen die Kinder dabei allerdings auf Probleme mit der Vergleichbarkeit ihrer Messungen. Die Kinder erkennen die Notwendigkeit einer einheitlichen Maßeinheit, auf die sich alle in der Klasse beziehen können. Aber wie sieht es nun aus, wenn man die eigenen Ergebnisse mit anderen Klassen oder gar anderen Schulen oder anderen Ländern vergleichen möchte? An dieser Stelle kann der Meter als eine normierte Maßeinheit eingeführt werden, auf die sich (fast) alle Menschen geeinigt haben.

2.1.4 Umwandeln: Verfeinern und Vergröbern von Maßeinheiten

Mit einer ein Meter langen Schnur können nun große Gegenstände in der Klasse oder Teile des Schulgebäudes vermessen werden. Doch dabei stoßen die Kinder bereits auf weitere Schwierigkeiten. Der Meter passt nicht genau 5-mal in die Klasse, sondern 5-mal und dann nur mehr zur Hälfte. So entdecken die Kinder die Notwendigkeit einer feineren Unterteilung des Meters. Schließlich kann der Zentimeter als hundertster Teil eines Meters eingeführt werden.

2.1.5 Stützpunkte

Die Kinder können jetzt unterschiedliche Gegenstände aus ihrer Alltagswelt abmessen und sich so Stützpunkte aufbauen. Das Erarbeiten von Stützpunkten kann z. T. auch als Hausübung geschehen. Die Ergebnisse werden anschließend in der Klasse diskutiert. Fehlvorstellungen können aufgedeckt und besonders gute Beispiele hervorgehoben werden. Stützpunkte sind allerdings etwas sehr Individuelles. Jedes Kind braucht seine eigenen. Man muss sich innerhalb der Klasse deswegen nicht zwangsläufig auf ein Musterbeispiel einigen. Wichtiger ist, dass jedes Kind für sich Stützpunkte aus seinem Alltag besitzt. Bevorzugt sollen Stützpunkte durch eigenes Vermessen von Gegenständen gefunden werden. Die Ergebnisse können in einem eigenen „Stützpunkteheft“ festgehalten werden.

2.2 Umwandlungen

Nach wie vor stark mit dem Größen-Unterricht assoziiert ist das Umwandeln, also Aufgaben der Form „1 m = … cm“. Schipper (2009) hingegen erachtet die Entwicklung von Größenvorstellungen (Stützpunkten) als vorrangig und sieht das Umwandeln von und Rechnen mit Größen als nachgeordnet.
Auch Lassnitzer und Gaidoschik (o. D.) sehen in Anbetracht der vielen von ihnen formulierten mathematischen Voraussetzungen des Umwandelns, dass oft viel zu früh damit begonnen wird und plädieren daher für ein Aufschieben des Umwandelns auf höhere Klassenstufen.

2.2.1 Mathematische Voraussetzungen für das Umwandeln

- *Grundlegende Einsichten in das Dezimalsystem*. Verständnis des „Bündelungsprinzips“, d.h.: sie müssen wissen, dass 1 Zehner genau 10mal so viel ist wie 1 Einer, 1 Hunderter genau 10mal so viel wie 1 Zehner, aber 100mal so viel wie 1 Einer usw.
- *Verständnis für „immer wieder die gleiche Einheit nehmen“* (siehe 3. Aspekt bei Piaget in 1.1).
- *Modellvorstellungen (Stützpunkte) der wichtigsten Maßeinheiten besitzen.*
- *Grundgedanke „vom kleinen mehr, vom größeren weniger“.*
- *Systematik der dezimalen Maßeinheiten – Erarbeitung der Tabellen*. Analogie der dezimalen Maßeinheiten zu den Stellen des Dezimalsystems.

Daraus ergibt sich das Umwandeln als mehrschrittiges, geplantes Vorgehen:

- *1. Schritt: Klarheit über Aufgabenstellung*
  Eine beliebige Umrechenaufgabe, z.B. „600 cm = … dm“, muss auf folgende Weise verstanden werden: „Eine Strecke wurde mit 600 cm gemessen. Ich will nun herausfinden, wie viele dm dieselbe Strecke lang ist.“
- *2. Schritt: Verhältnis der Einheiten überprüfen*
  Wandelt man in eine kleinere Einheit um, oder in eine größere? Wandelt man in eine kleinere Einheit um, braucht man von dieser mehr. Wandelt man hingegen (wie in diesem Beispiel) von einer kleineren in eine größere Einheit um, braucht man von dieser weniger.
- *3. Schritt: Was heißt das für die Zahl?*
  Wenn man weiß, dass man von den dm weniger braucht, folgt, dass die Anzahl (hier: 600) verkleinert werden muss. Der Rest ist wiederum Anwendung des Stellenwertverständnisses: stehen die Einheiten nebeneinander, geht es um einen „Zehner-Schritt“, also um eine Stelle: 600 cm = 60 dm.

3 Der Größen und Einheiten Test (GET)

Testinstrumentarien sind hilfreich, um sicher erhöhten Förderbedarf bei einzelnen Kindern feststellen zu können und gezielte Maßnahmen zu setzen. Für die Größen und Maße gibt es dazu seit 2020 die Reihe der Größen und Einheiten Tests (GETs) von Schütky und Schaupp (2020a-g). Ziel bei der Konstruktion des Größen und Einheiten Tests (GET) war es, ein Instrumentarium zu schaffen, das für die ersten neun Schulstufen sehr ausführlich Fähigkeiten und Fertigkeiten im Zusammenhang mit Größen und Maßen erfasst, wie sie auch in Lehrplänen abgebildet sind, wobei ein Schwerpunkt bei verinnerlichten Größen-Vorstellungen, sogenannten Stützpunkten, liegt.
Der GET erfasst Größenverständnis anhand von insgesamt fünf Skalen (GET 0+ bis GET 3+) für die Schulstufen 1 – 4, bzw. sechs Skalen (GET 4+ bis GET 6++) für die Schulstufen 5 – 9 mit jeweils vier bis zwölf Items, die sich den Größen Länge, Zeit, Geld, Masse, Raum und ggf. Fläche zuordnen lassen mit Cronbachs-Alpha-Werte in den Gesamtskalen zwischen $\alpha = 0.84$ bis 0.93.

3.1 Beispielitems

Abbildungen 2 bis 7 zeigen typische Single-Choice Items des GET 0+ (Größenvorstellungen Alltag), GET 1+ (Messen), GET 3+ (Modellvorstellungen), GET 5+ (Umrechnen) und GET6++ (Modellvorstellungen) verschiedener Schulstufen und setzen diese in Bezug zum Lehrplan.

Abbildung 2: Beispielitem des GET 0+ (Masse, Größenvorstellungen Alltag), (Schütky & Schaupp, 2020a).

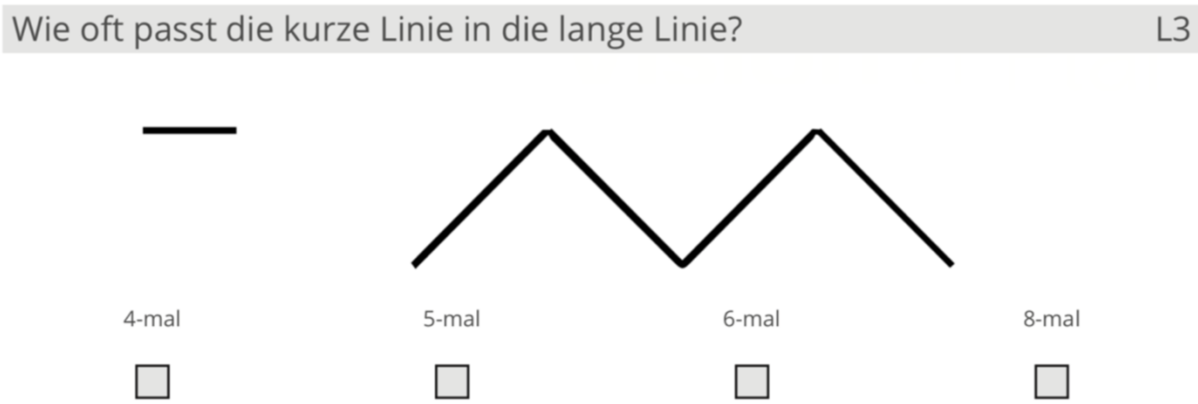


Abbildung 3: Beispielitem des GET 1+ (Länge, Messen), (Schütky & Schaupp, 2020b).

Abbildung 4: Beispielitem des GET 3+ (Zeit, Modellvorstellungen), (Schütky & Schaupp, 2020d).

Abbildung 5: Beispielitem des GET 5+ (Fläche, Umrechnen), (Schütky & Schaupp, 2020f).

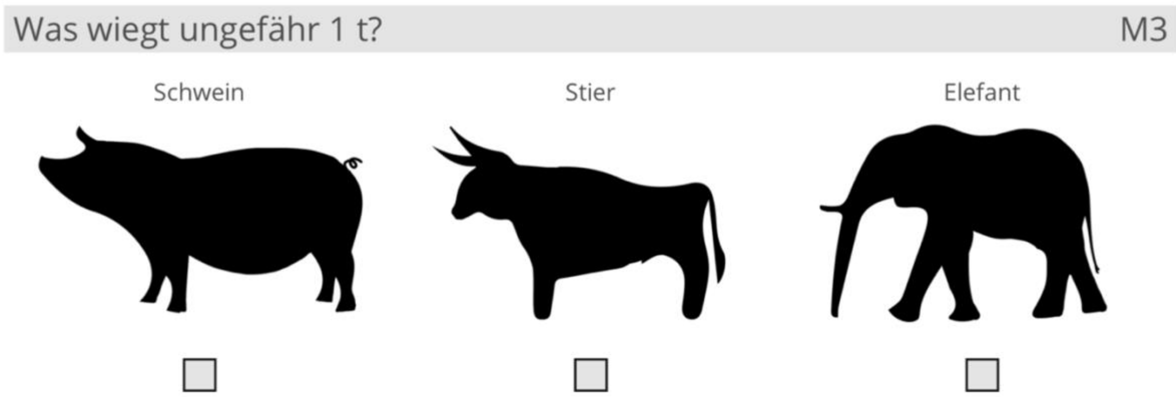


Abbildung 6: Beispielitem des GET 6++ (Masse, Modellvorstellungen), (Schütky & Schaupp, 2020g).

4 Schlussbemerkung

Wie auch von Lassnitzer und Gaidoschik (o. D.) angemerkt, sollte der Schwerpunkt beim Größen-Unterricht in den ersten vier Schuljahren beim Messen, Modellvorstellungen, Stützpunkten und dem Schätzen liegen. Ziel ist es, das Messprinzip zu verstehen „Wie oft passt eine kleinere Einheit in das zu messende Objekt?“, Messgeräte kennenzulernen, Maßeinheiten untereinander zu vergleichen und durch den selbständigen Aufbau eigener Stützpunkte die Ausgangslage für das so wichtige Schätzen zu legen.

Literatur

Baireuther, P. (1999): *Mathematikunterricht in den Klassen 1 und 2*. Donauwörth: Auer.

Battista, M. T. (2006). Understanding the Development of Students’ thinking about Length. *Teaching Children Mathematics*, *13*(3), pp. 140–146.

Brand, M., Kalbe, E, Fujiwara, E., Huber, M. & Markowitsch, H. J. (2003). Cognitive estimation in patients with probable Alzheimer's disease and alcoholic Korsakoff patients. *Neuropsychologia*, *41*, pp. 575–584.

Franke, M. (2003): *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule.* Heidelberg: Spektrum.

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (2. Aufl.). Heidelberg: Springer Akademischer Verlag.

Grassmann, M., Klunter, M., Köhler, E., Mirwald, E. & Raudies, M. (2005). *Kinder wissen viel - auch über die Größe Geld? Teil 1* (I. für G. M. Universität Potsdam, Hrsg.). Universitätsverlag Potsdam.

Griesel, H. (1997). Zur didaktisch orientierten Sachanalyse des Begriffs Größe. *Journal für Mathematik Didaktik,* 18(4), S. 259–284.

Lehrplan der Volksschule. (2023, Januar): https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA-_2023_II_1/Anlagen_0012_E1BFECE6_7E8B_4ACF_AEFD_3EC871222138.pdfsig, abgerufen am 24. März 2023.

Lehrplan der AHS. (2023, Januar): https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2023_II_-1/Anlagen_0012_E1BFECE6_7E8B_4ACF_AEFD_3EC871222138.pdfsig, abgerufen am 24. März 2023.

Lassnitzer, E. & Gaidoschik, M. (o. D.). *Größen: Messen – Schätzen – Umwandeln – Das Recheninstitut zur Förderung mathematischen Denkens*. http://www.recheninstitut.at/mathematische-lernschwierigkeiten/fordertips/umwandeln-von-maseinheiten/, abgerufen am 24. März 2023.

Halford, G. S. (1993). *Children's Understanding: The Development of Mental Models*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Heid, L.-M. (2018). *Das Schätzen von Längen und Fassungsvermögen. Eine Interviewstudie zu Strategien mit Kindern im 4. Schuljahr.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hiebert, J. (1984). Why do some children have trouble learning measurement concepts? *Arithmetic Teacher, 31*(7), pp. 19–24.

Nührenbörger, M. (2002). *Denk- und Lernwege von Kindern beim Messen von Längen.* Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Nührenbörger, M. (2004). Children's measurement thinking in the context of length. In G. Törner, R. Bruder, N. Neill, A. Peter-Koop & B. Wollring (Hrsg.), *Development in mathematics education in German-speaking countries. Selected papers from the annual conference on didactics of mathematics, Ludwigsburg, 2001,* pp. 95–106. Hildesheim: Franzbecker.

Smith, J. P., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Teppo, A. R. (2011). Learning, teaching, and using measurement: Introduction to the issue. *ZDM Mathematics Education, 43*(5), pp. 617–620.

Marterer, M. & Härtel, P. (2017). *Die Erhebung – Anforderungen an EinsteigerInnen in die berufliche Bildung.* Graz: Industriellenvereinigung Steiermark und WKO Steiermark.

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1974). *Die natürliche Geometrie des Kindes*. Stuttgart: Klett.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1998): *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Rechtsteiner, C. (2018). Größenvorstellungen entwickeln. *Die Grundschulzeitschrift, 312,* S. 6–11.

Ruwisch, S. (2008): Gute Aufgaben für die Arbeit mit Größen. Erkundungen zum Größenverständnis von Grundschulkindern als Ausgangsbasis. In S. Ruwisch, A. Peter-Koop, (Hrsg.): *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. 4. Aufl. Offenburg: Mildenberger, S. 211–227.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.[Neuaufl.]. *Ser. A. Braunschweig: Schroedel*.

Schmidt, S. & Weiser, W. (1986). Zum Maßzahlverständnis von Schulanfängern. *Journal für Mathematik- Didaktik, 7* (2/3), S. 121–154.

Schütky, R. & Haider, R. (2018). *Didaktik der Größen und Maße*. Graz: LogoMedia-Verlag.

Schütky, R. & Schaupp, H. (2020a). *Größen und Einheiten Test GET 0+ (GET 0+). Für Ende des Kindergartens und Anfang der 1. Schulstufe.* Graz: LogoMedia-Verlag.

Schütky, R. & Schaupp, H. (2020b). *Größen und Einheiten Test GET 1+ (GET 1+). Für Ende der 1. und Anfang der 2. Schulstufe.* Graz: LogoMedia-Verlag.

Schütky, R. & Schaupp, H. (2020c). *Größen und Einheiten Test GET 2+ (GET 2+). Für Ende der 2. und Anfang der 3. Schulstufe.* Graz: LogoMedia-Verlag.

Schütky, R. & Schaupp, H. (2020d). *Größen und Einheiten Test GET 3+ (GET 3+). Für Ende der 3. und Anfang der 4. Schulstufe.* Graz: LogoMedia-Verlag.

Schütky, R. & Schaupp, H. (2020e). *Größen und Einheiten Test GET 4+ (GET 4+). Für Ende der 4. und Anfang der 5. Schulstufe.* Graz: LogoMedia-Verlag.

Schütky, R. & Schaupp, H. (2020f). *Größen und Einheiten Test GET 5+ (GET 5+). Für Ende der 5. und Anfang der 6. Schulstufe.* Graz: LogoMedia-Verlag.

Schütky, R. & Schaupp, H. (2020g). *Größen und Einheiten Test GET 6++ (GET 6++). Für Ende der 6. und ab Anfang der 7. Schulstufe.* Graz: LogoMedia-Verlag.

Zöllner, J. (2020). *Längenkonzepte von Kindern im Elementarbereich.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

R&E SOURCE

10. Jg. (2023), Nr. 2: More of Mathematics
Konferenzband zum Tag der Mathematik

Teacher Noticing – Wie nehme ich (meinen) Unterricht wahr?

Anregungen aus der Noticing-Forschung für Hospitationen und die eigene Unterrichtsreflexion

Kata Sebök[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1174

Zusammenfassung

Teacher Noticing – die professionelle Wahrnehmung von Lehrenden – hat sich zu einem zentralen Begriff in der mathematikdidaktischen Forschung entwickelt. Auch für Lehrpersonen in der Schule bietet das Konzept Chancen, den eigenen Blick auf das Unterrichtsgeschehen in den Mittelpunkt zu stellen und differenziert zu analysieren. So können Erkenntnisse über bewusste und unbewusste Beobachtungsschwerpunkte gewonnen werden. Da das Noticing von Vorwissen bzw. Vorerfahrungen und von den Überzeugungen einer Lehrperson beeinflusst wird, kann es auch hinsichtlich dieser Aspekte Einblicke bieten. Am Beispiel zweier Textvignetten wird das Potential von Noticing im Mathematikunterricht illustriert und es werden Anregungen für Lehrpersonen gegeben, die eigene professionelle Wahrnehmung zu reflektieren.

Noticing, Expertise, Überzeugungen, Weiterbildung, Reflexion

1 Teacher Noticing – Was nehmen Lehrpersonen wahr?

Dass professionelles Handeln unter anderem eine besondere Art der Wahrnehmung beinhaltet, wurde bereits in den Anfängen der Expertiseforschung mehrfach belegt (deGroot 1965; Chase & Simon, 1973). „Expertiseforschung“ meint dabei die Analyse der Unterschiede zwischen der Herangehensweise von Expert*innen und jener von Laien, wenn es um typische Problemstellungen eines Gebiets geht. Expert*innen gelingt es beispielsweise eher als Laien, bedeutsame Muster zu erkennen und Situationen daher hinsichtlich der zur Problemlösung relevanten Tiefenstrukturen zu untersuchen, statt auf wenig aufschlussreiche Oberflächenmerkmale fokussiert zu bleiben (Glaser & Chi, 1998).

[1] Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien
E-Mail: *kata.seboek@univie.ac.at*

Auf den Sozialbereich – insbesondere auf die Lehrtätigkeit – bezogen, entwickelte Mason (2002) ein Konzept von *Noticing* als bewusste Praxis, die man als Möglichkeit zur selbstständigen professionellen Weiterentwicklung nutzen kann.

> Jede Unterrichtshandlung hängt von der Wahrnehmung ab: wahrnehmen, was Kinder tun, wie sie antworten, das, was gesagt oder getan wird, mit Erwartungen und Kriterien abgleichen, und überlegen, was als Nächstes gesagt oder getan werden könnte.(ebd, S. 7; Übersetzung der Autorin)

Wie im obigen Zitat bereits mitschwingt, ist das Noticing für Mason dabei stets auf das Erkennen von Handlungsoptionen bezogen und zielt letztlich auf eine Unterstützung in der Wahl optimaler (Re-)Aktionen als Lehrperson ab. Bewusstes Noticing basiert dabei auf dem Fachwissen und Erfahrungsschatz der wahrnehmenden Person, erschöpft sich allerdings nicht darin.

Einerseits ist eine präzise Wahrnehmungsgabe natürlich wenig wirksam, wenn kein Hintergrundwissen und somit kein differenziertes Handlungsrepertoire abgerufen werden kann, um auf die wahrgenommene Situation zu reagieren. Andererseits würde verfügbares Fachwissen womöglich gar nicht erst angewandt, wenn adäquate Situationen für seinen Einsatz nicht erkannt werden. So könnte ein Fokus auf Klassenführung und Zeitmanagement unter Vernachlässigung der mathematischen und mathematikdidaktischen Elemente eines Unterrichtsgesprächs darauf zurückzuführen sein, dass „das Mathematische“ an der Situation nicht erkannt wird (Mathematical Sciences Education Board, 2001). Das kann einerseits der handelnden Lehrperson im Moment des Unterrichtens geschehen, ist aber auch bei der retrospektiven Analyse von Videovignetten oder bei der Nachbesprechung von Unterrichtshospitationen mit Mentor*innen häufig der Fall (Strong & Baron, 2004). In den Textvignetten am Ende des Artikels werden zwei solche „verpassten mathematischen Momente“ dargestellt und das Potential eines möglichst umfassenden Noticings illustriert.

Aufgrund dieses handlungsgeleiteten Ansatzes wird Noticing häufig als dreistufige Kompetenz konzeptualisiert, welche die reine sensorische, selektive Wahrnehmung, eine wissensbasierte Interpretation des Wahrgenommenen und das Treffen einer Handlungsentscheidung basierend auf dieser Interpretation umfasst.

2 Wahrnehmen, Interpretieren und Entscheidungen treffen

Sherin und van Es (2002) beschreiben drei „Aspekte“ des Noticing:

> (a) identifizieren, was an einer Unterrichtssituation wichtig oder bemerkenswert ist;
> (b) Verbindungen herstellen zwischen den Spezifika der Interaktionen in der Klasse und den allgemeinen Lehr- und Lernprinzipien, welche sie repräsentieren; und
> (c) das eigene Wissen über den Kontext verwenden, um Schlüsse aus den Interaktionen in der Klasse zu ziehen (ebd., p. 573; Übersetzung der Autorin).

Demnach umfasst Noticing sowohl die Fähigkeit, den Blick auf *Relevantes* zu lenken (ein normatives Konzept!), und dieses mithilfe seines Fachwissens (hier: Lehr- und Lernprinzipien) einzuordnen, als auch die Kompetenz, das Gesehene als Basis für weitere Überlegungen zu verwenden.
Auf eine Teilfacette des Lehrer*innenhandelns, nämlich auf die Beurteilung der mathematischen Handlungen von Lernenden bezogen, sprechen auch Jacobs et al. (2010) in ihrem Konzept des *professional noticing of children's mathematical thinking* von drei Komponenten:

a) auf die Strategien von Kindern achten
b) die Auffassungen von Kindern interpretieren
c) basierend auf den Auffassungen der Kinder entscheiden, wie man reagiert

In dieser Konzeptionalisierung ist die Fähigkeit zum Noticing bereits nahe an der Idee der Diagnosefähigkeit (Sommerhoff et al., 2022) angesiedelt. Eine professionelle Wahrnehmung ist Voraussetzung dafür, um das Verständnis von Lernenden akkurat erfassen und darauf basierend passende Unterrichtshandlungen setzen zu können.
Führt man diesen Gedanken fort, können diese Schritte der *Wahrnehmung*, *Interpretation* und *Entscheidungsfindung* auch als situationsspezifische Komponente eines allgemeinen Kompetenzmodells einer Lehrperson eingeordnet werden (Kaiser et al., 2017). „Allgemeine" Eigenschaften von Lehrenden, wie z.B. deren Fachwissen als kognitives Element oder auch affektive Charakteristika, wie beispielsweise ihre Einstellungen, wirken sich nach dieser Auffassung über diese kontextabhängigen Prozesse indirekt auf die beobachtbare Performanz im Unterricht aus.
Der Zusammenhang und die gegenseitige Einflussnahme des Noticings, der Einstellungen und Werthaltungen sowie des Vorwissens von Lehrpersonen sind ebenfalls ein zentraler Gesichtspunkt der Noticingforschung. Grundlegende Erkenntnisse werden im folgenden Unterkapitel zusammengefasst.

3 Noticing, Wissen und Überzeugungen

Mason (2002) stellt fest, dass Überzeugungen und Werthaltungen insofern wichtig sind, als dass professionelles Handeln je nachdem vorliegt, was die Standards für Professionalität in einem bestimmten Gebiet sind. Streben Lehrpersonen danach, sich einer gewissen Norm entsprechend zu verhalten, werden sie ihren professionellen Blick dahingehend schärfen: "What is considered appropriate depends on what is valued, which in turn affects what is noticed." (ebd., 2002, p. 7).
Aus der Expertiseforschung (Glaser & Chi, 1988) ist bekannt, dass umfassendes fachspezifisches Wissen mit einer ausgeprägten professionellen Wahrnehmung Hand in Hand geht. Empirisch-quantitativ ist der Zusammenhang zwischen Fachwissen und Noticing zum Teil

schwer nachzuweisen (Dreher & Kuntze, 2015; Thomas et al., 2017), allerdings ist ein gewisses Vorwissen auf theoretischer Ebene kaum wegzudenken: So stützen sich zumindest die zweiten und dritten Stufen der oben präsentierten Drei-Stufen-Modelle auf *Wissen über Interpretationsspielräume* (z.B. „Was sind plausible (Fehl-)Vorstellungen, die bei dieser Schülerin gerade auftreten könnten?“ oder auch schlicht „Welcher Schritt in dieser Argumentation ist fehlerhaft?“) bzw. *Wissen über Handlungsmöglichkeiten* („Aus welchen alternativen Erklärungen, Darstellungen, Fragen oder Beispiele zum vorliegenden Konzept kann ich wählen?“).

Umgekehrt kann bewusst praktiziertes Noticing Lehrpersonen in der Praxis ermöglichen, sich neues Wissen anzueignen und ihre Überzeugungen zu modifizieren (Scheiner, 2016). Der Mehrwert dieses aktiven Reflexionsprozesses bildet das Herzstück von Masons (2002) Vorstellung von Noticing als Tool für die eigene professionelle Weiterentwicklung. Aber auch empirisch konnte gezeigt werden, dass das Training der eigenen Wahrnehmung zu messbaren Kompetenzsteigerungen führt, die sich auch auf die Unterrichtsqualität auswirken (Santagata & Yeh, 2016; Star & Strickland, 2008; van Es & Sherin, 2008).

4 Zwei Beispiele für Noticing im Mathematikunterricht

Die folgenden beiden Textvignetten basieren auf Videovignetten aus dem Projekt AmadEUs (Ableitinger et al., 2020). Im Rahmen der Studie wurden Schüler*innen der Sekundarstufe an die Universität eingeladen, wo sie eine Unterrichtssequenz lang von einer Kleingruppe von Studierenden unterrichtet wurden. Die Unterrichtsplanungen der Studierenden waren dabei auf das Vorwissen der Lernenden abgestimmt und die Studierenden hatten im Vorhinein Feedback zu ihrer Planung erhalten.

Die Videovignetten selbst böten selbstverständlich einen noch reichhaltigeren Boden für unterschiedlichste Beobachtungsschwerpunkte, da Textvignetten die Vielfalt der Informationen, die in einer realen Unterrichtssituation vorhanden sind, im Vergleich zu Videoaufnahmen noch stärker reduziert darstellen. Für den Zweck (und den Umfang) dieser Publikation hat diese Kondensierung gleichzeitig auch Vorteile, zumal durch die Auswahl der im Text beschriebenen Aspekte der Situation eine Reduktion des Unterrichtsgeschehens auf „das Wesentliche“ vorgenommen werden kann. Dennoch ist im vorliegenden Kontext des Noticings anzumerken, dass selbstverständlich bereits in der Erstellung einer solchen Textvignette Aspekte des Noticings (nämlich vonseiten der Autorin) zu Tragen kommen (Was wird erkannt und als „wesentlich“ eingeordnet und daher im Text beschrieben?).

4.1 Kahoot-Aufgabe zur Laplace-Wahrscheinlichkeit

Wie bereits erwähnt, ist die Textvignette in Abbildung 1 hinsichtlich der vorhandenen Fülle an Informationen, die man wahrnehmen kann, bereits stark reduziert. In der Videovignette, auf der sie basiert, könnte man beispielsweise beobachten, wie die Lehrpersonen den PC

bedienen, wie sie sich im Klassenzimmer bewegen, wie sie ihre Stimmen modulieren, oder man könnte die Körpersprache der Lernenden analysieren.
Aber auch innerhalb des Texts bieten sich noch eine Fülle an Möglichkeiten für mathematikdidaktisches Noticing:

1. *Formulierung der Fragestellung und der Antwortmöglichkeiten* – Es fehlt eine Frage oder eine klare Aufgabenstellung und auch die Interpretation der Bruchzahlen als Wahrscheinlichkeiten ergibt sich höchstwahrscheinlich nur aus dem Kontext des bisherigen Unterrichtsverlaufs (Verbesserungsmöglichkeit: „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, dass man beim Würfeln mit einem sechsseitigen Würfel eine Quadratzahl würfelt?“).
2. *Korrektheit des Ergebnisses* – Tatsächlich wurde eine falsche Antwort vom Programm als richtig ausgewertet: Unter den Zahlen 1 – 6 gibt es zwei Quadratzahlen, nämlich 1 und 4. Dies scheint den Lehrpersonen nicht aufzufallen und besonders schade ist, dass auch der folgende Punkt sie nicht dorthin führt:
3. *Umgang mit unerwarteten Ergebnissen der Lernenden* – Sowohl anhand der Auswertung (eine Mehrheit der Gruppen hat das gleiche „falsche“ Ergebnis gewählt), als auch anhand der chaotischen Schüler*innen-Diskussion lässt sich erahnen, dass eine Verständnisschwierigkeit aufgetreten ist. Diese als solche wahrzunehmen, würde eine Gelegenheit bieten, über die Begründungen der Schüler*innen zu sprechen und den Fehler so gemeinsam aufzudecken.
4. *Sprachliche Exaktheit* – Lehrperson 1 spricht nicht in ganzen Sätzen, wenn sie den Begriff der „Quadratzahl“ noch einmal in Erinnerung rufen (?) möchte. Ihre Absicht hinter der Aussage „also sagen wir, wenn man mit sich selbst multipliziert“ bleibt unklar, als Definition für Schüler*innen, die nicht mehr wissen, was mit einer Quadratzahl gemeint ist, ist diese Aussage wohl zu schwammig.
5. *Sensibilität bei der Gesprächsführung* – Es wird weder auf die Aussage von Lukas („Zwei Sechstel dann ja“), noch auf die Meldung von Irini („Frau Studentin“) eingegangen, stattdessen werden diese Ausrufe übergangen und es wird gleich die „Lösung“ gegeben („In dem Fall wär’s die Vier“) und zur nächsten Aufgabe übergeleitet.

Nach einem Einstieg in das Thema anhand verschiedener Zufallsversuche (Münz- und Würfelwürfe, Ziehen aus einer Urne) spielen die drei Lehrenden ein Kahoot-Quiz mit den Schüler*innen. Eine der Quizaufgaben sieht dabei so aus:

Es kommt eine Quadratzahl (Würfel)	
△ 2/3	◊ 2/6
○ 1/6	□ 1/3

Bei der Auflösung sieht man: Es haben sich von den fünf Schüler*innengruppen drei für die Antwortmöglichkeit 2/6 entschieden, und jeweils eine für die Antwortmöglichkeiten 2/3 bzw. 1/6. Das Programm wertet die Antwortmöglichkeit 1/6 als korrekt.

Beim Vergleichen kommt es zu folgenden Aussagen (Aussagen der Lehrpersonen sind zur besseren Lesbarkeit fett markiert):

Anna	Nein, es ist sogar richtig [...] es könnte richtig sein
Irini	Quadratzahl
Lukas	Nein das ist nicht richtig ja doch [...] vielleicht ist es richtig
Ari	Das kann gar nicht richtig sein
Irini	N e i n
Lehrperson 1	**Also sagen wir wenn man mit sich selbst multipliziert**
Lukas	Ja aber
Anna	Zwei (Stimmgewirr) Zwei mal
Lehrperson 1	**Ja Ja**
Lukas	Zwei Sechstel dann ja
Irini	Ja stimmt
Omar	Oh ich habs richtig
Lehrperson 2	**In dem Fall wärs die Vier**
Irini	Frau Studentin
Lehrperson 2	**Jetzt kommen Fragen mit der Urne**

Abbildung 1: Textvignette Laplace-Wahrscheinlichkeit.

Je nachdem, mit welchem Vorwissen und welchen Überzeugungen man die Vignette liest, können einem einige dieser Punkte (oder auch hier ungenannte) mehr ins Auge stechen, während man andere auf den ersten Blick nicht beachtet hätte. So kann eine Lehrperson, die stets auf klare Aufgabenstellungen und präzise Kommunikation wert legt, verstärkt die Punkte 1 und 4 wahrnehmen, während einer Lehrperson, die es als ihre Hauptaufgabe sieht, den Klassendiskurs zu moderieren, sofort die Aussagen der Lernenden und die Reaktionen der Lehrpersonen ins Auge stechen werden.

4.2 Unterrichtsgespräch zur Momentangeschwindigkeit

Auch bei der Textvignette in Abbildung 2 fallen Aspekte weg, die beim Arbeiten mit der dazugehörigen Videovignette immer wieder zur Sprache kommen: das Tafelbild der Lehrperson, das Verhalten der zweiten Lehrperson im Raum, die sich nicht zu Wort meldet sowie der (fehlende) Einsatz von Technologie. Dafür kann es zu einem Fokus auf die inhaltliche Interaktion zwischen Lehrperson und Schüler*in kommen:

Im Zuge der Überleitung von mittleren Geschwindigkeiten auf Intervallen zur Momentangeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt erhielten die Schüler*innen die folgende Aufgabe:

Bungee-Jumping: Der zurückgelegte Weg des Springers wird durch $s(t) = 5t^2$ beschrieben. Berechne den Differenzenquotienten von s in den Intervallen $[4; 5]$ und $[4; 4,5]$ und $[4; 4,01]$ – was fällt dir auf?

Bei der Nachbesprechung der Aufgabe kommt es zu folgendem Austausch zwischen der Lehrperson und einer Schülerin:

Lehrperson	Die obere Intervallgrenze hat sich immer näher der unteren Intervallgrenze angenähert, ja. Also der Abstand zwischen den beiden Zahlen wurde immer kleiner. Das können wir ewig so weitermachen, bis wir zum Beispiel ankommen bei [4; 4,000001], und trotzdem wäre das noch immer unsere mittlere Geschwindigkeit in dem Intervall, und nicht die Momentangeschwindigkeit nur zum Zeitpunkt 4. Also ich kann beliebig klein werden, ich kann da noch extrem viele Nullen reinschreiben, aber es ist immer nur die mittlere Geschwindigkeit und nie die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt 4.
Schülerin	Also wir haben immer gelernt, dass 0,9 periodisch auch so viel wie 1 ist. Das heißt: Wenn ich das Intervall 3,9 periodisch und 4 hab, da kommt ja eigentlich das Gleiche raus, wär das nicht auch diese Art Momentangeschwindigkeit?
Lehrperson	Aber es wär nicht exakt genug, wir wollen's ja ganz exakt haben. Normalerweise: Ja, wenn du Runden lernst in der Schule, lernst du, dass du aufrundest ab, weiß ich nicht, 5, glaub ich, haben wir aufgerundet, aber es ist halt nicht exakt, ja. Aber wir wollen's jetzt *wirklich* genau haben. Aber ich versteh dich, ja, dass man das in der Schule lernt, also aufrunden.

Abbildung 2: Textvignette Momentangeschwindigkeit.

1. *Sprachliche und konzeptuelle Differenzierung der Begriffe „ewig" vs. „beliebig"* – Die Lehrperson vermischt das Konzept des „beliebig kleinen Intervalls", welches zur exakten Formulierung des vorliegenden Grenzwertprozesses hilfreich ist, mit der bildlichen, aber unpräzisen Sprache von einer „ewig"/unendlich fortführbaren Handlung, von der man sich an diesem Punkt bereits langsam entfernen könnte (Verbesserungsmöglichkeit: „Was würde passieren, wenn wir *ewig* so weitermachen? Dazu können wir uns überlegen: Nach beliebig vielen Schritten, z.B. bei [4;4,000001], hätten wir ja noch immer die mittlere Geschwindigkeit in dem Intervall berechnet, und nicht die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt 4.")
2. *Interpretation der Schüler*innenfrage* – Die*Der Schüler*in spricht einen sehr nahe verwandten, aber nicht direkt auf jene Art und Weise übertragbaren Punkt an, wie sie*er es formuliert. Da $0,\overline{9} = 1$ gilt, gibt es das Intervall $[3,\overline{9}; 4]$ in dem Sinn, den man hier benötigt, eben nicht – es handelt sich dabei um einen einzelnen Zeitpunkt. Sie*Er erkennt einerseits auch, dass die beiden Funktionswerte deshalb „das Gleiche" ergeben, scheint aber noch nicht weiter betrachtet zu haben, was das für den gesamten Term der mittleren Geschwindigkeit bedeutet. (Das als Lehrperson zu erkennen, würde direkt dazu einladen, diesem interessanten Vorschlag mit Rückfragen zu begegnen, und in weiterer Folge dann den Grenzwertprozess in $0,\overline{9} = 1$ mit dem Grenzübergang von mittleren zu momentanen Änderungsraten in Verbindung zu bringen.)

3. *Eingehen auf die*den Schüler*in* – Es ist unklar, ob die Lehrperson die Schüler*innenfrage schlicht nicht verstanden hat (ist der Lehrperson selbst bewusst, dass $0,\overline{9} = 1$ gilt?), oder der Frage ausweichen wollte. In ihrer Antwort behauptet sie jedenfalls „ich versteh dich“, was jedoch offenbar nicht der Fall ist. Motivierender für die*den Schüler*in wäre es wahrscheinlich, noch einmal nachzufragen oder anzukündigen, später auf ihre Frage zurückzukommen (und das dann auch zu tun).
4. *Professionelles Auftreten* – Die Art der Bezugnahme auf das Runden wirkt recht unbedacht („dass du aufrundest, ab-; weiß ich nicht; 5; glaub ich“) und stellt den sinnvollen Einsatz des Rundens in ein womöglich falsches Licht („Runden ist schlampig, wir wollen es jetzt genau wissen“).

Erneut gilt: Beobachter*innen mit unterschiedlichen Werthaltungen und Prioritäten fallen manche dieser Punkte bestimmt unmittelbarer auf als andere. Legt man großen Wert auf ein souveränes Auftreten als Lehrende, wird Punkt 4 unverkennbar sein. Hat man ein differenziertes Hintergrundwissen zum behandelten Thema und fokussiert gern die individuellen Denkprozesse seiner Schüler*innen, kann man die Punkte 1 und 2 in den Mittelpunkt rücken. Liegt das Hauptaugenmerk auf der Lernendenpsychologie, steht vielleicht das fehlende Eingehen auf das Anliegen der Schülerin in Punkt 3 im Zentrum.

5 Anregungen für die Praxis

Die eigene Wahrnehmung bewusst zu beobachten, sei es (in abnehmender Schwierigkeit) bei einer Hospitation, bei der Reflexion einer selbst gehaltenen Unterrichtseinheit oder im Moment des Unterrichtsgeschehens, kann ein wertvoller Katalysator für die Weiterentwicklung der eigenen Unterrichtstätigkeit sein. Wiederkehrende Beobachtungsfokusse können Aufschluss über die eigenen, womöglich impliziten, Prioritäten geben, und der Vergleich mit den Beobachtungen anderer kann eigene blinde Flecken aufdecken. Die Analyse des eigenen Noticings kann ein erster Schritt sein, das Blickfeld als Lehrperson „zu weiten“, oder bereits bestehende Zentren der eigenen Aufmerksamkeit noch differenzierter zu betrachten.

Literatur

Ableitinger, C., Anger, A., & Dorner, C. (2020). Using students’ selection of significant events in mathematics lessons to deduce their underlying predispositions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(4), pp. 787–806.

Chase, W. G., & Simon, H. A. (1973). Perception in chess. *Cognitive Psychology*, *4*, pp. 55–81.

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers’ professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(1), pp. 89–114.

Glaser, R., & Chi, M. T. H. (1998). Overview. In M. T. H. Chi, R. Glaser, & M. J. Farr (Hrsg.), *The Nature of Expertise* (pp. xv-xxviii). Psychology Press.

Groot, A. D. de (1965). *Thought and Choice in Chess.* Mouton.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), pp. 169–202.

Kaiser, G., Blömeke, S., König, J., Busse, A., Döhrmann, M., & Hoth, J. (2017). Professional competencies of (prospective) mathematics teachers—cognitive versus situated approaches. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), pp. 161–182.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing.* Routledge.

Mathematical Sciences Education Board (2001). *Knowing and Learning Mathematics for Teaching: Proceedings of a Workshop.* National Academy Press.

Santagata, R., & Yeh, C. (2016). The role of perception, interpretation, and decision making in the development of beginning teachers' competence. *ZDM – Mathematics Education*, *48*(1), pp. 153–165.

Scheiner, T. (2016). Teacher noticing: enlightening or blinding? *ZDM – Mathematics Education*, *48*(1), pp. 227–238.

Star, J. R., & Strickland, S. K. (2008). Learning to observe: using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(2), pp. 107–125.

Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *10*(4), pp. 571–596.

Sommerhoff, D., Leuders, T., & Praetorius, A.-K. (2022). Forschung zum diagnostischen Denken und Handeln von Lehrkräften – Was ist der Beitrag der Mathematikdidaktik? *Journal für Mathematik-Didaktik*, *43*(1), S. 1–12.

Strong, M., & Baron, W. (2004). An analysis of mentoring conversations with beginning teachers: suggestions and responses. *Teaching and Teacher Education*, *20*(1), pp. 47–57.

Thomas, J., Jong, C., Fisher, M. H., & Schack, E. O. (2017). Noticing and Knowledge: Exploring Theoretical Connections between Professional Noticing and Mathematical Knowledge for Teaching. *The Mathematics Educator*, *26*(2), pp. 3–25.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, *24*(2), pp. 244–276.

Coding in der Volksschule

Alle Kinder profitieren – Mädchen in besonderem Ausmaß

Sabine Sperk[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1175

Zusammenfassung

Als Teil der MINT-Disziplinen *Mathematik, Informatik*, *Naturwissenschaften* und *Technik* nimmt das Erstellen von Computerprogrammen einen immer wichtiger werdenden Platz in der digitalen Bildung ein. Die Förderung des informatischen Denkens bereits im Volksschulalter nutzt allen Kindern, Mädchen jedoch in noch stärkerem Ausmaß. Durch eigene Erfolgserlebnisse sowie dem Erleben eines Abbaus von Stereotypen profitieren sie von Programmierprojekten in Form eines gestärkten informatischen Selbstbildes besonders. Dies erhöht ihre Chancen, an zukunftsträchtigen und lukrativen Berufsbildern mit informatischem Bezug teilzuhaben. Programmierprojekte an Volksschulen lassen sich flexibel umsetzen – in einem Ausmaß von wenigen Stunden bis hin zu größeren Klassen- oder Semesterprojekten. Ausschlaggebend für den Erfolg sind formelle Kriterien, wie etwa die regelmäßige Verfügbarkeit von Schul-PCs, jedoch auch die pädagogische Auswahl von Programmierumgebung und Begleitmaterial. Besonders geeignet für den Einstieg in die Programmierung mit Kindern sind die Programmierumgebung „Scratch“ sowie die Lernplattform „code.org“. Beide Umgebungen sind kostenlos, in mehreren Sprachen verfügbar und senken mit einem visuellen, blockbasierten Programmieransatz die Einstiegsbarrieren – sowohl für teilnehmende Kinder als auch für Lehrpersonen.

Coding, Programmieren, Volksschule, Grundschule, Selbstwirksamkeit

1 Warum Coding in der Volksschule?

Um Kinder auf ein Leben in einer digitalisierten Gesellschaft vorzubereiten, ist es wichtig, ihnen Grundfähigkeiten in *Computational Thinking* (Informatisches Denken) zu vermitteln: „Computational thinking is a fundamental skill for everyone, not just for computer scientists.

[1] Volksschule Wiener Neudorf, Europaplatz 6, 2351 Wiener Neudorf
Email: drachenklasse@outlook.com

To reading, writing and arithmetic, we should add computational thinking to every child´s analytical ability.“ (Wing, 2006, S. 33)
Dies hat auch die Politik erkannt und entsprechende Inhalte in den Lehrplan der Volksschule (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023) eingearbeitet, sodass Lehrer*innen Coding-Projekte auch rechtlich abgedeckt im Unterricht durchführen können.
Ein essenzieller Teil des informatischen Denkens ist dabei ein Verständnis für das *Verstehen, Erstellen, Formalisieren und Automatisieren von Schritt-für-Schritt-Anweisungen* (Antonitsch & Hanisch, 2014, S. 4). Dies sind grundlegende Kompetenzen, um Computerprogramme erstellen zu können. Angesichts der breitflächigen Digitalisierung der Gesellschaft kann sogar davon ausgegangen werden, dass sich Programmieren in einer gewissen Hinsicht als neue, zusätzliche Kulturtechnik etablieren wird:

> Die Beherrschung elementarer informatischer Methoden und Werkzeuge ist damit auf dem besten Weg, neben Schreiben, Lesen und Rechnen zur vierten Kulturtechnik zu werden. Damit wird informatische Bildung zu einer gesellschaftlichen Aufgabe und sollte zukünftig ein fester Bestandteil einer grundlegenden Allgemeinbildung sein.“ (Haus der kleinen Forscher, 2017, S. 10)

Als ersten Schritt vermitteln Digitalisierungsinitiativen an Schulen Grundkenntnisse in der *Handhabung* von Computern. Dies ist essenziell, doch gerade an Volksschulen in Österreich bleibt es jedoch oft dabei. Um zu verstehen, wie Informatik funktioniert, ist es aber wichtig, bereits früh zusätzliche Kompetenzen zu bilden: „Wenn Kinder neben der bloßen Verwendung von Computern auch wissen sollen, wie Computer arbeiten und funktionieren, dann ist eine Auseinandersetzung mit Grundbegriffen der Programmierung nötig. Dadurch erhalten die Kinder nicht nur Einblicke auf, sondern auch hinter den Bildschirm.“ (Walter, 20 18, S. 9)

2 Exkurs: Mädchen profitieren in besonderem Ausmaß

Die Sinnhaftigkeit einer Auseinandersetzung mit dem Thema bereits in der Volksschule, soll damit einmal als geklärt angesehen werden. Informatische Bildung muss jedoch auch unter einem geschlechtsspezifischen Aspekt betrachtet werden, denn Mädchen haben hier oft einen ganz anderen Zugang zum Thema als Jungen.

In den letzten Jahrzehnten hat sich die Bildungsteilhabe von Mädchen und Frauen positiv entwickelt. Dennoch sind sie in den besonders zukunftsträchtigen und lukrativen MINT-Disziplinen (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft, Technik) nach wie vor deutlich unterrepräsentiert. In der Vergangenheit wurden dafür mangelnde „Begabungen“ der Mädchen als Grund für das Fernbleiben aus entsprechenden Berufsbildern ausgemacht. Dies wurde mittlerweile durch umfassende Studien widerlegt und es ist erwiesen, dass Mädchen und

Jungen über gleiche Anlagen für MINT-Disziplinen verfügen (Hattie, 2009; Pisa 2015; TIMMS, 2019).
Warum lassen sich dann in vielen Ländern immer noch Leistungsunterschiede zwischen Jungen und Mädchen in Naturwissenschaften beobachten? Diese Ungleichheiten lassen sich mit dem Vorhandensein von Stereotypen und sozial konstruierten Attributionen erklären:

> In den großen Vergleichsuntersuchungen […] hat sich gezeigt, dass es sich beim Auftreten von Geschlechterunterschieden in den Mathematik- und Naturwissenschaftsleistungen vor allem um ein kulturelles Problem handelt. In einigen Ländern verschwinden die Unterschiede nahezu, während sie in anderen Ländern – wie z.B. Deutschland – noch ausgeprägt sind. (Jahnke-Klein, 2013, S. 48)

Die US-amerikanische Psychologin Barbara Mackoff (1998, S. 1) fasst dies in einem pädagogischen Kontext prägnant zusammen: “The biggest difference between girls and boys is how we treat them.” Eine mädchenstärkende MINT-Pädagogik muss also bedeuten, das *Selbstbild* der Mädchen positiv zu verändern (Jahnke-Klein, 2013).
Wo kann die Pädagogik nun hier ansetzen? Der kanadische Psychologe Albert Bandura (1997) hat in seinen Forschungen der kognitiven Psychologie untersucht, welchen Einfluss menschliche Selbstüberzeugungen auf das eigene Handeln haben. Vereinfacht gesagt, lassen sich diese so zusammenfassen: Wie stark ein Mensch überzeugt ist, in einem bestimmten Handlungsfeld Erfolg zu haben, hat einen positiven Effekt auf das tatsächliche Ergebnis. Diese innere Haltung wird mit dem Begriff der *Selbstwirksamkeitserwartung* definiert.
Umgelegt auf MINT-Disziplinen bedeutet dies: Wenn wir die Selbstüberzeugungen von Mädchen in diesen Bereichen stärken, dann werden sie darin auch bessere Leistungen zeigen und in weiterer Konsequenz auch MINT-bezogene Berufe ergreifen.
Pädagogische Impulse können Selbstüberzeugungen positiv beeinflussen – Bandura (1997) beschreibt hier vier Ansatzpunkte zur Veränderung:

1. häufige Erfolgserlebnisse durch selbst gemachte Erfahrungen
2. Lernen durch Vorbilder
3. Stärkung durch Zuspruch
4. Erleben eines positiven Lernklimas

Die Autorin dieses Beitrags hat anhand einer Einzelfallstudie (Volksschulklasse, Grundstufe II, sechs Monate Projektdauer) umfassend untersucht, wie sich diese Ansätze in einem Programmierprojekt in der Volksschule mädchenstärkend umsetzen lassen und welche Auswirkungen dies auf die Selbstüberzeugungen der an der Studie teilnehmenden Mädchen hatte.
Die Ergebnisse dieser Studie lassen sich in Kurzform wie folgt zusammenfassen:

- Die Mädchen konnten in Form einer höheren informatischen Selbstwirksamkeitserwartung (höhere Kompetenzerwartung) profitieren. Sie haben deshalb in Zukunft eine höhere Chance für einen persönlichen Zugang zu informatischen Disziplinen.
- Die Mädchen konnten einen Abbau von geschlechtsspezifischen Attributionen und Stereotypen erleben. Sie haben deshalb potenziell mehr Chancen und Motivation bei Schul-, Studien- und Berufswahl.
- Programmierprojekte in der Volksschule fördern nicht nur informatische Kompetenzen, sondern stärken insbesondere das Selbstbild von Mädchen. (Sperk, 2022)

Abschließend kann deshalb zusammengefasst werden, dass Programmierprojekte an der Volksschule nicht nur allgemein informatische Kompetenzen der Kinder vertiefen, sondern auch insbesondere einen positiven Beitrag zur Stärkung des Selbstbilds von Mädchen liefern und zum Abbau von geschlechterbezogenen Stereotypen führen.

3 Programmieren lehren und lernen – aber wie?

Unter Programmieren wird weitläufig das Erstellen von Computerprogrammen verstanden. Der Vollständigkeit halber soll dies hier aber nochmals genauer definiert werden: „Programmieren ist das Formulieren einer Problemlösung in Befehlsanweisungen mithilfe einer Sprache, die automatisch in Befehle übersetzt wird, die ein Computer ausführen kann“ (Wurm, 2013).

Computerprogramme stellen also Lösungen für Problemstellungen dar. Der Weg, eine solche Problemstellung zu lösen, lässt sich angelehnt an Ratz et al. (2018, S. 29) schematisch vereinfacht wie folgt darstellen:

1. Problem – Was soll gelöst werden?
2. Algorithmische Beschreibung – Wie kann das Problem gelöst werden?
3. Programm – Wie kann die Lösung informatisch (durch Programmierung) umgesetzt werden?
4. Problemlösung

Bevor damit begonnen werden kann, ein Programm zu schreiben, muss eine algorithmische Beschreibung erfolgen. Damit wird die Logik des Programms bestimmt, welche aus aufeinanderfolgenden Einzelschritten besteht.

Dies soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden – in der Abbildung sind die Schritte für den Ablauf des Händewaschens verdeutlicht:

Abbildung 1: Sequenz zum Händewaschen (eigene Darstellung)

Dieser alltägliche Vorgang stellt einen Algorithmus dar. „Ein Algorithmus ist eine eindeutige Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems. Algorithmen bestehen aus endlich vielen, wohldefinierten Einzelschritten.“ (Rogers, 1987).

Natürlich ist hier auch ein starker Bezug zur Mathematik gegeben, welche ebenfalls grundlegend auf Handlungsvorschriften (Algorithmen) basiert.

In Bezug auf das Lehren von Programmierung ist es wichtig, Kindern zu verdeutlichen, dass unsere tägliche Lebenswelt von Algorithmen durchdrungen ist. Es wird deshalb empfohlen,

als allerersten Schritt in einem Programmierprojekt solche meist unbewussten Alltagsabläufe zu identifizieren und in Schritte (Sequenzierung) zu zerlegen. Anschließend kann damit begonnen werden, Problemlösungen auf logischer Ebene zu beschreiben. Für all diese Übungen ist noch kein Computer nötig („Programmieren ohne Strom“).
Sobald die Grundlagen der Sequenzierung erarbeitet wurden, können erste Übungen am Computer erfolgen. Wie dies gelingen kann, wird im nachfolgenden Kapitel beschrieben.

4 Empfehlungen für die Praxis an der Volksschule

Gerade an der Volksschule fällt es vielen Lehrer*innen nicht leicht, sich informatischen Themen zu nähern. Deshalb wird der Blick nun nachfolgend auf praxistaugliche Ansätze gelegt.

4.1 Projektansätze und benötigte Ressourcen

Zunächst stellen sich dabei grundlegende Fragen in Bezug auf die Umsetzung des Themas in der Volksschule: Für welche Schulstufen eignet sich das Thema? In welchem Ausmaß kann Programmierung Teil des Unterrichts sein? Obwohl es Programmierkonzepte auch für jüngere Kinder gibt, wird sicheres Lesen als Voraussetzung empfohlen. Ein Programmierprojekt ist deshalb vor allem ab der Grundstufe II sinnvoll – also ab der 3. Klasse Volksschule.
Es sind dabei unterschiedliche Ansätze möglich, die sich sowohl in Hinblick auf verwendete Methoden als auch in zeitlicher Hinsicht deutlich unterscheiden. Die Autorin hat aus der eigenen Erfahrung heraus drei mögliche Projektansätze entwickelt, die nachfolgend skizziert werden:

Abbildung 2: Projektansätze Grundstufe II (eigene Darstellung)

ISSN 2313-1640

Es sind also unterschiedliche Projektformen und -längen möglich, von einer Dauer von 2–3 Wochen bis hin zum Semester- oder Jahresprojekt.
In der Praxis stellt sich dann sehr schnell die Frage, welche Ressourcen für ein solches Projekt benötigt werden. Die wichtigsten Punkte werden hier angeführt:

- Essenziell für ein Projekt ist ein regelmäßiger Zugang zu PCs
  → idealerweise in einem schuleigenen EDV-Raum
- Offline-Material für das Erlernen der Grundlagen
  → „Programmieren ohne Strom“
- Softwareumgebung für PCs
  → vorzugsweise freie (kostenlose) Angebote
- Begleitmaterial
  → je nach Projektansatz kann der Einsatz eines Begleitbuches sinnvoll sein

Die Erfahrungen der Autorin mit einem mehrmonatigen Projekt haben gezeigt, dass die größte Herausforderung in der Infrastruktur liegt, insbesondere was die Verfügbarkeit von Schul-PCs betrifft. Bei guter Planung lässt sich ein Projekt dennoch in der Praxis gut umsetzen und setzt bei Nutzung von kostenlosen Angeboten (diese sind umfassend verfügbar) auch keine nennenswerten Investitionen für die Schule oder die Eltern der Kinder voraus.

4.2 Empfohlene Tools und Material für den Unterricht

Programmierung ist ein äußerst vielfältiges Themengebiet – es gibt beispielsweise hunderte Programmiersprachen. Wenn es darum geht, Methoden und Tools für den Unterricht auszuwählen, kann dieses Angebot für interessierte Lehrkräfte überwältigend sein. Nachfolgend werden einige Empfehlungen für Pädagog*innen gegeben, die sowohl auf den praktischen Erfahrungen der Autorin basieren als auch den aktuellen Stand des Diskurses in der informatischen Pädagogik berücksichtigen.

4.2.1. Programmieren ohne Strom – Sequencing

Wie bereits erwähnt, ist es sinnvoll, den Kindern zu Beginn eines Projekts/Curriculums ein grundlegendes Verständnis für den schrittweisen Aufbau eines Algorithmus zu vermitteln.
Im Internet lassen sich dazu viele Beispiele finden. An dieser Stelle sei ein Angebot des Westdeutschen Rundfunks WDR (2022) herausgehoben, der unter dem Motto „Programmieren mit der Maus“ umfangreiches Material veröffentlicht hat. Über ein ausdruckbares Brettspiel lernen Kinder grundlegende Programmierkonzepte zu Befehlen, Schleifen und Funktionen. Alle Materialien sind kostenlos nutzbar.

Abbildung 3: Programmieren mit der Maus (WDR, 2022)

4.2.2. Algorithmisches Denken fördern mit den Bee-Bots

Eine weitere Möglichkeit, algorithmisches Denken zu stärken, stellen die Bee-Bots dar. Diese sind kleine Bodenroboter, die mit Funktionstasten am Gerät gesteuert werden. Die Programmierung erfolgt mit den Tasten *vorwärts, rückwärts, links drehen, rechts drehen, Pause* und *löschen*. Durch Drücken der Taste GO wird eine Programmsequenz gestartet und der Roboter fährt dann auf dem Boden das entsprechende „Programm" ab. Da der Fahrweg des Bee-Bots vorab geplant werden muss, können sich Kinder damit spielerisch dem Programmieren nähern. Bee-Bots können bereits im Kindergarten eingesetzt werden, sind jedoch auch in der Volksschule sinnvoll verwendbar (Brandhofer, 2016).


Abbildung 4: Bee-Bot Roboter (eigene Darstellung)

Bee-Bots stellen – vor allem in Klassenstärke – eine größere Investition dar, die von einer einzelnen Lehrkraft nicht geleistet werden kann. Für Niederösterreich gilt hier eine Besonderheit: Ab dem Jahr 2018 wurden alle niederösterreichischen Volksschulen mit Bee-Bots ausgestattet, so dass Pädagog*innen diese ohne zusätzliche Kosten in ihren Unterricht integrieren können.

4.2.3. Scratch – eine edukative Programmierumgebung zum Erlernen der Grundlagen

Scratch ist eine visuelle Programmiersprache für Kinder und Jugendliche, entwickelt am Massachusetts Institute of Technology (Kiefer, 2019, S. 2). Konzipiert als bildungsorientierte Programmierumgebung ermöglicht es, insbesondere Kindern, einen einfachen Zugang zum Thema „Programmierung". Dazu werden Blöcke als visuelle Platzhalter für Programmieranweisungen verwendet – Scratch wird deshalb auch als blockbasierte Programmiersprache bezeichnet. Durch dieses Konzept lassen sich Programme schaffen, ohne dass Programmanweisungen textuell in Form von Programmzeilen geschrieben werden müssen.

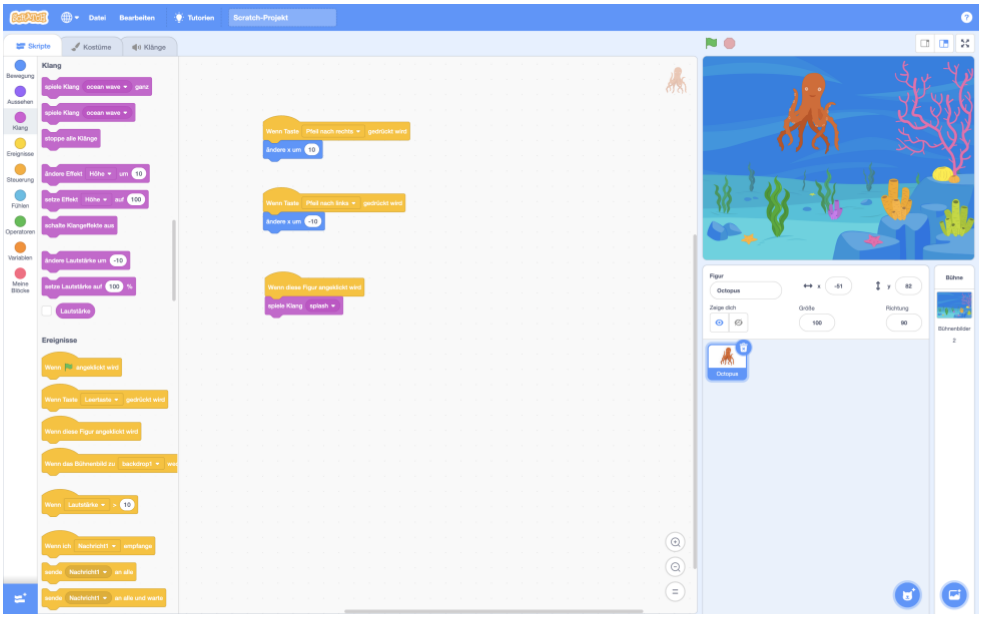


Abbildung 5: Scratch Programmierumgebung mit Befehlsblöcken (eigene Darstellung)

Scratch bietet für Lernende und Lehrende eine Reihe von Vorteilen:

- Die visuelle Umgebung unterstützt auf spielerischem Wege schnelle Lernerfolge.
- Scratch ist in vielen Sprachen nutzbar.
- Scratch ist komplett kostenlos verfügbar.
- Scratch benötigt sehr geringe Rechnerkapazitäten und lässt sich auf den meisten Computern einfach installieren.
- Im Internet gibt es umfassende Ressourcen zum Erlernen und Experimentieren.
- Es gibt auch für den deutschsprachigen Raum eine Reihe von Lehrwerken, anhand derer Scratch erlernt werden kann (Aufzählung angelehnt an Sperk, 2022).

Wie bereits erwähnt, gibt es für Scratch umfangreiches Material im Internet, aber auch in Buchform. Ein Werk, das sich im Rahmen der Studie der Autorin als sehr praxistauglich herausgestellt hat, ist *Programmieren mit der Maus* aus dem Rheinwerk Verlag (Kiefer, 2019). Durch einfache, aufeinander aufbauende Übungen werden Kinder darin spielerisch und kreativ in die Programmierung mit Scratch eingeführt.

4.2.4. code.org – Lerneinheiten zum Programmieren mit Puzzle-Charakter

Während Scratch den Lernenden bei der Programm-Gestaltung weitgehende Freiheiten gewährt, verfolgt die Plattform code.org einen anderen Ansatz. Sie ist eine edukative Non-Profit-Organisation, die sich zum Ziel gesetzt hat, möglichst vielen Menschen Zugang zu Computerwissenschaften zu ermöglichen. Obwohl die Organisation von äußerst potenten Sponsoren unterstützt wird (z.B. Google, Amazon, Microsoft) sind sämtliche Angebote kostenfrei im Internet via Browser verfügbar.

Auf der Internetseite code.org sind eine Vielzahl von Übungen zum Aufbau eines Grundverständnisses für die Programmierung verfügbar. Diese Übungen bauen in der Regel aufeinander auf und haben einen Puzzle-Charakter. Lernende lösen nacheinander kleine Aufgaben und arbeiten sich so in immer komplexere Themen ein. Es entstehen hier zwar keine Programme im eigentlichen Sinne, spielartige Elemente sorgen hier aber für anhaltende Motivation, die Aufgaben zu bewältigen.

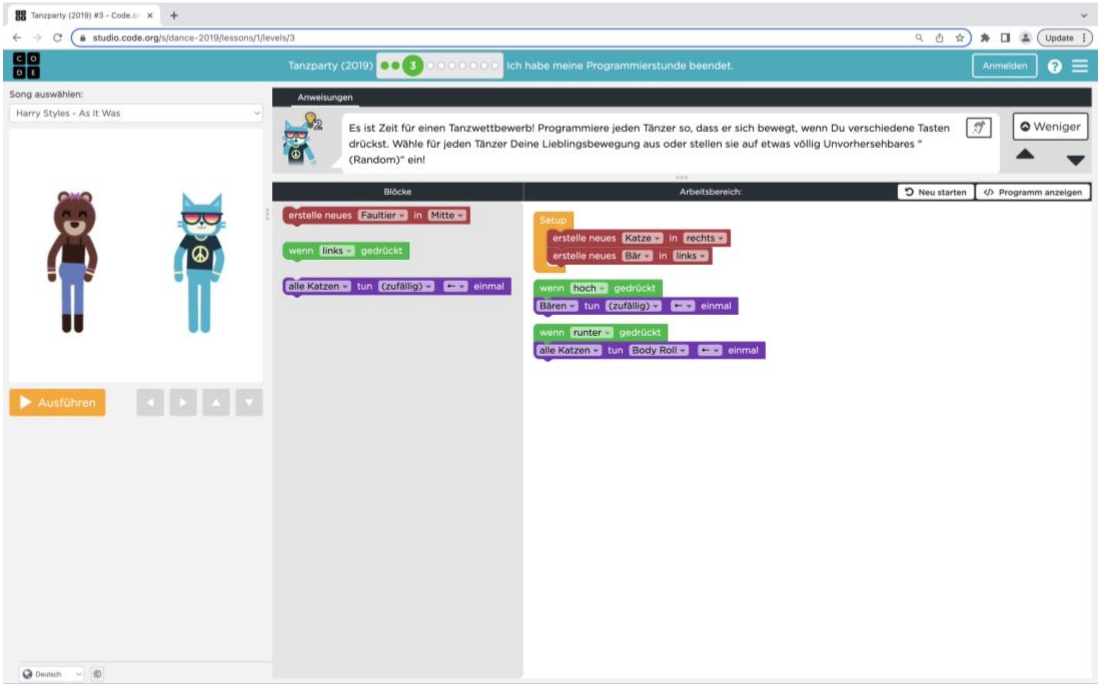


Abbildung 6: Beispielübung einer Aufgabe in code.org (eigene Darstellung).

Code.org ist ebenfalls in einer Vielzahl von Sprachen verfügbar und verfolgt ähnlich wie Scratch einen blockbasierten Programmieransatz.

Während Scratch zwar eine vollwertige Programmierumgebung darstellt, nimmt eine Erarbeitung in der Regel doch zumindest mehrere Wochen in Anspruch. Code.org kann im Vergleich dazu nicht als volle Programmierumgebung angesehen werden. Jedoch ist es mit code.org auch möglich, kürzere Projekte (bis hin zu einzelnen Projekttagen) damit sinnvoll zu gestalten. Eine Besonderheit von code.org stellt die hochwertige Aufmachung dar. Durch das Sponsoring von großen Unternehmen, kann code.org Lerneinheiten für beliebte Themen, wie *Minecraft*, *Star Wars*, *Angry Birds* und weitere Franchise-Marken, anbieten.

Durch einen kreativen und spielerischen Ansatz sind aber beide Plattformen – sowohl Scratch als auch code.org – in der Lage, Lernende anhaltend zu motivieren.

Literatur

Antonitsch, P., Hanisch, L. (2014). *Aspekte von Computational Thinking im Unterricht der Primarstufe*. IMST.

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. Freeman.

Brandhofer, G. (2016) *BeeBot*. https://eis.ph-noe.ac.at/beebot/

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2023). *Volksschul-Lehrplan*. https://-www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_vs.html

Hattie, J. (2013). *Lernen sichtbar machen*. Überarbeitete deutschsprachige Ausgabe. Baltmannsweiler.

Haus der kleinen Forscher (Hrsg.) (2017). *Informatik entdecken mit und ohne Computer*. Stiftung „Haus der kleinen Forscher".

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen (o. D.). *TIMMS 2019*. https://www.iqs.gv.at/timss-2019

Jahnke-Klein, S. (2013). *Benötigen wir eine geschlechtsspezifische Pädagogik in den MINT-Fächern? Ein Überblick über die Debatte und den Forschungsstand*. In: *Schulpädagogik heute*, 4(8), S. 46–67.

Kiefer, P. (2019). *Programmieren lernen mit der Maus*. Rheinwerk.

Mackoff, B. (1998). *Was wollen die Mädchen? 7 Strategien zur Erziehung starker und selbstbewusster Töchter*. Beltz.

Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung (Hrsg.) (2015). *Pisa im Fokus 49*. https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisainfocus/PIF-49%20(ger).pdf

Ratz, D., Schulmeister-Zimolong, D., Seese, D. & Wiesenberger, J. (2018). *Grundkurs Programmieren in Java*. Carl Hanser.

Rogers, H. (1987). *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. MIT Press.

Sperk, S. (2022). *Girlpower durch Coding ?* [!]. Pädagogische Hochschule Baden.

Walter, D. (2018). *Programmieren! – Auch schon in der Grundschule? Grundschulunterricht Mathematik*. 1/2018, S. 8–12.

Westdeutscher Rundfunk (2022). *Programmieren ohne Strom*. https://www.planet-schule.de/thema-/programmieren-mit-der-maus-unterricht-programmieren-ohne-strom-100.html

Wing, J. (2006). *Computational Thinking. Communication of the ACM*. 49 (3), S. 33–35.

Wurm, B. (2013). *Programmieren lernen: Schritt für Schritt zum ersten Programm.* Galileo Press.

R&E SOURCE
10. Jg. (2023), Nr. 2: More of Mathematics
Konferenzband zum Tag der Mathematik

Zahlenzauber und Laufdiktate in einem motivierenden Mathematikunterricht

Thomas Zwicker[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1178

Im vorliegenden Text werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie im Mathematikunterricht ab der dritten Schulstufe die intrinsische Lern- und Leistungsmotivation der Schüler*innen erhöht werden kann. Dies kann mittels Zahlenzaubereien und Kartentricks, die auf mathematischen Grundlagen beruhen, geschehen. Die erworbenen Kompetenzen ermöglichen es den Lernenden, die Tricks nicht nur in der Schule, sondern auch zu Hause und im Freundeskreis anzuwenden, wodurch die Selbstwirksamkeitserwartung erhöht werden kann und die Schüler*innen ein besseres mathematisches Selbstkonzept entwickeln können. Darüber hinaus können zu mathematischen Lernzielen auch Laufdiktate eingesetzt werden.

Zahlenzauberei, Laufdiktate, Motivation, Selbstwirksamkeit, Mathematik

1 Zahlenzaubereien und Kartentricks

Lehrer*innen sind ständig auf der Suche nach geistigen Herausforderungen für ihre Schüler*innen. Insbesondere die höher Begabten und Schnelleren brauchen Anregungen, die sich nicht nur auf ein Wiederholen des durchgenommenen Stoffes beschränken. Durch das Einbringen von anregenden Inhalten wird ein Beziehungsaufbau möglich, sodass vermieden werden kann, dass die Schule von den Schüler*innen als „Entfremdungszone" im Sinne von Beljan (2017) erlebt wird. Das Vorführen der Zaubereien wird von fast allen Schüler*innen gerne durchgeführt. Darüber hinaus ist es für manche von ihnen auch zusätzlich wichtig, die Tricks selbst zu durchschauen und zu verstehen. Manche wollen die Tricks auch weiterentwickeln, um einen eigenen Zaubertrick zu erstellen, wodurch die Kreativität der Lernenden nicht nur herausgefordert, sondern auch gefördert wird. Die Tricks eignen sich also gut, kognitive Herausforderungen in einem angenehmen Lernklima bereitzustellen und erfüllen so wichtige Aspekte der Resonanzpädagogik (Rosa & Endres, 2016).
In Stationenbetrieben sind Kartentricks als Wahl- oder Zusatzaufgaben verwendbar. Trickbeschreibungen (am 6.3.23 ergab die Recherche „Kartentrick Beschreibung" bei Google 491.000 Suchergebnisse – oft inkl. Videos) stehen umfangreich zur Verfügung. Geeignete Tricks finden

[1]Pädagogische Hochschule Oberösterreich, Huemerstraße 3-5, 4020 Linz
Email: thomas.zwicker@ph-ooe.at

sich auch im Buch „Zauberei mit Zahlen“ (Zwicker, 2007) und in der Schulbuchreihe „Mathematik. Verstehen + Üben + Anwenden“ (Zwicker, Breunig, Fitzka & Pawlowski, 2023, S. 37; Fitzka, Zwicker & Breunig, 2023, S. 23)
Weitere Argumente für Kartentricks und Zahlenzaubereien mit mathematischer Grundlage (Zwicker, 2007, S. 5):

- Sie steigern die Motivation, weil nicht nur das Erlernen Freude bereitet, sondern auch der Erfolg beim korrekten Zaubern.
- Sie ermöglichen den Erwerb einer soliden Arbeitshaltung: Ausdauer bei der Arbeit übt man am besten mit Inhalten ein, die auch Spaß machen.
- Sie fördern die Konzentrationsfähigkeit: Beim Kartenzaubern behält man meist zumindest eine Karte im Gedächtnis und im Kartenstapel unter Kontrolle. Das strengt zwar an, steigert aber auch die Denkleistung und ist damit eine wirksame Konzentrationsübung.
- Die für die Feinmotorik der Fingerbewegungen benutzten Nervenbahnen werden auch bei der Verwendung der Schriftsprache genutzt. Oft genutzte Nervenbahnen werden durch Myelinisierung leistungseffizienter (Martini, 2020). Das Üben von Kartentricks führt also indirekt auch zu einer besseren Ausgangsposition beim Schriftsprachgebrauch.
- Das Wissen um Zahlenzaubereien und Kartentricks und deren erfolgreiche Präsentation bewirken Aufmerksamkeit und Anerkennung. So manches Kind kann dadurch sein Selbstwertgefühl steigern und fühlt sich in der Klasse wohler. Dabei ist aber auch die Kehrseite zu beachten: Bisweilen tragen Kinder bzw. Jugendliche das neue Wissen als Überheblichkeit und Besserwisserei zur Schau und machen sich dadurch unbeliebt. Dies sollte in der Klasse angesprochen werden und kann so soziale Kompetenzen fördern.
- Die „Geschichten“, die während der Kartentricks erzählt werden, sind eine sinnvolle Übung zum „freien Vortrag“. Dabei legt man die Scheu ab, vor Publikum zu sprechen.

Es hat sich als nützliches Element erwiesen, einer Gruppe von drei bis vier Schüler*innen einen Trick zu zeigen und sie den Trick erarbeiten zu lassen, während die anderen Schüler*innen, z.B. an einem Wochenplan, arbeiten. Die Kleingruppe spricht sich dann ab, wie sie den Trick der Klasse präsentieren möchte. Wer im Laufe eines Semesters einmal einen Trick in der Kleingruppe erlernt und dann in der Großgruppe bei der Vorstellung des Tricks mitgearbeitet hat, profitiert vom Erfolgserlebnis und neuer Motivation für Mathematik. Die selbst erarbeitete Kompetenz erhöht die Selbstwirksamkeitserwartung im Sinne von Bandura (1997). Auch das schulische Selbstkonzept kann sich dadurch merklich verbessern.

1.1 Zahlenzauberei: Die Schnellrechenwürfel

Ablauf

Du würfelst mit fünf Würfeln und kannst die Summe der fünf gewürfelten, dreistelligen Zahlen schneller berechnen als jede*r Mitspieler*in.

Trick
Du addierst die Einer der gewürfelten Zahlen und erhältst eine zweistellige „Einersumme“. Du notierst die Einersumme als Zehner und Einer der Gesamtsumme (z.B. 6+5+4+5+4 = 24). Du ergänzt die Einersumme auf 63 und erhältst eine zweistellige Differenz (z.B: 63-24 = 39). Du schreibst die Differenz als Tausender und Hunderter vor die Einersumme und hast damit die Gesamtsumme ermittelt. (z.B.: 3 924).

So müssen deine fünf Würfel beschriftet sein, damit der Trick gelingen kann!

	Würfel 1	Würfel 2	Würfel 3	Würfel 4	Würfel 5
Seite 1	626	885	894	605	914
Seite 2	428	786	399	803	617
Seite 3	923	489	993	407	716
Seite 4	824	588	597	506	419
Seite 5	725	984	498	902	815
Seite 6	527	687	795	704	518

Man kann auch in z.B. vier Durchgängen sich die Würfelergebnisse ansagen lassen und notieren. Die Lernenden sollen dann die Vorgangsweise beim Trick herausfinden und bekommen erst danach den Text für den Trickablauf zu sehen.

Das Protokollblatt könnte wie folgt aussehen:

	Durchgang 1	Durchgang 2	Durchgang 3	Durchgang 4
1. Zahl	626			
2. Zahl	885			
3. Zahl	894			
4. Zahl	605			
5. Zahl	914			
SUMME	3 924			

1.2 Kartentrick: Zweimal Abheben

Vorbereitung
Du hast ein beliebiges Kartenpaket (Deckblatt nach oben) vor dir liegen.

Durchführung

1. Du forderst eine*n Mitspieler*in aus dem Publikum auf, einen Stoß abzuheben, ihn in der Luft umzudrehen und mit der Bildseite nach oben auf den verbleibenden Stoß zu legen.
2. Jetzt muss sie*er ein zweites Mal abheben, diesmal etwas mehr Karten. Wieder wird der abgehobene Stoß umgedreht und auf den restlichen Stapel gelegt.
3. Du fächerst den gesamten Stapel auf.
4. Du nimmst die oberste Karte, die mit der Rückseite nach oben im Fächer steckt, und schiebst sie der*dem Mitspieler*in zu. Alle Karten mit der Bildseite nach oben werden umgedreht und auf den Stapel gelegt. Alle Karten liegen nun mit der Rückseite nach oben.
5. Du sagst: „Diese Karte hast du dir ausgesucht. Bitte merke dir die Karte (zeige sie auch den anderen). Ich darf sie nicht sehen. Schiebe die Karte an irgendeiner Stelle in den Stoß und mische alle Karten."
6. Du findest die Karte, nachdem du den gemischten Kartenstoß zurückbekommen hast, indem du den Kartenstoß verdeckt in deiner Hand hältst und dann die Karten einzeln aufblätterst. Bei der gemerkten Karte sagst du selbstbewusst: „Das ist deine Karte."

Trick

Bei diesem Trick musst du nur am Beginn des Tricks die oberste Karte des Stapels (Kartenrückseite nach oben) kennen. Das wird die Karte, die sich die*der Mitspieler*in „aussucht".

Hinweis

Dieser Trick eignet sich gut zur Wiederholung: Wenn du die „ausgesuchte" Karte aufblätterst, hörst du auf und sagst: „So, nun hat sich dein linkes Ohr bewegt. Das passiert nur bei der gemerkten Karte. Also diese Karte muss es gewesen sein."
Dann nimmst du den Stoß wieder zusammen. Die bereits aufgeblätterten Karten (von denen du dir die erste gemerkt hast) legst du zuoberst auf den restlichen Stoß. Du weißt damit die oberste Karte und kannst den Trick wiederholen. Zur Ablenkung erzählst du: „Möglicherweise glaubt ihr, dass ich die Karte nicht wegen des wackelnden linken Ohres gefunden habe, sondern weil ich den Kartenstoß vorher besonders vorbereitet habe. Ich führe den Trick nochmals durch und diesmal ist der Stoß von der*dem Mitspieler*in zuletzt gemischt worden. Ich kann mir den Kartenstoß also nicht vorbereitet haben – und trotzdem werde ich die Karte finden – wenn das linke Ohr rechtzeitig zu wackeln beginnt."
Beim „Finden" der Karte (siehe Punkt 6 der Durchführung) merkst du dir wieder die erste Karte und kannst den Trick nochmals vorführen.

Viel Spaß beim Zaubern und beim Verblüffen deines Publikums!

1.3 Tipps für die praktische Umsetzung

Es hat sich bewährt, auch sprachlich zu unterscheiden, ob die Lernenden einen Trick lediglich korrekt durchführen möchten, oder ob sie auch die mathematische Grundlage verstehen wollen. Damit hat man als Lehrkraft die Möglichkeit zu differenzieren. Am Schluss können (hoffentlich) alle Lernenden den besprochenen Trick präsentieren, einige werden aber auch die mathematischen Grundlagen bearbeitet und verstanden haben.

Für diese beiden unterschiedlichen „Bearbeitungstiefen“ bei einem Trick bieten sich als Bezeichnung die Begriffe „Kellnerniveau“ und „Kochniveau“ an:

- Als Kellner*in muss man die Speisen gut präsentieren können, es ist aber nicht unbedingt nötig, alle Zutaten in ihrer Wirkungsweise durchschaut zu haben.

- Wer den Trick auf Niveau einer Köchin oder eines Kochs beherrschen möchte, sollte zusätzlich die mathematischen Grundlagen verstanden haben.

Im Unterricht hat es sich bewährt, die Lernenden selbst und individuell entscheiden zu lassen, ob sie den Trick auf „Kellnerniveau“ oder „Kochniveau“ beherrschen wollen. Damit ist ein motivationales Element der Selbstbestimmungstheorie nach Deci & Ryan (1993) erfüllt. Falls ein Kind merkt, dass es nicht in der Lage ist, sich alle Elemente der mathematischen Grundlagen selbst zu erarbeiten, ist es noch immer möglich, durch Erklärungen von Mitschüler*innen oder der Lehrkraft unterstützend einzugreifen. So kann eine realistische Einschätzung der eigenen Auffassungsgabe entwickelt werden und trotzdem das Ziel des „Kochniveaus“ erreicht werden. Üblicherweise schätzen sich fast alle Kinder bei mehrmaligen Entscheidungsmöglichkeiten zunehmend realistischer ein.
Präsentationsmöglichkeiten erhöhen die Identifikation mit den Zaubereien:
Es kann eine Nachbarklasse eingeladen werden, die dann in Kleingruppen an Stationen jeweils einige wenige Tricks von den zaubernden Schüler*innen vorgestellt bekommt. Wenn an jeder Station eine andere Kombination von Tricks vorgestellt wird, ermöglicht das Wechseln der Stationen für die Besucher*innen jeweils neue Elemente und Erfahrungen.
Einige Kinder bzw. Jugendliche werden die Tricks so gut und zuverlässig beherrschen, dass es auch möglich sein wird, die Tricks vor einer größeren Gruppe Erwachsener (z.B. bei einem Elternabend oder einem Schulfest) zu präsentieren, ohne dass dabei ein Misserfolg zu befürchten ist.
Eine gelungene Präsentation einer Zahlenzauberei oder eines Kartentricks kann ein positiv prägendes Erlebnis für die Schüler*innen sein!

2 Laufdiktate im Mathematikunterricht

Im Sprachenunterricht haben Laufdiktate bereits eine lange Tradition. Dabei werden an verschiedenen Orten im Klassenraum Aufgaben positioniert, die von den Lernenden dort gelesen, gemerkt und dann auf ihrem Arbeitsblatt bearbeitet werden.

Bislang sind im Veritas-Verlag drei Bücher mit mathematischen Laufdiktaten erschienen, wobei jedes Laufdiktat 12 voneinander unabhängige Rechenwege in mindestens drei unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden umfasst. Als Lehrkraft hat man damit eine gute Möglichkeit zu differenzieren. Die Kontrolle der Laufdiktate ist einfach durchzuführen, weil wenn das letzte Ergebnis korrekt ist, sind (höchstwahrscheinlich) alle sechs Rechnungen eines Laufdiktatweges korrekt. Aber auch bei einem Rechenfehler lässt sich eine rasche Kontrolle der weiteren Rechnungen durchführen.
Für die Volksschule gibt es das Buch „Laufdiktate Mathematik (2. bis 4. Schulstufe)“ (Zwicker, 2015a), das im Veritas-Verlag erschienen ist. Für 10- bis 14-Jährige gibt es zwei Bücher mit mathematischen Laufdiktaten: „Mathe, fertig, los!“ (Zwicker, 2010) enthält arithmetische Aufgaben, während „Laufdiktate Geometrie“ (Zwicker, 2015b) Übungsmöglichkeiten der ebenen und räumlichen Geometrie enthält, von denen einige Laufdiktate auch exaktes Konstruieren erfordern.
Mit diesen Laufdiktaten haben Lernende aus Klassen mit großen Leistungsunterschieden die Möglichkeit, gemeinsam am selben Stoff zu üben. Jedes Kind kann dabei auf einem von mindestens drei Leistungsniveaus arbeiten, ohne dass dies in der äußeren Organisation des Unterrichts für die anderen Kinder besonders augenscheinlich wird. Für jeden Schwierigkeitsgrad gibt es mehrere Laufdiktatwege, daher kann dasselbe Laufdiktat auch mehrmals innerhalb eines Unterrichtsabschnittes eingesetzt werden. Manche Lernende wählen bei der Wiederholung des Laufdiktates auch gerne einen schwierigeren Laufweg und haben durch die vorherige Übung des einfacheren Laufdiktates eine bessere Chance, auch beim erhöhten Schwierigkeitsgrad erfolgreich zu sein.
Die Schüler*innen üben im wahrsten Sinne des Wortes „laufend“. Das heißt, sie suchen sich eine Aufgabe bei einer Station und lösen sie auf ihrem Platz. Das Ergebnis dieser Aufgabe führt das Kind zur nächsten Station und Aufgabe. Sind die Aufgaben eines Laufdiktats gelöst, wird bei der Lehrkraft kontrolliert, ob alles stimmt. Dabei erkennt die Lehrkraft am Ergebnis der letzten Aufgabe die Richtigkeit des Lösungsweges.

2.1 Wozu Laufdiktate? – Vorteile aus Sicht der Lernenden

- Laufdiktate verbinden das nützliche Üben von Lerninhalten mit dem kindlichen Bewegungsbedürfnis.
- Sie machen den Kindern Spaß und die Bewegung fördert die Durchblutung des Gehirns. Einige Kinder zeigen bei Laufdiktaten deswegen bessere Leistungen als beim Einsatz traditioneller Übungsblätter.
- Die Verbindung von Lerninhalten mit Bewegung sorgt für ein angenehmes Lernempfinden, baut bei den Kindern Stress ab und führt zu einer positiven Lernmotivation (Zwicker, 2015a).

2.2 Wozu Laufdiktate? – Vorteile aus Sicht der Lehrenden

- Die Laufdiktate in den drei erwähnten Büchern enthalten überprüfte Aufgabenstellungen, die einen hohen Vorbereitungsaufwand ersparen. Für ca. 15 bis 20 Minuten arbeiten die Kinder selbstständig und üben grundlegende Rechen- und/oder Konstruktionsverfahren.
- Die Lehrkraft kann diese Zeit für individuelle Förderung einzelner Kinder verwenden, sei es, um Kindern, die längere Zeit gefehlt haben, die versäumten Inhalte zu erklären, oder sei es, um schnelleren Schüler*innen weiterführende Lerninhalte anzubieten.
- Laufdiktate eignen sich sehr gut zur Wiederholung und Vertiefung von Lerninhalten. Sie sind daher in Vertretungsstunden gut einsetzbar.
- Die Kinder erhalten im Laufe eines solchen Diktats Rückmeldung über ihr Arbeitstempo (sie haben den direkten Vergleich mit ihren Mitschüler*innen und brauchen darüber hinaus von der Lehrkraft keinen Hinweis, was sie noch nicht können bzw. um wie viel langsamer sie sind usw.). Die Lehrkraft kann dadurch leichter aus der beurteilenden Funktion heraustreten und die Rolle Richtung Lerncoach verändern.
- In Elterngesprächen taucht immer wieder der Wunsch nach Übungsmaterialien auf. Als Lehrkraft kann man den Eltern die Laufdiktate empfehlen und damit erprobtes Übungsmaterial anbieten, das problemlos zu Hause einsetzbar ist und den Kindern neben dem Übungsgewinn auch noch Spaß macht.

Durch abwechslungsreiche Durchmischung mit anderen bewährten Übungsformen stellen Laufdiktate eine unterhaltsame Bereicherung des Unterrichts dar (Zwicker, 2015b).

2.3 Teile und Durchführung eines mathematischen Laufdiktats

Jedes Laufdiktat der drei erschienenen Bücher umfasst in der Regel sechs Seiten:

- Vier Seiten mit je drei Aufgabenzetteln: Zu jedem Laufdiktat gibt es 12 verschiedene Wege zur Auswahl (Blätter A bis M auf mindestens drei Schwierigkeitsstufen). Jedes Kind hat pro Laufdiktatdurchgang (Blatt A, B oder C etc.) maximal sechs Aufgaben zu bearbeiten.
- Ein Angabeblatt mit Rechnungen bzw. Angaben: Es lässt sich in vier Zettel teilen. Diese werden an vier verschiedenen Plätzen im Klassenraum angebracht.
- Ein Ergebnisblatt (zur Kontrolle/Korrektur)

Im Rahmen eines Laufdiktats bekommen die Lernenden je einen Aufgabenzettel (der links mit einem Großbuchstaben gekennzeichnet ist, das ist für die spätere Ergebniskontrolle von Bedeutung). Auf dem Aufgabenzettel steht die erste Aufgabe dieses Laufweges. Das Ergebnis der ersten Aufgabe führt zur Nummer der zweiten Aufgabe, die dann auf einem der vier Angabeblätter zu suchen ist. Das Ergebnis der zweiten Aufgabe führt zur dritten Aufgabe und so weiter. Auf dem Aufgabenzettel werden die Ergebnisse vom Kind der Reihe nach notiert. Jedes Kind kommt spätestens nach der Lösung der letzten Aufgabe zur Lehrkraft, die mithilfe des

Ergebnisblattes die Aufgaben einfach und schnell kontrollieren kann, indem nach dem Buchstaben und dem letzten Ergebnis gefragt wird. Wenn das sechste Ergebnis stimmt, dann kann man davon ausgehen, dass alle Rechnungen korrekt gelöst wurden (zumindest in jenen Bereichen, die für das Aufsuchen der Folgerechnung von Bedeutung waren).

Literatur

Bandura, A. (1997). *Self-Efficacy. The exercise of control.* New York: W.H. Freeman.

Beljan, J. (2017). *Schule als Resonanzraum und Entfremdungszone.* Weinheim: Beltz.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. *Zeitschrift für Pädagogik*, 39(2), S. 223 – 238.

Fitzka, E., Zwicker, T. & Breunig, E. (2023). *Mathematik 1. Verstehen + Üben + Anwenden. Übungen.* Linz: Veritas.

Rosa, H. & Endres, W. (2016). *Resonanzpädagogik. Wenn es im Klassenzimmer knistert.* 2. Auflage. Weinheim: Beltz.

Martini, R. (2020). *Highspeed dank Myelin* unter https://www.dasgehirn.info/grundlagen/struktur-und-funktion/highspeed-dank-myelin, abgerufen am 8.3.2023

Zwicker, T., Fitzka, E., Breunig, E. & Pawlowski, D. (2023). *Mathematik 1. Verstehen + Üben + Anwenden.* Linz: Veritas.

Zwicker, T. (2015a). *Laufdiktate Mathematik. Materialien für die 2. – 4. Klasse.* 4. Auflage. Linz: Veritas.

Zwicker, T. (2015b). *Laufdiktate Geometrie.* 2. Auflage. Linz: Veritas.

Zwicker, T. (2010). *Mathe, fertig, los! Laufdiktate für 10- bis 14-Jährige.* 2. Auflage. Linz: Veritas.

Zwicker, T. (2007). *Zauberei mit Zahlen.* Wien: G&G-Verlag.

R&E-SOURCE
Eigentümerin und Medieninhaberin:
Pädagogische Hochschule Niederösterreich
Mühlgasse 67, 2500 Baden
www.ph-noe.ac.at | journal.ph-noe.ac.at

ISSN 2313-1640

Die vierte Ausgabe von R&E-SOURCE im 10. Jahrgang des Journals widmet sich dem Thema

transformation.lernen

Einreichungen sind bis 31. Juli 2023 herzlich willkommen unter
https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/about/submissions
Erscheinungsdatum: 15. Oktober 2023