

# Exemples d'utilisation des fonctions du Kit\_ETs\_MB

Michel Beaudin  
[michel.beaudin@etsmtl.ca](mailto:michel.beaudin@etsmtl.ca)  
 Version du 22 avril 2014

## Des exemples pour Mat 145

**Exemple 1 :** l'équation  $x = \cos x$  admet une unique solution, près de  $x = 0.7$ , comme le montre un graphique de chaque membre de cette égalité. La méthode de Newton la trouve rapidement comme on le voit à la figure 1 :

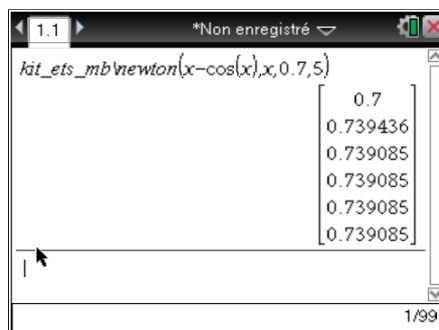


Figure 1

Évidemment, le solveur du calculateur trouve aussi cette solution (avec le fameux avertissement que d'autres solutions peuvent exister). Le lecteur intéressé pourra constater que la méthode du point fixe fonctionne aussi mais beaucoup plus lentement.

**Exemple 2 :** le théorème fondamental du calcul intégral nous indique que  $\int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3}$ . Cela peut aussi être obtenu par une limite de somme de gauche comme l'indique la figure 2a. On aurait pu utiliser une somme de droite dont la valeur (en termes de  $n$ ) aurait été quelque peu différente mais la limite aurait encore été égale à  $1/3$ .

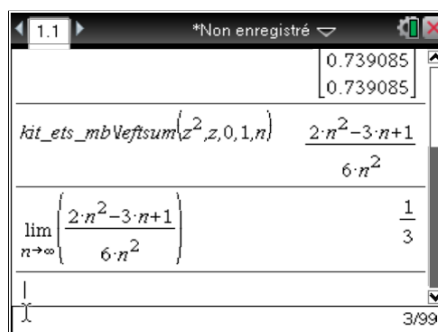


Figure 2a

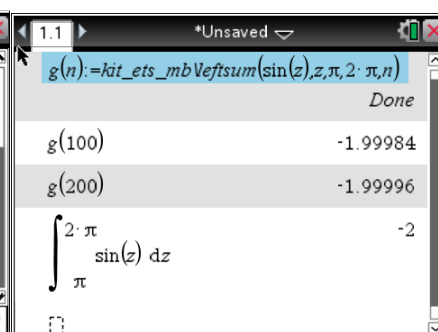


Figure 2b

Malheureusement, Nspire CAS ne peut trouver, sous forme close, la somme de gauche de  $\sin(w)$  pour  $n$  rectangles entre  $\pi$  et  $2\pi$ , somme dont la limite devra être  $-2$ . On peut quand même s'en douter en évaluant la somme de gauche pour des valeurs de  $n$  de plus en plus grandes (figure 2b). La valeur de cette somme de gauche peut se trouver et vaut  $-\frac{\pi}{n} \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ . Là, Nspire peut calculer la limite et elle trouvera  $-2$  (vérifiez).

## Des exemples pour Mat 165

**Exemple 3 :** dans le livre de Stewart, un exemple est fait pour déterminer et classifier les points critiques de la fonction  $f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$ . Puisque le système d'équations  $\nabla f(a, b) = [0, 0]$  sera polynomial, aucune solution ne sera oubliée par notre fonction “ptcri” et la

fonction “nature” retournant le couple  $\left[ D(a, b), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \right]$  permettra de conclure. En mettant la

fonction  $f$  en mémoire (il vaut mieux mettre la fonction  $f(x, y)$  plutôt que l'expression  $f$  en mémoire puisque nous évaluerons  $f$  en un certain point critique par la suite) et en mettant en mémoire la matrice  $\mathbf{m}$  des points critiques, il devient facile de substituer les coordonnées de ces points dans  $f$  puisque, si  $\mathbf{m}$  est une matrice, alors  $\mathbf{m}[i, j]$  est l'élément situé à l'intersection de la  $i$  ième ligne et de la  $j$  ième colonne de  $\mathbf{m}$ .

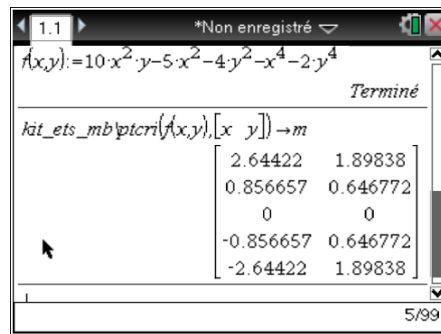


Figure 3

**Exemple 4 :** nous poursuivons l'exemple 3. Quelle est la nature du point critique  $(-2.64422, 1.89838)$ ? La figure 4a nous indique que c'est un maximum local, valant 8.49586.

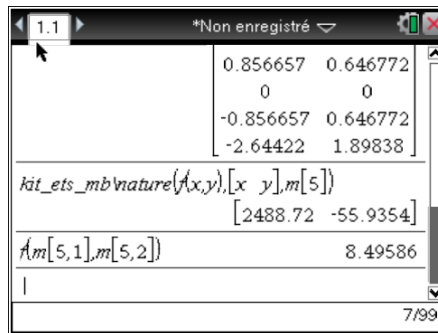


Figure 4a

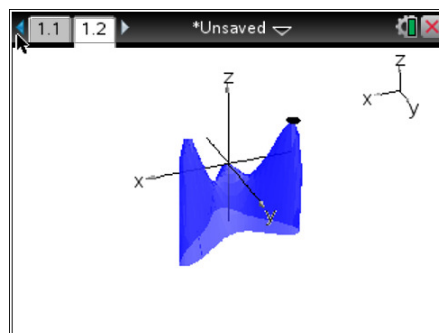


Figure 4b

En fait, c'est même un maximum global comme le graphique de la figure 4b le confirme : on a même tracé le point à l'aide d'une petite sphère de rayon 0.3, centrée en un point dont les coordonnées sont celles du point  $(-2.64422, 1.89838, 8.49586)$ .

**Exemple 5 :** un théorème affirme que si  $\mathbf{G}$  est un champ vectoriel défini sur tout  $\mathbb{R}^3$ , dont les fonctions composantes ont des dérivées partielles continues et dont le rotationnel vaut  $\mathbf{0}$ , alors  $\mathbf{G}$  est conservatif. La figure 5a montre un exemple avec le champ suivant :  $\mathbf{G}(x, y, z) = [y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2]$ . On y voit, qu'à constante près, un potentiel est donné par  $xy^2z^3$ . D'ailleurs, on pourra vérifier que le gradient du résultat

trouvé est bien égal au champ  $\mathbf{G}$  de départ. Il est toujours important de faire cela puisque la fonction « potential » calcule une certaine intégrale curviligne, supposant que le domaine du champ vectoriel contient l'origine ... cela pourra donc donner un résultat faux dans certains cas.

Finalement, si l'on voulait calculer l'intégrale curviligne de ce champ le long de la courbe  $C$  décrite par  $\mathbf{r}(t) = [5t, 3t - 1, t^2]$ ,  $1 \leq t \leq 4$ , alors le potentiel trouvé pourrait être utilisé mais le calcul de l'intégrale curviligne aussi : on utilise les deux méthodes à la figure 5b.

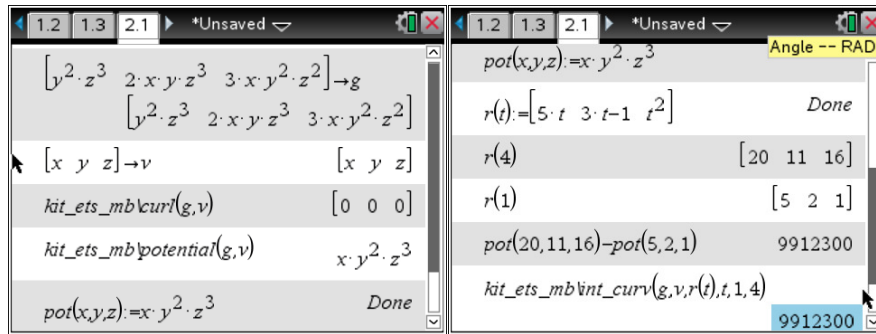


Figure 5a

Figure 5b

**Exemple 6 :** le champ de vecteurs  $\mathbf{H}$  suivant n'est pas conservatif puisque son intégrale curviligne sur une certaine courbe fermée n'est pas nulle mais son rotationnel se simplifie en le vecteur  $\mathbf{0}$ . En effet, soit

le champ  $\mathbf{H}$ , défini par  $\mathbf{H}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} [-y, x, 0]$ . Le domaine de  $\mathbf{H}$  est constitué des points  $(x, y, z)$

de l'espace sauf l'axe des  $z$ . Si l'on choisit comme chemin fermé le cercle  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$  (donc le cercle unité dans le plan  $xy$ ), on trouve que l'intégrale curviligne vaut  $2\pi$ . À la figure 6, l'intégrale curviligne est calculée sans passer par la fonction « int\_curv » comme à l'exemple précédent.

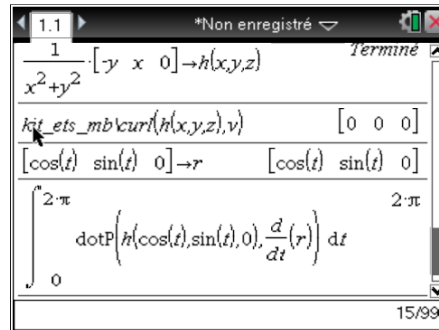


Figure 6

## Des exemples pour Mat 265

**Exemple 7 :** trouvons le voltage maximum atteint aux bornes d'un condensateur dans un circuit  $RC$  si  $R = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$ ,  $E(t) = 10000V$  pour  $0 < t < 3$  et  $0$  autrement, sachant que  $v_C(0) = 0$ .

On peut mettre en mémoire la source comme suit :  $\text{source} := 10000(u(t) - u(t - 3))$  puisque le « package » Laplace comprend ce qu'est «  $u(t)$  ». Une fois la solution obtenue sur l'écran, on définit la fonction  $u(t)$ . On tracera ensuite le graphique et utilisera l'outil d'analyse pour déterminer le maximum :

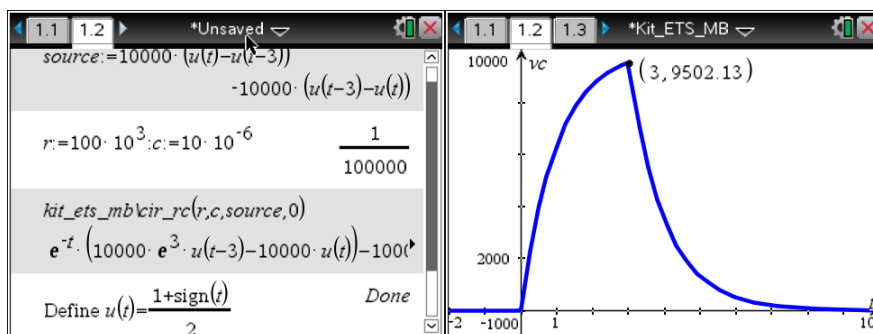


Figure 7a

Figure 7b

**Exemple 8 :** l'équation différentielle  $y' = x + y^2$ ,  $y(0) = 1$  ne peut être résolue par la commande « deSolve ». Si l'on veut approximer cette solution en  $x = 0.5$ , on peut choisir un développement en série avec la fonction « taylor\_ode1 » et comparer avec RK. Les figures qui suivent montrent qu'un polynôme d'ordre 8 prédit  $y(0.5) = 2.22586$  tandis que RK23 prédit 2.23453.

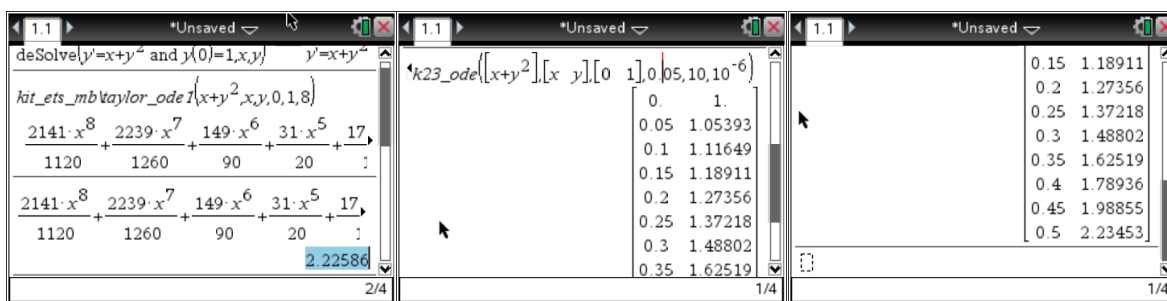


Figure 8a

Figure 8b

Figure 8c

**Exemple 9 :** Étirement maximal dans un problème de masse-ressort. Soit l'É.D.

$$2y'' + y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad \text{La force extérieure } f \text{ est } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \leq t < 20 \\ 0 & \text{si } t \geq 20 \end{cases}.$$

On peut définir  $f$  comme étant  $u(t-5) - u(t-20)$  (notez que Npsire CAS tout comme Voyage 200 utilise, dans le « package » Laplace la lettre «  $u$  » pour la fonction échelon-unité). Pour le graphisme, on devra utiliser « step » mais le kit\_ets\_mb utilise aussi « uu ». Une fois résolu la position trouvée, reste à ouvrir une fenêtre graphique, copier et coller la solution (en remplaçant «  $t$  » par «  $x$  » et en « overwritant » «  $u$  » par « uu »).

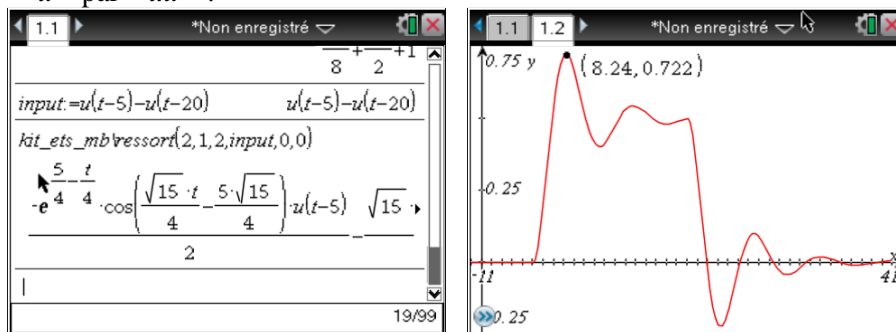


Figure 9a

Figure 9b

**Exemple 10 :** la table de séries de Fourier de Schaum nous indique (formule 23.10) que la série de Fourier de  $f(x) = x$ ,  $0 < x < 2\pi$ ,  $P = 2\pi$ , est  $\pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\right)$ . Notre fonction « Fourier » donne immédiatement ce résultat et on peut en tracer le graphe d'une somme partielle (le prolongement périodique de  $f$ , en dehors de l'intervalle  $0 < x < 2\pi$ , a été réalisé avec la fonction « mod » comme cela est bien connu depuis l'utilisation de *Derive*, TI-92 Plus/Voyage 200) :

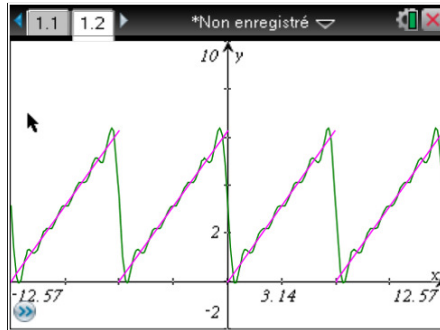


Figure 10a

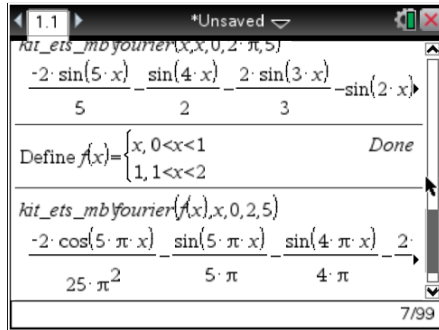


Figure 10b

Notez que la fonction « fourier » est aussi pratique si le signal est défini par morceaux puisque des fonctions programmées par le collègue Frédéric Henri viennent à la rescousse de Nspire CAS ! Voir la figure 10b précédente.

### Des exemples pour Mat 472

**Exemple 11 :** le triangle de sommets  $(-2, -1)$ ,  $(1, -2)$  et  $(-1, -2)$  subit une rotation — dans le sens contraire des aiguilles d'une montre — de  $120^\circ$  par rapport au point  $(2, 3)$ . Quelles sont les coordonnées des sommets du triangle d'arrivée? En coordonnées homogènes, notre triangle peut se représenter par la matrice **TT** suivante :

$$\mathbf{TT} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On doit traduire par le vecteur  $[-2, -3]$ , effectuer la rotation (ici, en 2D autour de l'origine, c'est comme autour de l'axe des  $z$ ) et traduire de nouveau par le vecteur  $[2, 3]$ . La matrice suivante fera le travail :

$\mathbf{MM} = \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$  où

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \cos(120^\circ) & -\sin(120^\circ) & 0 \\ \sin(120^\circ) & \cos(120^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les calculs (les figures 10a à 10d) sont refilés à la machine, après avoir défini toutes ces matrices. En approximant la réponse, nous trouvons que les coordonnées des sommets du triangle où l'on aboutit sont, avec 2 décimales,  $(7.46, 1.54)$ ,  $(6.83, 4.63)$  et  $(7.83, 2.90)$ . La figure 11e a été produite avec le logiciel — faisable aussi avec la calculatrice mais plus difficile! — en utilisant l'application « Graphiques et géométrie » et des outils du classeur comme « figures » et « transformations ».



Figure 11a

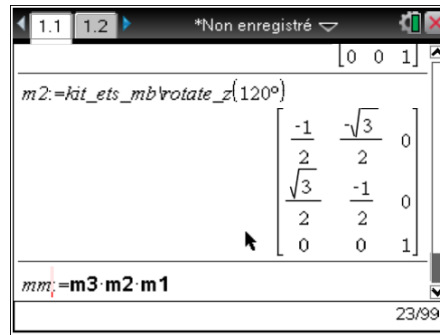


Figure 11b

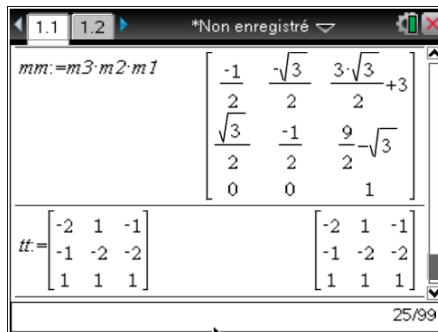


Figure 11c

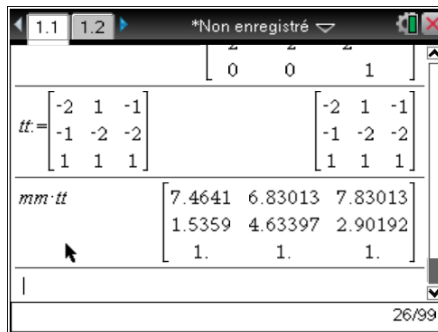


Figure 11d

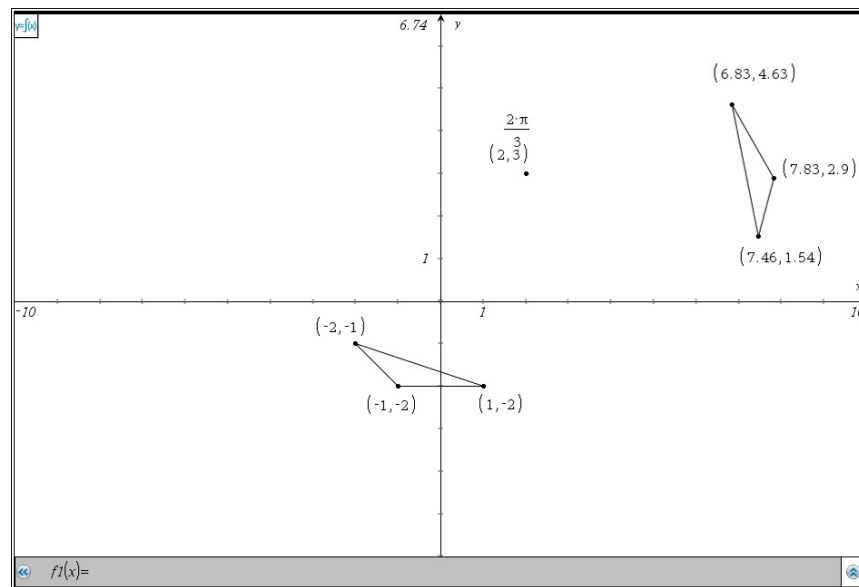


Figure 11e

## Des exemples pour des cours plus avancés, des exemples variés

**Exemple 12 :** si  $a$  et  $b$  sont 2 nombres réels, on sait que, à cause de la bijection  $a + bi \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ,

$$e^{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} t} = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}.$$

Notre fonction « expmat » confirme :

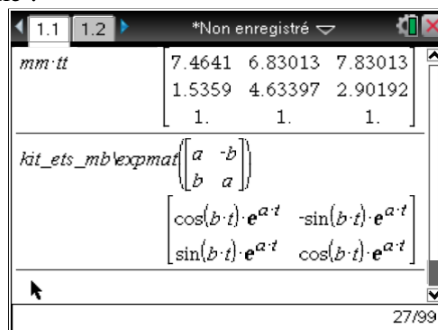


Figure 12a

Les valeurs propres de la matrice  $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$  sont précisément  $a \pm bi$ . Si l'on veut les trouver, il faut alors utiliser la fonction « eigen2 » et non « eigen » : cette dernière par contre, pour une matrice numérique, est préférable à la première :

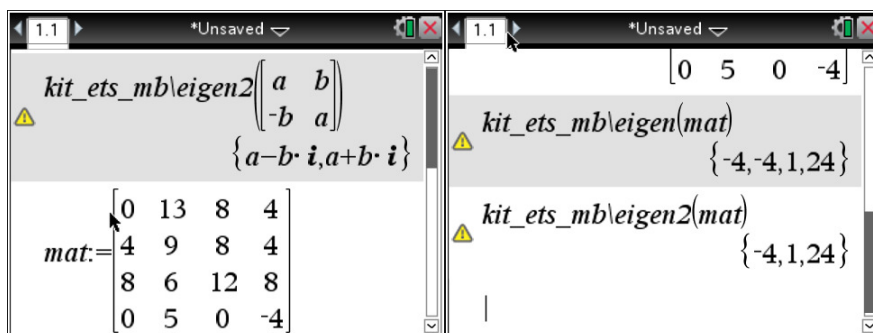


Figure 12b

Figure 12c

**Exemple 13:** si  $A$  est une matrice carrée constante, il est bien connu que la solution du système d'É.D.

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

peut être écrite comme  $y(t) = e^{At} \left( e^{-At_0} y_0 + \int_{t_0}^t e^{-As} g(s) ds \right)$ . C'est ce que fait la fonction « syst\_de ».

Par exemple, résolvons le système 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y + e^{2t}, & x(0) = -1 \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 1, & y(0) = 0 \end{cases}.$$

La solution est alors donnée par



dû être beaucoup plus publicisé !) : posons

$$fc(b, a, x, n) := \text{iterate}\left(b + \frac{a}{w}, w, x, n\right).$$

Cela permet donc d'effectuer la fraction continue

$$b + \frac{a}{b + \frac{a}{\dots\dots\dots b + \frac{a}{b + \frac{a}{x}}}}$$

où il y a  $n$  divisions. Par exemple, puisque le *nombre d'or*  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033.....$  – la solution positive

de l'équation quadratique  $x^2 - x - 1 = 0$  — satisfait l'équation  $x = \frac{1}{1-x}$ , on peut en générer une suite d'approximations rationnelles en simplifiant  $fc(1, 1, x, n)$ . On peut aussi l'approcher, utilisant la fonction « iterate » par des radicaux imbriqués puisque le nombre d'or satisfait aussi l'équation  $x = \sqrt{x+1}$ .





Notez que l'éditeur de suites de la calculatrice ou une définition utilisant des fonctions par morceaux — très facile avec Npsire CAS — peut aussi servir pour faire ce genre de calculs. Par contre les calculs peuvent être lents avec une fonction récursive. L'exemple 15 va dans ce sens.

**Exemple 15:** quand on définit une suite par récurrence, utilisant les modèles, les calculs sont lents (mais exacts) alors qu'ils sont rapides (mais en numériques) si l'on passe par le mode graphique « suites ». La fonction « iterate » peut alors être très utile. Par exemple, considérons la suite de Fibonacci qu'on peut définir par

$$fibo(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ fibo(n-1) + fibo(n-2), & n \geq 2 \end{cases}$$

Avec Npsire CAS, on peut faire ceci faire de même mais (vérifiez-le) ça sera assez long pour obtenir  $fibo(30) = 832\,040$ .

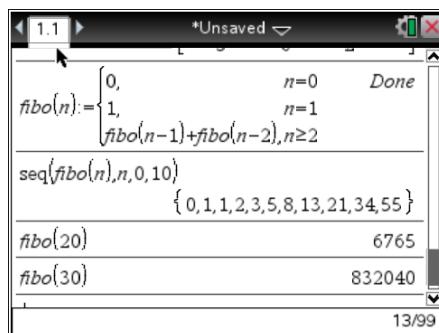


Figure 15a

On trouvera très rapidement  $fibo(30)$  et même pour des entiers supérieurs à 30 si l'on passe par la fonction « iterate » comme suit :

$$fib(n) := iterate([i, i+j], [j, i], [0, 1], n)$$

On considère alors la 1<sup>ière</sup> colonne de cette matrice et on en extrait son dernier élément.

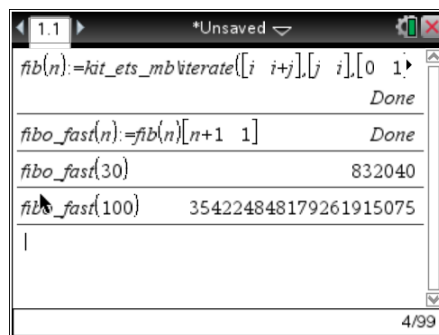


Figure 15b

On pourra aussi se servir de « List & Spreadsheet » : on génère ensuite la suite (ici, par défaut,  $n$  commence à 1), retourne dans une page de calcul et l'évaluation est super rapide et en mode exact !

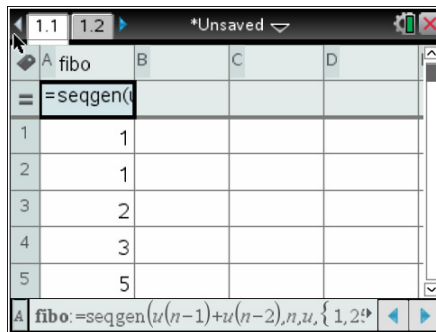


Figure 15c

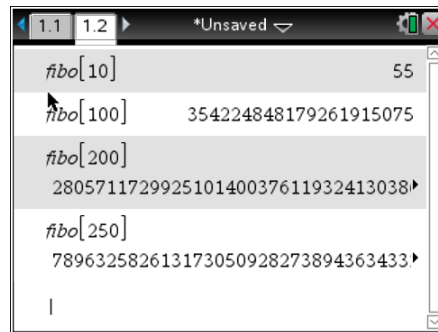


Figure 15d

**Exemple 16:** soit la fonction d'une variable complexe  $f(z) = \frac{z}{(z^2 + 1)(4z - 7)^3}$ . On veut calculer

l'intégrale curviligne de  $f$  le long d'un parcours fermé simple  $C$  englobant  $i$ ,  $7/4$  mais pas  $-i$  en utilisant le théorème des résidus.

Le pôle est simple en  $z = i$  et est triple en  $z = 7/4$ .

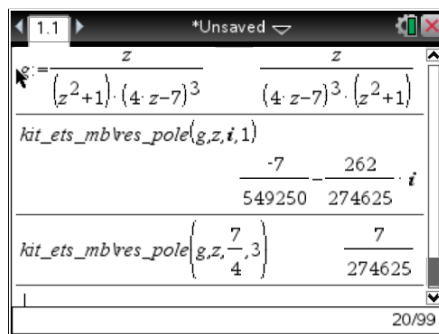


Figure 16a

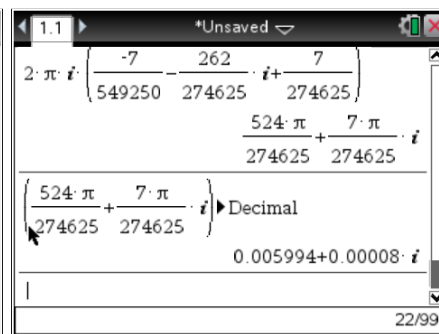


Figure 16b

On peut même vérifier cette réponse en choisissant comme chemin — cela est permis par le principe de déformation des contours — le cercle centré au point  $(1, 1/2)$  et de rayon  $3/2$  :

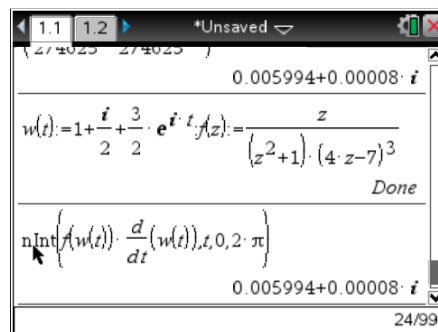


Figure 16c

**Exemple 17 :** la fonction LambertW est définie par  $W(z)e^{W(z)} = z$  ( $ye^y = z \Leftrightarrow y = W_k(z)$ ). Pour des valeurs de  $x$  et de  $y$  réelles, le graphe de  $y = W(x)$  est obtenu, sur Nspire CAS, en faisant tracer la courbe  $x = ye^y$  :

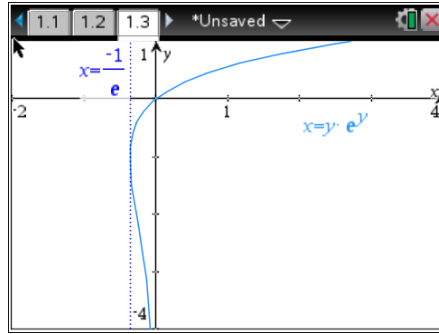


Figure 17a

Un résultat dit que la série de Taylor de  $W(x)$  est donnée par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1} x^n}{n!} = x - x^2 + \frac{3x^3}{2} - \frac{8x^4}{3} + \dots$$

Notre fonction « `taylor_inv` » confirme :

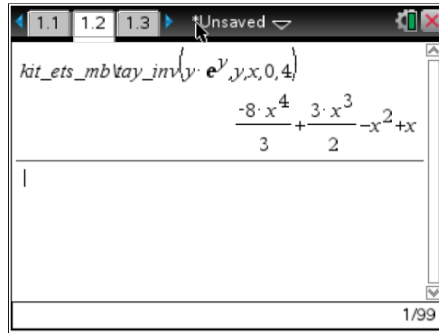


Figure 17b

**Exemple 18 :** soit à effectuer la convolution des 2 signaux suivants : le signal  $x(t)$  à la figure 18a qui contient notamment un terme de la forme  $2\delta(t + 2)$  avec le signal  $h(t)$  à la figure 18b :

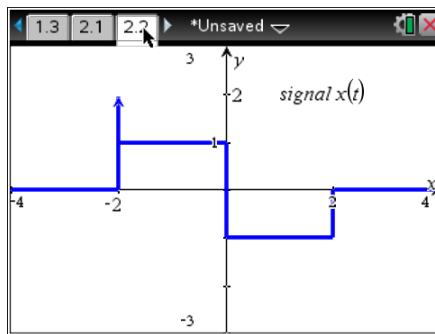


Figure 18a

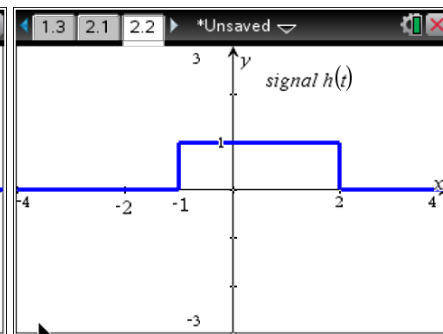


Figure 18b

Tout cela peut se faire à la main (utilisant le fait que convoler avec une Dirac translate, il est plus simple de décomposer le signal  $x(t)$  en la somme de 3 signaux et de distribuer sur celui de droite). Notre fonction « `convol_gen` » peut trouver le résultat : le signal  $x(t)$  est défini, dans un premier temps, par utilisation d'une « fonction impulsion approchée » plus la somme de 2 indicatrices; le signal  $h(t)$  par une unique indicatrice.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{2}{a} \cdot \text{kit\_ets\_mb}\chi(-2, t, -2+a) + \text{kit\_ets\_mb}\chi(-2, t, 0) - \text{kit\_ets\_mb}\chi(0, t, 2) \\
 h(t) &= \text{kit\_ets\_mb}\chi(-1, t, 2) \\
 \text{kit\_ets\_mb}\text{convol\_gen}(x(t), h(t), t) &= \frac{-(2 \cdot |t-a+3| - 2 \cdot |t-a| - (a+2) \cdot |t+3| + 2 \cdot a \cdot |t+1| - a \cdot |t-1| - 2 \cdot a \cdot |t-2| + a \cdot |t-4| + (a+2) \cdot |t|)}{2 \cdot a} \\
 \lim_{a \rightarrow 0^+} &\left( \frac{-(2 \cdot |t-a+3| - 2 \cdot |t-a| - (a+2) \cdot |t+3| + 2 \cdot a \cdot |t+1| - a \cdot |t-1| - 2 \cdot a \cdot |t-2| + a \cdot |t-4| + (a+2) \cdot |t|)}{2 \cdot a} \right) \\
 &= \frac{2 \cdot \text{sign}(t+3) + |t+3| - 2 \cdot |t+1| + |t-1| + 2 \cdot |t-2| - |t-4| - 2 \cdot \text{sign}(t) - |t|}{2}
 \end{aligned}$$

Figure 18c

On trace ensuite le graphique du résultat : il apparaît à la figure 18d.

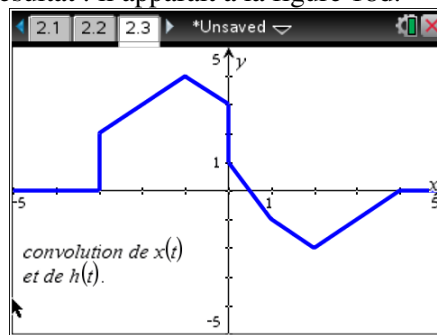


Figure 18d

Notez que le résultat est discontinue en  $t = -3$  et en  $t = 0$  à cause de la présence de la fonction de Dirac  $2\delta(t+2)$ .

### Des exemples d'utilisation de fonctions provenant de la librairie Kit\_ETS\_FH

**Exemple 19 :** quelle est la valeur de l'intégrale définie  $I = \int_{-1}^4 \text{sign}(2x-3) \text{sign}(5x+4) x^2 dx$  ?

Nspire CAS ne peut évaluer cette intégrale définie (retourne « undef » sauf si l'on approxime) :

$\int_1^4 (\text{sign}(2 \cdot x - 3) \cdot \text{sign}(5 \cdot x + 4) \cdot x^2) dx$	undef
$\text{approx} \left( \int_1^4 (\text{sign}(2 \cdot x - 3) \cdot \text{sign}(5 \cdot x + 4) \cdot x^2) dx \right)$	19.4167
$\int \text{sign}(2 \cdot x - 3) \cdot \text{sign}(5 \cdot x + 4) \cdot x^2 dx$	$\int x^2 \cdot \text{sign}((2 \cdot x - 3) \cdot (5 \cdot x + 4)) dx$

Figure 19a

La fonction « integral2 » de Fred donne le résultat instantanément, procurant une primitive continue :

$kit\_ets\_fh \backslash integral2(\text{sign}(2 \cdot x - 3) \cdot \text{sign}(5 \cdot x + 4) \cdot x^2, x)$	$\left( \left( \frac{x^3}{3} - \frac{9}{8} \right) \cdot \text{sign}(2 \cdot x - 3) - \frac{3887}{3000} \right) \cdot \text{sign}(5 \cdot x + 4)$	
$primi(x) := \left( \left( \frac{x^3}{3} - \frac{9}{8} \right) \cdot \text{sign}(2 \cdot x - 3) - \frac{3887}{3000} \right) \cdot \text{sign}(5 \cdot x + 4)$		Done
$primi(4) - primi(1)$	$\frac{233}{12}$	
$\frac{233}{12} \rightarrow \text{Decimal}$	19.4167	

Figure 19b

Voici les graphes de l'intégrande (en bleu) et de la primitive « primi » en rouge :

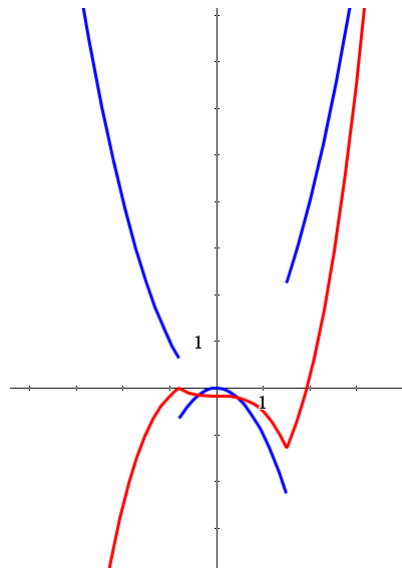


Figure 19c

Terminons cet exemple en effectuant le calcul à la main en se servant de la formule d'intégration

$$\int \text{sign}(ax + b) f(x) dx = \text{sign}(ax + b) \left( \int f(x) dx - \text{Subst} \left( \int f(x) dx, x, -\frac{b}{a} \right) \right).$$

En premier, calculons l'intégrale indéfinie  $J = \int \text{sign}(2x - 3) \text{sign}(5x + 4) x^2 dx$ .

Posons  $f(x) = \text{sign}(5x+4)x^2$ ,  $a = 2$  et  $b = -3$ . Alors  $J = \text{sign}(2x-3) \left( G(x) - G\left(\frac{3}{2}\right) \right)$  où  $G(x)$  est

donnée par  $\int \text{sign}(5x+4)x^2 dx$ . Pour calculer  $G$ , nous appliquons la règle de nouveau :

$$G(x) = \int \text{sign}(5x+4)x^2 dx = \text{sign}(5x+4) \left( \frac{x^3}{3} - \frac{\left(-\frac{4}{5}\right)^3}{3} \right) = \text{sign}(5x+4) \left( \frac{x^3}{3} + \frac{64}{375} \right).$$

$$\text{Alors } G(x) - G\left(\frac{3}{2}\right) = \left( \frac{x^3}{3} + \frac{64}{375} \right) \text{sign}(5x+4) - \frac{3887}{3000}.$$

$$\text{Ainsi, } J = \int \text{sign}(2x-3) \text{sign}(5x+4)x^2 dx = \text{sign}(2x-3) \left( \left( \frac{x^3}{3} + \frac{64}{375} \right) \text{sign}(5x+4) - \frac{3887}{3000} \right). \text{ Cette}$$

réponse semble différente de celle donnée à la figure 19b. Nous avons la présence de 2 facteurs « sign » et nous avons factorisé  $\text{sign}(2x-3)$  mais nous aurions pu factorisé  $\text{sign}(5x+4)$  à la place, ce qui aurait donné :

$$J_2 = \int \text{sign}(5x+4) \text{sign}(2x-3)x^2 dx = \text{sign}(5x+4) \left( H(x) - H\left(-\frac{4}{5}\right) \right)$$

$$\text{avec } H(x) = \text{sign}(2x-3) \left( \frac{x^3}{3} - \frac{9}{8} \right). \text{ Mais alors } J_2 = \text{sign}(5x+4) \left( \left( \frac{x^3}{3} - \frac{9}{8} \right) \text{sign}(2x-3) - \frac{3887}{3000} \right), \text{ ce}$$

qui est bien la primitive trouvée par la fonction « integral2 » de Fred à la figure 19b. Les 2 primitives  $J$  et  $J_2$  diffèrent par la constante  $3887/3000$  comme on peut le vérifier en soustrayant les 2 réponses. En posant  $J_2$  comme étant la fonction « primi2(x) », nous avons donc :

$\text{primi}(x) := \left( \left( \frac{x^3}{3} - \frac{9}{8} \right) \cdot \text{sign}(2 \cdot x - 3) - \frac{3887}{3000} \right) \cdot \text{sign}(5 \cdot x + 4)$	Done
$\text{primi}(4) - \text{primi}(1)$	$\frac{233}{12}$
$\frac{233}{12} \rightarrow \text{Decimal}$	19.4167
$\text{primi2}(x) := \text{sign}(2 \cdot x - 3) \cdot \left( \left( \frac{x^3}{3} + \frac{64}{375} \right) \cdot \text{sign}(5 \cdot x + 4) - \frac{3887}{3000} \right)$	Done
$\text{primi2}(4) - \text{primi2}(1)$	$\frac{233}{12}$

Figure 19d

**Exemple 20 :** en oubliant les segments verticaux du graphique de la figure 18d — qui ne font pas partie du graphique en fait ! —, remettons en morceaux la réponse de la figure 18d :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{-\left(2 \cdot |t-a+3| - 2 \cdot |t-a| - (a+2) \cdot |t+3| + 2 \cdot a \cdot |t+1| - a \cdot |t-1| - 2 \cdot a \cdot |t-2| + a \cdot |t-4| + (a+2) \cdot |t|\right)}{2 \cdot a} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{2 \cdot \text{sign}(t+3) + |t+3| - 2 \cdot |t+1| + |t-1| + 2 \cdot |t-2| - |t-4| - 2 \cdot \text{sign}(t) - |t|}{2} \\
 & \text{partie1} := \frac{|t+3| - 2 \cdot |t+1| + |t-1| + 2 \cdot |t-2| - |t-4| - |t|}{2} \quad \text{partie2} := \text{sign}(t+3) - \text{sign}(t) \quad \text{sign}(t+3) - \text{sign}(t) \\
 & \text{kit\_ets\_fn}\backslash \text{signtopiece}(\text{partie2}, t) \quad \left( \begin{cases} 1, & t > -3 \\ -1, & t \leq -3 \end{cases} \right) - \left( \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t \leq 0 \end{cases} \right) \\
 & \text{kit\_ets\_fn}\backslash \text{conv\_abs\_to\_p}(\text{partie1}, t) \quad \begin{cases} 0, & t > 4 \text{ and } t < \infty \\ t-4, & t > 2 \text{ and } t \leq 4 \\ -t, & t > 1 \text{ and } t \leq 2 \\ 1-2 \cdot t, & t > 0 \text{ and } t \leq 1 \\ 1-t, & t > -1 \text{ and } t \leq 0 \\ t+3, & t > -3 \text{ and } t \leq -1 \\ 0, & t > -\infty \text{ and } t \leq -3 \end{cases} \\
 & \text{kit\_ets\_fn}\backslash \text{grouper\_fct} \left( \left( \begin{cases} 1, & t > -3 \\ -1, & t \leq -3 \end{cases} \right) - \left( \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t \leq 0 \end{cases} \right) + \begin{cases} 0, & t > 4 \text{ and } t < \infty \\ t-4, & t > 2 \text{ and } t \leq 4 \\ -t, & t > 1 \text{ and } t \leq 2 \\ 1-2 \cdot t, & t > 0 \text{ and } t \leq 1 \\ 1-t, & t > -1 \text{ and } t \leq 0 \\ t+3, & t > -3 \text{ and } t \leq -1 \\ 0, & t > -\infty \text{ and } t \leq -3 \end{cases}, t \right) \quad \begin{cases} 0, & 4 < t < \infty \\ t-4, & 2 < t \leq 4 \\ -t, & 1 < t \leq 2 \\ 1-2 \cdot t, & 0 < t \leq 1 \\ 3-t, & -1 < t \leq 0 \\ t+5, & -3 < t \leq -1 \\ 0, & -\infty < t \leq -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Figure 20**

Notre objectif était de pouvoir répondre par une fonction par morceaux lorsque les données étaient elles-mêmes en morceaux.