R&E-SOURCE *https://journal.ph-noe.ac.at*
Online Journal for Research and Education
Ausgabe 15, April 2021, ISSN: 2313-1640

Philosophische Fragen und didaktische Überlegungen zu einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht

Jürgen Maaß[1] und Stefan Götz[2]

Zusammenfassung

Wir beobachten einen wachsenden Trend zu Beispielen und Aufgaben, die mehr Realitätsbezug, mehr Lernen für das Leben im Mathematikunterricht versprechen. Wir sehen daher einen ebenso steigenden Bedarf, die in diesem Zusammenhang in den einschlägigen Veröffentlichungen verwendeten Begriffe wie Realität oder Modellierung besser als bisher auch theoretisch im mathematikdidaktischen Zusammenhang zu durchdenken. Dieser Bedarf erwächst sowohl aus Anforderungen an die Qualität der geleisteten Arbeit als auch im Hinblick auf die Wissenschaftlichkeit (und damit die Reputation [1]) der Mathematikdidaktik in den Augen anderer Wissenschaften. Die Philosophie bietet zur theoretischen Fundierung seit der Zeit der alten Griechen eine Vielzahl – sich widersprechender – erkenntnistheoretischer Überlegungen an. In der Neuzeit sind kontroverse wissenschaftstheoretische und wissenschaftssoziologische Theorien hinzugekommen. Wir haben für diesen Diskussionsbeitrag eine kleine Auswahl von aus unserer Sicht relevanten Theorien getroffen, um einen Startpunkt zu setzen. Im letzten Abschnitt zur erkenntnistheoretischen Sicht auf Modelle und Modellierungen haben wir selbst Theorieentwicklung betrieben. Wir wissen, dass wir angesichts der großen Theorienvielfalt keine Chance haben, im Rahmen eines Beitrages die einzig richtige Definition der Basisbegriffe so zu fixieren, dass die Mathematikdidaktik beruhigt darauf aufbauen kann. Selbstverständlich lässt sich über alle skizzierten Autorinnen und Autoren sowie die Sekundärliteratur über sie weit mehr schreiben als hier Platz hat.

Schlüsselwörter:	*Keywords:*
Realität	Reality
Philosophie	Philosophy
Modell	Modelling
Mathematikunterricht	Teaching mathematics
Mathematikdidaktik	Mathematics education

1 Mathematik, Realität und Wahrheit: die Erkenntnisfrage

In den Augen vieler Menschen ist Mathematik ein Garant für Wahrheit. Nicht nur Naturwissenschaften, sondern auch Sozial- und Geisteswissenschaften versuchen, sich auf mathematische Forschungsmethoden zu stützen. In politischen und gesellschaftlichen Diskursen sehen wir ebenfalls häufig mathematische Argumente, etwa bei Modellen oder in überzeugender Grafik dargestellten Statistiken zur Klimaentwicklung, zu einer Ökosteuer oder einer Autobahnmaut. Der Wunsch, sich auf etwas ganz fest und sicher verlassen zu können, ist psychologisch sehr verständlich. Die in allen Lehrplänen zur Recht geforderte „Erziehung zur Mündigkeit" bzw. zur Kritikfähigkeit verlangt aber von uns, uns selbst und unseren Schülerinnen und Schülern deutlich zu machen, in welch eingeschränktem innermathematischen Sinne die Aussagen der Wissenschaft Mathematik „wahr" sind: „Erkenntnistheoretischer Aspekt: Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt. Sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen. Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen." (NOSt, 2018, Aspekte der Mathematik). In Deutschland ist in den Lehrplänen im Zusammenhang mit Erkenntnisgewinnung meist sofort vom Modellieren die Rede, in Bayern heißt es dazu: „Die zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts am Gymnasium ist es daher, den Schülern neben konkreten mathematischen

[1] Johannes-Kepler-Universität Linz, Altenbergerstraße 69, 4040 Linz.
E-Mail: juergen.maasz@jku.at
[2] Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Oskar Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien.

Kenntnissen und Arbeitsweisen auch allgemeinere Einsichten in Prozesse des Denkens und der Entscheidungsfindung zu vermitteln, die für eine aktive und verantwortungsbewusste Mitgestaltung der Gesellschaft von Bedeutung sind. Dabei wird den jungen Menschen deutlich, dass Mathematik ein hilfreiches Werkzeug zur Analyse und zur Erkenntnisgewinnung sein kann, […]“ (ISB, o. J.). Ganz besonders wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass die „Wahrheit“ von Anwendungen der Mathematik, etwa volkswirtschaftlichen Modellen oder technischen Modellrechnungen, keinesfalls automatisch durch die Verwendung bewiesener mathematischer Aussagen gesichert ist. Wir unterscheiden die „Wahrheit“ formal-axiomatischer reiner Mathematik (vgl. dazu Abschnitt 2) von der „Wahrheit“ (eigentlich besser: Brauchbarkeit, Vorhersagesicherheit, empirisch erwiesener Realitätsnähe etc. – vgl. Abschnitt 5) verschiedener Anwendungen der Mathematik. Um einen didaktischen Appell gleich hier zu setzen: Modellkritik ist heute ein wichtiger Bestandteil der geforderten Kritikfähigkeit mündiger Bürgerinnen und Bürger. Deshalb können wir mit Freude feststellen, dass viele didaktische Aspekte dieser Kritikfähigkeit, etwa im Bereich Statistik und Daten (siehe zum Beispiel das Onlinearchiv von „Stochastik in der Schule“[2]), bereits mannigfach erörtert sowie in Unterrichtsvorschläge umgesetzt worden sind (vgl. die Mathematik-Unterrichts-Einheiten-Datei MUED[3]).

Nach unserer Kenntnis von Geschichte und Anthropologie haben sich zu allen Zeiten Menschen mit Fragen nach der Realität beschäftigt, ihrem Werden und Vergehen, ihrem Sinn und unseren Möglichkeiten, Einfluss zu nehmen. Oft gab und gibt es auf der Suche nach überzeugenden Antworten fließende Übergänge zu Religionen, von dem Glauben an eine beseelte Natur bis zu dem an ein allmächtiges Wesen, das alles erschaffen hat: „Das ehrfürchtige Staunen vor der Folgerichtigkeit und Macht mathematischer Erkenntnis, welches so nahe beim mystischen Erleben liegt – so nahe, daß nicht wenige der tiefsten Denker die Grenze überschritten: PYTHAGORAS, KEPLER, NEWTON, in gewissen Maße EINSTEIN. – Das Ahnen einer verborgenen idealen Wirklichkeit, zu der uns das mathematische Denken Zutritt gewährt: PLATON; – die aber nur einer übermenschlichen, göttlichen Intelligenz in vollem Maße erkennbar ist: GAUSS (ein Gedanke, der eine überraschende Auferstehung im „Platonismus“ moderner mathematischer Philosophie, mitten im nüchternen Skeptizismus des XX. Jahrhunderts, und frei von religiöser Einkleidung, feierte). – Die Mathematik als Bürgschaft menschlicher Vernünftigkeit: VOLTAIRE; – und die Übersteigerung der hierin enthaltenen geistigen Sehnsucht zu einem verzweifelten Sich-anklammern an mathematische Gewißheit als Pfand absoluter Wahrheit: HILBERT, […]“ (Wittenberg, 1963, S. 49).

Für die ontologische Frage in der Mathematik besonders relevant sind zwei Philosophen, deren konträre Ansichten in der Geschichte der Mathematik eine mehr oder weniger große Rolle gespielt haben: Platon und Aristoteles (vgl. Reichel, 1988).

2 Entdecken oder erfinden wir Mathematik?

2.1 Platon und Aristoteles

Nach Platon (~ 400 v. Chr.) entdecken Mathematiker und Mathematikerinnen nur, was in der Welt der Ideen schon vorhanden ist: „Die Geometer aber und Astronomen und Rechenmeister, [...] sie alle bringen nämlich ihre Figuren und sonstigen Zeichen nicht etwa hervor, sondern sie erforschen nur, was schon da ist“ schrieb Platon (Platon, 1994, Euthydemos 290b).

Im „Staat“ führt Sokrates aus, „dass sie (die Geometer, Anm. JM und SG) sich der sichtbaren Gestalten bedienen und immer von diesen reden, während den eigentlichen Gegenstand ihres Denkens nicht diese bilden, sondern jene, deren bloße Abbilder diese sind. Denn das Quadrat an sich ist es und die Diagonale an sich, um derentwillen sie ihre Erörterungen anstellen, nicht aber dasjenige, welches sie durch Zeichnung entwerfen.“ (Platon, 1994, Der Staat 511a). Hier bietet sich gleich eine Möglichkeit, den Unterschied von Ideen und deren sichtbaren Gestalten im Unterricht zu thematisieren. Fordern Sie einmal Ihre Schüler und Schülerinnen dazu auf, zwei Punkte A und B zu zeichnen und diese mit der kürzesten Linie s zu verbinden. So entsteht die Strecke s. Was tun die Schüler bzw. Schülerinnen? Sie markieren zwei Punkte entweder als Klekse oder kleine Kreuze auf dem Papier und verbinden sie mit einem Lineal. Können Sie dann die Punkte und die Strecke sehen? Selbstverständlich nicht! Ein Punkt ist nach der Definition von Euklid etwas ohne Ausdehnung, unteilbar klein. Eine Strecke hat nur eine Dimension, die Länge. Wenn Sie einen Strich auf dem Papier oder auf der Tafel sehen, gelingt das nur deshalb, weil Sie eine Fläche sehen, also vermutlich ein Rechteck, das zwei sehr kurze Seiten hat (die Breite des Striches) und zwei lange Seiten – die Verbindung der beiden Punkte. Korrekt gesprochen dürfen Sie also nur die Aufgabe stellen: Zeichnet eine Abbildung **der Idee** von zwei Punkten *A* und *B* und ihrer Verbindung mit der kürzesten Linie *s*. In Platons Welt der Ideen entsteht eine Strecke, in der Schulklasse jedoch ein längliches Rechteck, mit dessen Hilfe Geometrieunterricht stattfinden kann.

Platons Auffassung hat weitere große Auswirkungen auf den behaupteten oder angenommenen Wahrheitsgehalt und Realitätsbezug mathematischer Theorien, wie W. Stegmüller erläutert: „Nach der klassischen (platonistischen) Auffassung ist jede sinnvolle mathematische Aussage wahr oder falsch, auch dann, wenn für uns (bisher oder vielleicht auch immer) keine Möglichkeit besteht zu entscheiden, ob das eine oder das andere der Fall ist; denn die mathematischen Sachverhalte bestehen unabhängig von ihrem Erkannt-Werden oder Nicht-Erkannt-Werden durch uns. Der Fortschritt der mathematischen Erkenntnis besteht danach im Prinzip darin, dass für eine zunehmend größere Klasse von Aussagen festgestellt wird, dass es sich um wahre Sätze handelt, d. h. um Sätze, die mit den ‚an sich' bestehenden mathematischen Sachverhalten übereinstimmen. Die Forschungstätigkeit des Mathematikers gleicht danach der eines Entdeckers: Analog wie ein Biologe bei der Durchforschung eines neuen Landstriches bisher unbekannte Pflanzen und Tiere vorfindet, so entdeckt der Mathematiker neue Begriffe und Beziehungen zwischen ihnen, die er in Axiomen und Lehrsätzen festhält." (Stegmüller, 1978, S. 675).

Formal-axiomatische Mathematik, wie sie in der universitären Forschung an Universitäten betrieben wird, hat eine große Nähe zum Platonismus. Wir kommen in Abschnitt 2.3 darauf zurück. Für das Modellieren, die Anwendung von Mathematik im realitätsbezogenen Mathematikunterricht können wir nicht akzeptieren, dass alle fertigen mathematischen Modelle schon in der Welt der Ideen vorhanden sind. Unter Umständen können wir im Mathematikunterricht damit leben, dass deskriptive Modelle die Natur so beschreiben und erklären wollen, wie sie ist (wie sie in der Welt der Ideen ist oder wie Gott sie geschaffen hat oder wie sie sich im Laufe der Evolution entwickelt hat). Bei normativen Modellen etwa zu Steuern oder anderen Vorschriften und ihren möglichen Auswirkungen brauchen wir eine andere philosophische Basistheorie, etwa aus dem wissenschaftssoziologischen oder marxistischen Spektrum (Abschnitte 2.4 und 2.5).

Nun zur – aus unserer heutigen Sicht so bezeichneten [4] – konstruktivistischen Gegenposition zu Platon zurückgehend auf Aristoteles (~ 350 v. Chr.): „Demgegenüber versteht Aristoteles Mathematik als Produkt von Abstraktion aus der empirischen Wirklichkeit, auf die sie darum auch wieder anwendbar ist", heißt es mit dem Hinweis auf *Aristoteles: Metaphysik* im Lexikon der Mathematik unter der Überschrift „Philosophie der Mathematik"[5].

Wir finden Spuren dieser Auffassung in intuitionistischer Mathematik [etwa bei L. E. J. Brouwer (1881 – 1966), vgl. Abschnitt 2.3] und konstruktiver Wissenschaftstheorie [etwa bei E. v. Glasersfeld (1917 – 2010) oder bei P. Lorenzen (1915 – 1994)], aber auch bei Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951): „Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker." (Wittgenstein, 1974, § 168, S. 99).

2.2 Kant und die Geometrie

Wir setzen unsere Reise durch die Theoriegeschichte mit I. Kant (1724 – 1804) fort: „Allein Urteile mögen nun einen Ursprung haben, welchen sie wollen, oder auch ihrer logischen Form nach beschaffen sein, wie sie wollen, so gibt es doch einen Unterschied derselben den Inhalten nach, vermöge dessen sie entweder bloß erläuternd sind und zum Inhalt der Erkenntnis nichts hinzu tun, oder erweiternd und die gegebene Erkenntnis vergrößern; die ersteren werden analytische, die zweiten synthetische Urteile genannt." (Kant, 1781/1979, S. 14 f.). Kant charakterisierte die Mathematik als Sammlung von „synthetischen Urteilen a priori". Neue Erkenntnis ist also Menschenwerk, Synthese.

Die Prominenz von Kant hatte auch eine Kehrseite, eine Art Denkverbot, wovon etwa C. F. Gauß (1777 – 1855) sehr betroffen war: „Auch über ein anderes Thema, das bei mir fast schon 40 Jahre alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten Gründe der Geometrie [...] Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird dies auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böotier scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte." (zit. nach Wußing, 1982, S. 52 f.). Dazu A. Heyting (1898 – 1980) über das Verhältnis von Mathematik und Metaphysik: „We have no objection against a mathematician privately admitting any metaphysical theory he likes [...] In fact all mathematicians […] are convinced that in some sense mathematics bear eternal truth, but when trying to define precisely this sense, one gets entangled in a maze of metaphysical difficulties. The only way to avoid them is to banish them from mathematics." (zit. nach Meschkowski, 1965, S. 33). Gauß hatte die Überzeugung: „Gerade in der Unmöglichkeit zwischen [...] Euklidischer und Nichteuklidischer Geometrie a priori zu entscheiden, liegt der klare Beweis, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung." (zit. nach Wußing, 1982, S. 56). Dennoch veröffentlichte er seine Ergebnisse nicht.

N. I. Lobatschewski hat in einem Vortrag an der Universität Kasan am 11.2.1826 als erster seine Forschungen zur nichteuklidischen Geometrie[6] öffentlich vorgestellt. Er hat seine Bemühungen auf eine bemerkenswert moderne Weise begründet: „Wie das auch sein mag, die neue Geometrie, für die nunmehr der Grund gelegt ist, kann, wenn sie auch in der Natur nicht besteht, nichtsdestoweniger in unserer Vorstellung bestehen, und wenn sie auch bei wirklichen Messungen außer Gebrauch bleibt, so eröffnet sie doch ein neues weites Feld für die Anwendungen der Geometrie und Analysis aufeinander." (Lobatschewski, 1899, S. 83).

2.3 Cantor und die Grundlagenkrise: Formales und Reales in der Mathematik

Mit diesem Argument weist Lobatschewski auf einen für die weitere Entwicklung der Mathematik sehr wichtigen Streitpunkt hin. In der Geschichte der Mathematik der Neuzeit bis zum 19. Jahrhundert gingen Naturwissenschaft und Mathematik Hand in Hand, Mathematiker bzw. Mathematikerinnen waren nicht „reine" Mathematiker bzw. Mathematikerinnen im heutigen Sinne. Mit der nichteuklidischen Geometrie begannen sich die Wege zu trennen. Weitere Grenzsteine waren bestimmte Phänomene mit dem Unendlichen in der Analysis und insbesondere G. Cantors „Mengenlehre". Das Formale als Begründung der Existenz hielt Einzug in die Mathematik. Der Streit ging um die Frage, ob es zulässig ist, rein formal herleitbare, aber nicht anschaulich vorstellbare mathematische Objekte zu definieren und zu untersuchen wie etwa „pathologische" Funktionen (z. B. in Boese und Luther, 1981) oder bestimmte von G. Cantor (1845 – 1918) definierte unendliche (transfinite) Mengen (vgl. Volkert, 1997). Schon sehr früh in der mathematischen Ausbildung kann dazu die Aussage, dass die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind zu den geraden Zahlen $\mathbb{N}$g, begründet werden: die Funktion $f\colon \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}_{\mathrm{g}}, f(n) = 2n$, ist bijektiv. Oder Hilberts Hotel mit abzählbar vielen Zimmern, das voll belegt ist: erscheint ein weiterer potentieller Gast, so kann dieser ohne weiteres untergebracht werden. Der Hotelinhaber legt ihn in Zimmer Nr. 1, den Gast von Zimmer Nr. 1 in Zimmer Nr. 2 usw. Damit ist wieder jeder Gast in einem Zimmer untergebracht (vgl. Heuser, 1986a, S. 139).

„Wir können in zwei Bedeutungen von der Wirklichkeit oder Existenz der ganzen Zahlen, der endlichen sowie der unendlichen sprechen [...] Einmal dürfen wir die ganzen Zahlen insofern für wirklich ansehen, als sie auf Grund von Definitionen in unserem Verstande einen ganz bestimmten Platz einnehmen, von allen übrigen Bestandteilen unseres Denkens aufs Beste unterschieden werden, zu ihnen in bestimmten Beziehungen stehen und somit die Substanz unseres Geistes in bestimmter Weise modifizieren [...] Dann kann aber auch den Zahlen insofern Wirklichkeit zugeschrieben werden, als sie für einen Ausdruck oder ein Abbild von Vorgängen und Beziehungen in der dem Intellekt gegenüberstehenden Außenwelt gehalten werden müssen [...] Bei der durchaus realistischen, zugleich aber nicht weniger idealistischen Grundlage meiner Betrachtungen unterliegt es für mich keinem Zweifel, dass diese beiden Arten der Realität stets sich zusammenfinden." (Cantor, 1932, S. 181).

Die Existenz der mathematischen Gegenstände ist nach Heyting hingegen „nur gesichert, insoweit sie durch Denken bestimmt werden können; ihnen kommen nur Eigenschaften zu, insoweit diese durch Denken an ihnen erkannt werden können. Diese Möglichkeit der Erkenntnis offenbart sich uns aber nur durch das Erkennen selbst. Der Glaube an die transzendente Existenz, der durch die Begriffe nicht gestützt wird, muss als mathematisches Beweismittel zurückgewiesen werden." (Heyting, 1934/1974, S. 106 f.).

Als kleinen Hinweis darauf, dass auch die Mathematiker und Mathematikerinnen durchaus emotional debattiert haben, zitierten wir L. Kronecker (1823 – 1891). Er nannte G. Cantor einen „Verderber der Jugend" (zit. nach Meschkowski, 1973, S. 41). Nicht ganz so extrem äußert sich A. Mostowski (1913 – 1975): „Der einzig konsequente Standpunkt, der sowohl mit dem gesunden Menschenverstand als auch mit der mathematischen Tradition in Einklang steht, ist […] die Annahme, daß Ursprung und letzte ‚raison d´être' (Seinsgrund) des Begriffes Zahl, sowohl der natürlichen als auch der reellen, in der Erfahrung und in der praktischen Anwendbarkeit liegen." (zit. nach Meschkowski, 1965, S. 32).

Rückblickend betrachtet hat sich die (platonistisch-formalistische[7]) Gruppe um Bourbaki durchgesetzt. Innerhalb ihrer eigenen Wissenschaft Mathematik – getrennt von den Naturwissenschaften – haben sie selbst die Regeln dafür festgesetzt, was erlaubt ist und was nicht, was als Mathematik anerkannt wird und was nicht. Allerdings muss an dieser Stelle auch darauf hingewiesen werden, dass manche mathematischen Theorien, die in jener Zeit noch als rein formal und anwendungsfern galten, mittlerweile überraschende und hilfreiche Anwendungsfelder in Naturwissenschaft und Technik eröffnet haben (vgl. Reichel und Zöchling, 1990).

Ein anderer historisch sehr wichtiger Anlass, über das Wesen, die mögliche Begründung, die Wahrheit und den Sinn der Mathematik öffentlich zu debattieren, war G. Cantors „Mengenlehre“ – genauer: ein Fehler in der grundlegenden Definition: „Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten *m* unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von *M* genannt werden) zu einem Ganzen.“ (Cantor, 1932, S. 282).

B. Russell (1872 – 1970) untersuchte die Menge *M* aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Zu dieser Menge gehören z. B. die natürlichen Zahlen, die reellen Zahlen u. v. a. Ist nun *M* selbst ein Element von *M*? Nehmen wir an, *M* sei ein Element von *M*. Daraus folgt nach der Definition, dass *M* die Eigenschaft hat: *M* ist kein Element von *M*. Nehmen wir jedoch an, dass *M* kein Element von *M* ist, folgt gerade aus dieser Eigenschaft, dass *M* ein Element von *M* ist. Da also *M* weder ein noch kein Element von *M* sein kann, muss der Fehler in der Definition von *M* liegen. Die Definition der Menge *M* ist nach Cantors Definition einer Menge jedoch korrekt – deshalb steckt der Fehler bereits in Cantors Definition (vgl. Russell, 1903).

Russells Versuch, die Mathematik anders zu begründen, wird „Logizismus“ genannt. Er hat dabei eine pointierte Aussage über Mathematik formuliert: „Die reine Mathematik besteht lediglich aus Behauptungen, die besagen, dass der und der Satz zutrifft, wenn für irgendetwas die und die Aussage gilt. Wesentlich ist, dass gar nicht erst erörtert wird, ob die erste Aussage tatsächlich wahr ist, und dass auch nicht erwähnt wird, was das Etwas ist, wofür sie vermutlich gilt [...] In der reinen Mathematik gehen wir von bestimmten Ableitungsregeln aus, nach denen wir folgern können, dass, wenn ein Satz wahr ist, dann auch ein zweiter Satz gilt. Diese Ableitungsregeln bilden den Hauptteil der Grundsätze formaler Logik. Wir wählen also irgendeine Hypothese, die uns amüsant erscheint, und leiten die entsprechenden Folgerungen ab. Gilt diese Hypothese für irgendetwas und nicht für eine oder mehrere Einzeltatsachen, dann stellen unsere Deduktionen Mathematik dar. Als Mathematik können wir also das Gebiet bezeichnen, auf dem wir nie wissen, wovon wir eigentlich reden und ob das, was wir sagen, auch wahr ist.“ (Russell, 1901/1967, S. 8 f.).

Russells Versuch der Begründung scheiterte – auf lehrreiche Art – ebenso wie andere formalistische Ansätze. Hier andeuten möchten wir den für die weitere Entwicklung der Mathematik wohl folgenreichsten, aber aus mathematischer Sicht (an Gödel!) ebenfalls gescheiterten Vorschlag von D. Hilbert (1862 – 1943): „Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so dass die eigentliche Mathematik oder die Mathematik im engeren Sinne zu einem Bestand an Formeln wird. Zu der eigentlichen […] formalisierten Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine Metamathematik, die zur Sicherung jener notwendig ist, in der – im Gegensatz zu den rein formalen Schlussweisen der eigentlichen Mathematik – das inhaltliche Schließen zur Anwendung kommt, aber lediglich zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome. In dieser Metamathematik wird mit den Beweisen der eigentlichen Mathematik operiert, und diese letzteren bilden selbst den Gegenstand der inhaltlichen Untersuchung. Auf diese Weise vollzieht sich die Entwicklung der mathematischen Gesamtwissenschaft in beständigem Wechsel auf zweierlei Art: durch Gewinnung neuer beweisbarer Formeln aus den Axiomen mittels formalen Schließens und andererseits durch Hinzufügung neuer Axiome nebst dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit mittels inhaltlichen Schließens.“ (Hilbert, 1923, S. 180).

Wichtig für die weitere Entwicklung der Mathematik war die hier vorgeschlagene Arbeitsteilung in die große Mehrheit der Mathematiker und Mathematikerinnen, die Mathematik „machen“, und eine kleine Gruppe von Spezialisten und Spezialistinnen für Grundlagenforschung, die über Mathematik und Logik nachdenken. Diese Arbeitsteilung bedeutet für die große Mehrheit eine wesentliche Arbeitserleichterung, da sie sich um die schwierigen und noch immer offenen Grundlagenprobleme nicht kümmern müssen. Aus dieser Sicht wird diese „Lösung“ ausdrücklich begrüßt: „Es wäre für uns (Bourbaki, Anm. JM und SG) uninteressant, auch nur überschlagsmäßig den unaufhörlichen und leidenschaftlichen Polemiken nachzugehen, die dieses Problem aufwirft, welches metaphysischen oder theologischen Phantastereien einen ungewöhnlich günstigen Nährboden bietet. Wir wollen nur auf den Standpunkt eingehen, an dem seit der Antike die Mehrzahl der Mathematiker und Mathematikerinnen festhält. Sie besteht im Wesentlichen darin, den Streit, da man ihn nicht in unwiderlegbarer Weise beilegen kann, zu verweigern.“ (Bourbaki, 1971, S. 39, vgl. dazu Meschkowski, 1965, S. 33). Aus philosophischer Sicht ist das offensichtlich unbefriedigend. C. Thiel nennt diese Einstellung „provokativ logik- und grundlagenfeindlich“ (Thiel, 1972, S. 128). Aus wissenschaftssoziologischer Sicht hingegen ist Arbeitsteilung als Problemlösung naheliegend (vgl. Maaß, 1988).

Im Hinblick auf Wahrheit und Realitätsbezug der Mathematik ist es hier besonders wichtig festzuhalten, dass die heute übliche Verwendung von Axiomen in der Mathematik auf Hilbert und Bourbaki zurückgeht. Diese Axiome treten im Unterschied von jenen des Euklid nicht mit dem Anspruch auf, die Wirklichkeit in einleuchtender Weise zu fixieren – sie sind wie Russell betonte, in gewissem Sinne willkürlich, von Menschen gesetzt und im Wesentlichen dadurch gerechtfertigt, dass sie widerspruchsfrei sind und einen guten Ausgangspunkt für die aus ihnen deduzierten Sätze bilden. Die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom hat sich als äußerst erfolgreicher Ausgangspunkt für die Ableitung mathematischer Sätze herausgestellt. Ein Beweis für die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems kann nach Gödel allerdings nicht erbracht werden (zweiter Unvollständigkeitssatz). Im Hinblick auf die Ausgangsfrage nach der Wahrheit der Mathematik halten wir als Zwischenfazit fest, dass formal-axiomatische Mathematik nur dann „wahr“ ist, wenn an die Gültigkeit der Basisaxiome geglaubt wird (wofür es viele gute Gründe gibt, die aber nicht im absoluten Sinne „wahr“ sind)[8].

Ein nicht formaler Vorschlag zur Lösung der Grundlagenkrise, die durch die Antinomien ausgelöst wurde, ist zwar aus philosophischer Sicht eine Lösung des Problems, wurde aber von den Mathematikern und Mathematikerinnen strikt abgelehnt, weil nach ihrer Ansicht der Vorschlag zu sehr einengt bzw. nur formal begründbare Gebiete der Mathematik ausschließt. Nach diesem Vorschlag soll eine Menge wie folgt definiert werden: „Eine Menge ist ein Gesetz, auf Grund dessen, wenn immer wieder eine willkürliche Nummer gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder eine bestimmte Zeichenreihe mit oder ohne Beendigung des Prozesses erzeugt, oder aber die Hemmung des Prozesses mitsamt der definitiven Vernichtung seines Resultates herbeiführt, wobei für jedes $n > 1$ nach jeder unbeendigten und ungehemmten Folge von $n - 1$ Wahlen, wenigstens eine Nummer angegeben werden kann, die, wenn sie als n-te Nummer gewählt wird, nicht die Hemmung des Prozesses herbei führt. Jede in dieser Weise von einer unbegrenzten Wahlfolge erzeugte Folge von Zeichenreihen (welche also im Allgemeinen nicht fertig darstellbar ist), heißt Element der Menge. Die gemeinsame Entstehungsart der Elemente einer Menge M werden wir kurz ebenfalls als die Menge M bezeichnen.“ (Brouwer, 1925, S. 244 f.).

Unschwer ist dieser Definition anzumerken, dass hier eine Menge Element für Element konstruiert wird. Diese Variante der Linie von Aristoteles wird „Intuitionismus“ genannt: „Mathematik ist eine freie Schöpfung unabhängig von der Erfahrung; sie entwickelt sich aus einer einzigen einfachen Anschauung a priori (a priori Intuition).“ (Brouwer, 1907, S. 179). Wie Brouwer schreibt auch Heyting: „Die mathematischen Gegenstände werden von dem denkenden Geist unmittelbar erfasst; die mathematische Erkenntnis ist daher von der Erfahrung unabhängig.“ (Heyting, 1934/1974, S. 3).

2.4 Ein materialistischer Blick

Der Intutionismus wurde nicht nur von der übergroßen Mehrheit der Mathematiker und Mathematikerinnen aus praktischen Gründen abgelehnt, sondern auch aus einer ganz anderen Richtung kritisiert, auf die wir hier kurz eingehen möchten, weil sie das Spektrum der Antworten auf die Frage nach dem Wesen der Mathematik abrundet und uns eine Perspektive für eine neue philosophische Grundlage des Modellierens eröffnet. „Die gedanklichen Konstruktionen, von denen die Intuitionisten reden, haben keine Beziehung zur realen Welt und besitzen deshalb einen rein subjektiven Charakter.“ (Rusawin, 1968, S. 249). Aus Sicht der historisch-materialistischen Philosophie ist der rein subjektive Charakter nicht akzeptabel, wie A. A. Markov (1856 – 1922) schrieb: „Ich kann keineswegs damit einverstanden sein, dass die ‚intuitive Klarheit‘ als Wahrheitskriterium in der Mathematik betrachtet wird, weil dieses Kriterium den vollständigen Triumph des Subjektivismus bedeutet und mit der Auffassung der Wissenschaft als Form der gesellschaftlichen Tätigkeit unvereinbar ist.“ (zit. nach Rusawin, 1968, S. 262). Markov bezieht sich damit auf eine Grundposition des historischen Materialismus: „Die Arbeit ist die Quelle allen Reichtums [...] Aber sie ist noch unendlich viel mehr als dies. Sie ist die erste Grundbedingung allen menschlichen Lebens, und zwar in einem solchen Grade, dass wir in gewissem Sinn sagen müssen: Sie hat den Menschen selbst geschaffen.“ (Engels, 1978, S. 444).

Übrigens hat Engels (1820 – 1895) sich auch direkt zur Mathematik geäußert: „Das Mysterium, das die bei der Infinitesimalrechnung angewandten Größen – die Differentiale und Unendlichen verschiedener Grade – noch heute umgibt, ist der beste Beweis dafür, dass man sich noch immer einbildet, man habe es hier mit reinen ‚freien Schöpfungen und Imaginationen' des Menschengeistes zu tun, wofür die objektive Welt kein Entsprechendes biete. Und doch ist das Gegenteil der Fall. Für alle diese imaginären Größen bietet die Natur die Vorbilder." (Engels, 1978, S. 530).

P. Ruben (*1933) hat in seinen Werken eine präzise durchdachte Version der historisch-materialistischen Sicht der Mathematik formuliert. Deren Ausgangsthese ist: „Für die marxistisch-leninistische Philosophie wird also die Mathematik zum philosophischen Gegenstand, wenn sie als Produktionsvorgang gedacht wird." (Ruben, 1979, S. 69). Damit kommt er letztendlich zur Definition: „Wird die allgemeine Arbeit Produktion und Kalkulation abstrakter Werte, so wird sie Mathematik." (Ruben, 1979, S. 86). Aus dieser Sicht ist es dann nicht nur glücklicher Zufall, wenn auch sehr abstrakte Mathematik einen Bezug zur realen Welt hat und behält. Für das Modellieren im realitätsbezogenen Mathematikunterricht eröffnet sich damit auch ein philosophisch gut begründeter Weg, die typischen Dualismus-Probleme [9] zu vermeiden, die damit verbunden sind, wie Blum und Kaiser eine Unterscheidung von Mathematik und Realität (oder Rest der Welt, vgl. Blum und Kaiser (2018, S. 3 f.)) treffen.

Die historisch-materialistische Sichtweise der Beziehung von Mathematik und Realität, die wir hier schon aus Platzgründen ebenso wie alle vorher erwähnten philosophischen Sichtweisen nur kurz erwähnen, aber keinesfalls erörtern oder bewerten wollen[10], ist nicht die einzige, die auf einen sozialen Aspekt der Beziehung von Mathematik und Realität eingeht. Deshalb folgt nun ein Abschnitt zur Wissenschaftssoziologie.

2.5 Wissenschaftssoziologie

Schon aus den wenigen Zitaten zur Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert in diesem Text geht hervor, dass die handelnden Personen wie Gauss, Kronecker, Cantor etc. Menschen waren, die ihre persönliche, religiöse und philosophische Überzeugung mehr oder weniger bewusst und deutlich zur Basis ihres mathematischen Schaffens gemacht und verteidigt haben. Zudem setzen Mathematiker und Mathematikerinnen als Gruppe(n), als wissenschaftliche Vereinigung, als Herausgeberteam einer Zeitschrift oder eines Buches, als Professorenkurie an einer Universität, die über Habilitationen und Berufungen etc. entscheiden, Standards. Sie fällen Entscheidungen darüber, was als wissenschaftlicher Beitrag zur Mathematik akzeptiert wird und was nicht. Nach dem heutigen Stand wissenschaftssoziologischer und wissenschaftshistorischer Forschung kann niemand mehr ohne Widerspruch behaupten, dass die Mathematik sich objektiv und unabhängig von den handelnden Personen entwickelt habe. Ein im universitären Unterricht durchaus verwendbares Beispiel ist das gut dokumentierte Wirken des Mathematikers Hermann Graßmann (1809 –1877), dessen von der Fachwelt lange ignorierte „Ausdehnungslehre" die Grundlage für die heutige Lineare Algebra bildete (Tietze, 2000, S. 84 ff.). Eine wichtige Verbindung von Mathematik und Realität (insbesondere der Berufswelt in unserer Gesellschaft) waren und sind jene Menschen, die Mathematik als Beruf betreiben, sei es an einer Universität, an einer Forschungseinrichtung, die von und für Wirtschaft oder Militär finanziert wird, sei es mit der Berufsbezeichnung „Mathematikerin" bzw. „Mathematiker" oder einer anderen aus dem MINT-Bereich oder den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften[11]. Mit anderen Worten: Mathematik tritt in der sozialen Realität nicht von sich aus in Erscheinung, sie wird von Menschen, die damit Geld verdienen, für verschiedene Zwecke eingesetzt. Diese Zwecke sind keinesfalls immer wertfrei, objektiv, gerecht, sozial fair etc. Die einfache Frage, wer sich denn leisten kann, Mathematiker bzw. Mathematikerinnen zu bezahlen, um die eigenen Ziele besser zu verfolgen, führt zum Verdacht der Parteilichkeit: wer zahlt, schafft an. Der Auftraggeber bzw. die Auftraggeberin bestimmt, welche Daten berücksichtigt werden sollen und was als das zu erreichende Optimum gilt – und in der Regel nicht die Betroffenen und nicht die Auftragnehmer und Auftragnehmerinnen. Wenn eine Thematik mit verschiedenen Absichten mathematisch modelliert wird, kommen oft sehr unterschiedliche Modelle heraus. Die Kontroverse um eine Autobahnmaut in Deutschland zeigt das – auch mit Schulmathematik – gut nachvollziehbar. Auch der Themenkreis „Einkommensteuer" passt in diesem Zusammenhang (Henn, 2006), er wird sogar bei der zentralen schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik in Österreich angesprochen[12]: Aufgabe 3 im Teil 2 des Haupttermins 2015/16.

Mit weniger einfachen Worten wurde die Diskussion um „Erkenntnis und Interesse" vor vielen Jahren von Jürgen Habermas (Habermas, 1973) eröffnet, sowie die geänderte und nunmehr keinesfalls wertfreie und objektive Rolle von Wissenschaft in gesellschaftlichen Konflikten am Beispiel Kernenergie von Robert Tschiedel analysiert

(Tschiedel, 1977). Die heutige Situation im Konflikt um die Rolle und „Freiheit“ der Wissenschaft ist – aus unserer Sicht nicht untypisch – aus juristischer Sicht am besten zu verstehen, wie Pöschl aufgezeigt hat (Pöschl, 2017).

3 Zur Stoffdidaktik solcher Grundlagenfragen

Wir raten aus vielen Gründen (und Erfahrungen) davon ab, sich den in Abschnitt 2 angeschnittenen Fragen nur über Theorielektüre zu nähern. Stattdessen schlagen wir vor, mit einer motivierenden Fragestellung, etwa einer historisch relevanten Ansicht über eine Verbindung von Mathematik und Realität in Verbindung mit einer konkreten mathematischen Aufgabe einzusteigen.

3.1 Pythagoreer: „Alles ist Zahl“

Beginnen wir mit einem bekannten und erprobten Beispiel. Die Pythagoreer waren eine politisch einflussreiche, also nicht „nur“ philosophische Schule, von der viele das Motto „Alles ist Zahl“ kennen[13]. Hinter dem Motto stand der Wunsch, menschliche, soziale Verhältnisse rationaler zu gestalten, indem sie – mit heutigen Worten – mathematisiert werden.

Das Geheimsymbol der Pythagoreer war ein regelmäßiges Fünfeck, dessen Analyse im Mathematikunterricht durchgeführt werden kann und – gar nicht im Sinne der Pythagoreer – zu irrationalen Zahlen führt[14] (Hischer, 1994). Die Methode der Wechselwegnahme zur Ermittlung des größten gemeinsamen Maßes führt zur geometrischen Interpretation eines irrationalen Verhältnisses zweier Streckenlängen a und b: Die Wechselwegnahme endet genau dann nach endlich vielen Schritten, wenn das Größenverhältnis von a und b rational ist. Dabei ist solange $a \neq b$ im Falle $a > b$ die Länge a durch $a - b$ zu ersetzen und neuerlich $a > b$ zu prüfen. Trifft dies zu, wird wiederum a durch $a - b$ ersetzt usw. Ansonsten tritt $b - a$ anstelle von b. Man sieht sofort, dass die Seitenlänge und die Länge der zugehörigen Diagonale im regelmäßigen Fünfeck kein gemeinsames Maß besitzen, denn die Wechselwegnahme bricht nicht ab: im durch die Diagonalen entstehenden inneren, kleineren regelmäßigen Fünfeck stellen wir dasselbe (größte) gemeinsame Maß für Seitenlänge und Länge der Diagonale fest wie für das ursprüngliche. Also sind diese beiden Streckenlängen inkommensurabel, ihr Verhältnis ist irrational. Das Motto „Alles ist Zahl“ der Pythagoreer muss daher um solche Längenverhältnisse erweitert werden.[15]

Damit soll aber der Unterricht nicht enden. Wenn das Motto „Alles ist Zahl“ etwas anders formuliert wird, z. B. so: „Alles ist mathematisch modellierbar“, können wir in der Schule eben die spannende Diskussion neu führen, die damals die Griechen beschäftigt hat: Ist die Realität, die ganze Welt außerhalb der Wissenschaft Mathematik doch auch mathematisch aufgebaut? Kann sie (mehr oder weniger vollständig) mathematisch beschrieben werden? Gilt das zumindest für bestimmte Aspekte der Realität, etwa alle, die mit Technik (z. B. Bardy, 2019), Naturwissenschaft (z. B. Ableitinger, 2010) und Ökonomie (z. B. Dorner, 2017) zu tun haben, aber nicht mit dem Verhalten einzelner Menschen etwa im Bereich persönlicher Beziehungen? Diese Fragen führen weit über das Modellieren in der Schule hinaus, sie sind für uns alle von so großer Bedeutung, dass wir zu ihrer Beantwortung hier etwas Raum in Form einer Liste geben wollen.

Für uns unstrittig ist die enge Verbindung von Mathematik und Naturwissenschaften. Eine Physik ohne Mathematik ist schlicht unvorstellbar, aber auch in Biologie, Chemie und der Medizin wird immer mehr modelliert und – für uns mit besonders faszinierenden Erfolgen – mathematisch simuliert. Wir rechnen dabei im Sinne von B. Buchberger (RISC Linz) den Informatikanteil der Computersimulationen einfach der Mathematik zu; hinter jeder Computersimulation steckt (mindestens) ein mathematischer Algorithmus. Durch die vielfältigen Kontakte und Vorträge im Johannes Kepler Symposium[16] mit der Industrie- bzw. Technomathematik kennen wir Beispiele für den erfolgreichen Einsatz von Mathematik bei der Entwicklung neuer Technologien, etwa: Energieersparnis in der Stahlproduktion, optimiert geplanter Chemieanlagenbau, bessere Profile für Winterreifen, haltbare Form für Federn in künstlichen Zähnen, Planung von chirurgischen Eingriffen, Brückenkonstruktion, Hitzeschutz für Raumfähren, optimale Flächennutzung in der Landwirtschaft, Sicherheitsüberprüfung von Seilbahnseilen, schnellere Flugzeugenteisung nach der Landung und vor dem nächsten Start, minimierter Wasserverbrauch bei Waschmaschinen und vieles andere[17]. In den ISTRON-Bänden[18] und den MUED-Materialien finden sich eine ganze Reihe von Unterrichtsvorschlägen, in denen Anwendungen der Mathematik in Naturwissenschaft und Technik für den Schulunterricht aufgearbeitet wurden.

Der nächste Punkt auf unserer Liste sind Sozial- und Wirtschaftswissenschaften. Offensichtlich und öffentlich wird mit mathematischen Modellen gearbeitet und argumentiert, wenn es um Volkswirtschaft geht, also insbesondere um Steuern oder andere Ein- und Ausgaben der öffentlichen Hand. Ein für den Unterricht sehr schönes Beispiel ist der Streit um die deutsche Autobahnmaut, weil hier das Ministerium und der ADAC aufgrund unterschiedlicher Annahmen in der Modellierung zu sehr unterschiedlichen Berechnungsergebnissen über die zu erwartenden Mauteinnahmen kamen[19]. Über die Verwendung von Mathematik in der Betriebswirtschaft wissen wir viel von Logistik (Stichwort „just-in-time“-Produktion und Minimierung von Lagerhaltungskosten), über Statistik und Werbung, über Controlling und Finanzmathematik, über Risikomanagement in (Investment-) Banken etc.

Nach „Rüstungsforschung“ ist „Werbung“ das zweite Stichwort, bei dem vielleicht Bedenken formuliert werden, wenn über Anwendungen von Mathematik gesprochen wird. Verweilen wir einen Moment beim Thema Werbung, weil hier gut sichtbar wird, wie die Mathematisierung voranschreitet. Lange (seit Jahrzehnten) bekannt ist die statistische Forschung zur Werbewirksamkeit, die etwa die Verkaufssteigerungen durch Anzeigen oder Rundfunk- bzw. Fernsehwerbung für ein Waschmittel untersucht. Ein beträchtlicher Teil des Werbeerfolges von Internetversandunternehmen beruht auf wesentlich mehr individualisierter Ansprache. Das Verhalten eines Menschen im Internet (Suchanfragen, Betrachten von Angeboten in Internetshops etc.) wird dokumentiert, analysiert und in gezielte Werbemails umgesetzt. Aus dem Verhalten eines Menschen im Internet wird ein Cyberschatten dieses Menschen errechnet oder modelliert, der individuell besser beeinflussbar wird als durch klassische Werbespots. Das Beispiel „Cambridge Analytica“ zeigt, dass diese Art mathematischer Modellierung auch für politische Meinungsbildung genutzt werden kann (Kaiser, 2019). Für uns ist dieser Hinweis an dieser Stelle wichtig, weil er exemplarisch aufzeigt, wie sich die Grenzen der Mathematisierbarkeit von großen Anzahlen von Menschen hin zu Individuen verschieben.

Uns erscheint die erfolgreiche mathematikgestützte Werbung im Internet lästig: Wir müssen uns mit ihr und unseren „tatsächlichen“ Bedürfnissen oder Interessen mehr auseinandersetzen als wir möchten, sie trifft auch uns mehr als Plakate am Straßenrand oder Fernsehspots. Nur ein Positives können wir ihr abgewinnen: Sie zeigt uns, dass individualisierte Ansprache bessere Chancen hat, Aufmerksamkeit und Interesse zu wecken als pauschale Ansprachen (vgl. dazu als positives Beispiel Eichler & Riemer, 2008).

Auf unserer Liste von Bereichen, die nicht erfolgreich mathematisiert wurden oder aus unserer Sicht gar nicht mathematisch modelliert werden sollen, findet sich neben dem Individuum auch der Begriff „Ästhetik“. In der Kunst wird seit A. Dürer versucht, mit Hilfe der Mathematik herauszufinden, weshalb Bilder „schön“ sind bzw. wie es besser gelingen kann, schöne Bilder zu malen. Ein auch im Unterricht häufig eingesetztes Beispiel dazu ist der „Goldene Schnitt“ (z. B. Beutelspacher und Petri, 1996). Inzwischen gibt es unter dem Begriff „Design“ weit mehr mathematikhaltiges Wissen über die „schöne“ Gestaltung von Objekten in allen Lebensbereichen (vgl. etwa Jonak, 2012).

In der Musik hat bereits Mozart einen Versuch mathematischer Komposition unternommen, sein mathematisches Würfelspiel, mit dem auch Leute, die nichts von Musik und Komposition verstehen, Musik komponieren können[20]. Ein neuerer Versuch in dieser Richtung ist Tom Johnsons (Permutations-)Tango aus dem Jahre 1984[21]. Wie eng die Verbindung von Musik und Mathematik gesehen werden kann, zeigt das folgende Zitat von Heinz Götze: „[...] man könnte überspitzt sagen, dass Musik und Mathematik [...] zwei Aspekte ein und derselben Sache sind. Am besten können Sie das sehen, wenn Sie eine Partitur oder ein Notenblatt aufschlagen. Da ist ein mathematisches Koordinatensystem; in dem einen sind die Töne und die Akkorde angegeben und im anderen ist die Zeit und der Rhythmus angezeigt.“ (Götze und Wille, 1985, S. 1).

Im Internet[22] kann aktuell verfolgt werden, wie in vielen Bereichen Mathematisierung voranschreitet – z. B. auf dem Weg über „lernende“ neuronale Netze.

Bleibt als einer der letzten Punkte auf unserer Liste das Verhalten einzelner Menschen etwa im Bereich persönlicher Beziehungen: Liebe, Hass, Treue, Verehrung oder Abneigung etc. Falls das modelliert werden kann fragen wir uns: ergibt sich daraus wie bei den Pythagoreern auch ein politisches und gesellschaftliches

Programm? Welches? Ein Ergebnis solcher Diskussionen ist für uns – im Unterschied zur Analyse des Fünfecks – offen.

3.2 Leibniz: Determinierte Monaden

Newton (1643 – 1727) und Leibniz (1646 – 1716) gelten als Begründer der Analysis (vgl. Heuser, 1986b, S. 656 ff.); Newton näherte sich schrittweise dem Unendlichen (Grenzwerte), Leibniz verwendet seine aktual unendlich kleinen „Monaden". Nur zur Erinnerung: Der Limes geht also auf Newton, das unendlich kleine d*x* hingegen auf Leibniz zurück. Es ist nicht schwer zu erraten, auf welchen der beiden in Abschnitt 2.1 erwähnten philosophischen Ausgangspunkte (Platon und Aristoteles) sich die Vertreter bzw. Vertreterinnen von üblicher Analysis und Non-Standardanalysis berufen (können). Für einen ersten AHA-Effekt kann sorgen, in der Schulklasse dieselbe Frage mit üblicher Ableitung und mit Leibniz' Monaden zu beantworten (vgl. Baumann und Kirski, 2016, S. 9 ff.): Was ist die Ableitung von einer Polynomfunktion zweiten Grades? Dazu betrachten wir für die Einheitsparabel als Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$einen infinitesimal benachbarten Punkt P_1 zum Parabelpunkt $P(x_0|x_0^2)$ mit den Koordinaten $(x_0 + \alpha|(x_0 + \alpha)^2)$, wobei α eine infinitesimale Zahl (Monade, siehe nächster Absatz) ist. Sie ist dem Betrag nach kleiner als jede positive Zahl und ungleich null. Der waagrechte Abstand der beiden Punkte beträgt also α, das ist eine Einheit auf der um den infiniten Faktor $\frac{1}{\alpha}$ (das ist eine dem Betrag nach größere Zahl als jede positive reelle Zahl) vergrößerten hyperreellen Zahlengeraden. Der senkrechte Abstand ist gleich $\alpha \cdot (2x_0 + \alpha)$, also $2x_0 + \alpha$ Einheiten der vergrößerten Geraden. Der reelle Teil des Verhältnisses von senkrechtem zu waagrechtem Abstand in Einheiten der vergrößerten Zahlengeraden ist demnach $2x_0$. Das ist die Steigung der Tangente im Punkt *P*. Beide Grundideen (Grenzwerte und Monaden) waren Ausgangspunkte für eine lange und erfolgreiche Entwicklung zur üblichen Analysis auf der einen Seite und zur Non – Standard – Analysis auf der anderen Seite. Beide zu vergleichen, kann dazu beitragen, beide Arten Analysis besser zu verstehen.

Damit es richtig aufregend wird, schlagen wir vor, dann in fächerübergreifender Kooperation mit Philosophie und Theologie genauer über die Monaden zu sprechen. Leibniz hat „Monaden" in 90 Punkten definiert und beschrieben[23]. Wir konzentrieren uns hier darauf, dass sie „die wahrhaften Atome der Natur" (Punkt 3) sind und „keine Ausdehnung, keine Gestalt und keine mögliche Teilbarkeit" (Punkt 3) haben. Monaden können nur durch Erschaffung beginnen (Punkt 6). Sie sind fensterlos, d. h. kein Mittel kann „erklären, wie eine Monade in ihrem Inneren durch ein anderes erschaffenes Ding beeinflusst oder verändert werden kann" (Punkt 7).

Fragen wir nach dem Sinn von Monaden und ihren Aktivitäten (z. B. als aus Monaden zusammengesetzten Körpern), so erfahren wir von Leibniz: „Daher muss der letzte Grund der Dinge in einer notwendigen Substanz liegen, in der als in der Quelle das Einzelne der Veränderungen nur wesentlich enthalten ist, und eben diese Substanz nennen wir Gott." (Punkt 38). Gott in seiner unendlichen Weisheit hat die Monaden erschaffen und im Zuge der Schöpfung ihre Bestimmung für alle Zeit festgelegt – wir leben demnach in einer determinierten Welt.

Können wir an dieses Modell von Realität glauben? Überzeugt es uns? Wir können (eventuell mit etwas zusätzlicher Lektüre) erkennen und bewundern, wie es das damals schier unlösbare Problem des Dualismus von Seele und Materie löste, das etwa Descartes mit so viel Erfolg verwendet hat.[24] Zudem sollten wir einen Input aus der theologischen Richtung erörtern: wie ist dieses voll deterministische Modell der Monaden mit dem Problem der Theodizee vereinbar? Wenn auch die Menschen aus solchen Monaden bestehen, wie können sie dann mit freiem Willen Entscheidungen treffen? Weiterhin ist hier (wieder näher an der Mathematik) das Phänomen der Empfindlichkeit gegenüber den Anfangsbedingungen mancher (chaotischer) Systeme zu erwähnen, die den Determinismus solcher Systeme relativieren (z. B. Raith, 2009, Bigalke, 1996 oder Dormayer, 1991). Auch die Beschreibung hat Einfluss auf das berechnete Verhalten solcher Systeme: diskret oder kontinuierlich beim logistischen Wachstum (z. B. Ableitinger, 2010, Abschnitt 2.1.4).

Eine deterministische philosophische Grundposition ist mit unserem didaktischen Anliegen „realitätsbezogener Mathematikunterricht" nicht vereinbar. Im Prozess des Modellierens stehen immer wieder Entscheidungen an (vgl. Abschnitt 5): Ist das bisher entwickelte Modell hinreichend? Brauchen wir zusätzliche Daten? Sollen wir weitere Aspekte modellieren? Schüler und Schülerinnen sollen lernen, solche Entscheidungen selbstverantwortlich zu treffen und die entsprechenden Konsequenzen ziehen. Die Verbindlichkeit eigener Entscheidungen für das weitere Arbeiten sinkt aber schnell gegen Null, wenn die Schüler und Schülerinnen zu wissen glauben, dass ohnehin alles schon entschieden und vorbestimmt ist. Es spielt dann keine Rolle, was sie entscheiden und tun. Mit dieser Überzeugung liegt es nahe, es sich vordergründig einfach zu machen und nichts zu tun. Die Motivation sinkt gegen Null.

3.3 Hume: Die Realität ist Empfindung samt Interpretation im eigenen Kopf

Mit David Hume (1711 – 1776) haben wir einen anderen sehr bedeutenden Philosophen ausgewählt, der eine skeptizistische Sicht auf Realität formuliert hat. Diese Sicht ist für die meisten Menschen mit einer üblichen und eher naiven Sicht auf Realität sehr verstörend und gerade deshalb reizvoll für den Unterricht zum Thema „Realität".

„Das Problem der Außenwelt besteht in der philosophischen Frage, ob die äußeren Dinge um uns herum unabhängig und verschieden von unseren Wahrnehmungen existieren. Hume behandelte dieses Problem u. a. in seiner *Abhandlung über die menschliche Natur*. Er stellte fest, dass sich der Glaube an die Existenz der Außenwelt nicht durch rationale Begründungen stützen lasse. Nach seiner sensualistischen Grundthese sind die Sinne die einzige Quelle unserer Kenntnisse über die Außenwelt, und diese liefern uns nur *perceptions*, aber nicht den geringsten Hinweis darauf, dass unsere Sichten oder Interpretationen von etwas außerhalb ihrer selbst verursacht werden.

‚Die Funktion der Sinne dürfte ungeeignet sein, um daraus die Vorstellung (idea) ableiten zu können, dass Dinge fortdauernd vorhanden sind, nachdem sie unseren Sinnen längst entschwunden sind. Wir kommen zu widersprüchlichen Aussagen, wenn wir das behaupten. [...] Die Sinne liefern nur einzelne perceptions ohne den kleinsten Hinweis auf etwas außerhalb und von uns Verschiedenem.‘

Dennoch kann der Mensch nicht umhin, an die Existenz der Außenwelt zu glauben. Die Natur, so Hume, habe uns hierin keine Wahl gelassen (‚Nature has not left this to [man’s] choice‘). Er stellte die Frage nach den Gründen für diesen starken Glauben.

‚Wenn ich nun diesen Wahrnehmungen eine wirkliche und körperliche Existenz zuschreibe, geschieht im Bewusstsein etwas, das schwierig zu erklären ist, was ich aber versuchen möchte.‘"[25]

Wer immer wieder auf dasselbe Objekt schaut, macht vielleicht die Erfahrung der Permanenz des immer selben Sinneseindrucks von diesem Objekt und mag dadurch verleitet werden, an die von ihm unabhängige Existenz des Objektes zu glauben. Das ist psychologisch verständlich und entlastend, aber kein Beweis für die Existenz. Eine wesentliche Verschärfung dieser Position erfolgte durch den Nihilismus (oder Solipsismus): Es existiert demnach keine Realität außer der im eigenen Kopf. Eine gelungene Verbindung von Nihilismus und Mathematikdidaktik ist uns nicht bekannt oder auch nur schwer vorstellbar.

Wir haben versucht, Humes philosophische Position auf ein in der Schule verständliches mathematisches Problem zu beziehen und schlagen vor, es auf diese Weise zu behandeln: Anlässlich des Jubiläums „50 Jahre Mondlandung" hat eine fiktive Schulklasse (oder eine Agentur, die Meinungsumfragen macht), von der zu Beginn des Unterrichts berichtet werden soll, eine Umfrage gemacht. Mehr als 1000 Menschen wurden gefragt: „Wie weit ist eigentlich der Mond von der Erde entfernt?"

Das Ergebnis war nach sorgfältiger Auswertung ca. „4800 km". Wie bei einer guten Auswertung üblich und notwendig, wurden zunächst die sinnlosen Antworten („Mein Herz ist nur einen Schritt vom Mond entfernt") und die wenigen offenbar nur scherzhaft genannten Riesenzahlen aussortiert und dann nach den Regeln der Kunst Mittelwert und Median ermittelt.

Haben wir Hume richtig verstanden, wenn wir aus diesem Ergebnis folgern, dass der Mond in der Realität tatsächlich etwa 4800 km entfernt ist? Wie fällt die Antwort aus, wenn die Umfrage nicht astronomische „Tatsachen", sondern politische Einschätzungen (vertritt Person x die richtige Auffassung zum Thema y?) betrifft?

Auch das Problem des zweiten Kindes kann in Bezug auf die Hume’sche Realitätsauffassung diskutiert werden: Man weiß, dass eine Familie zwei Kinder hat und mindestens ein Mädchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Familie zwei Mädchen hat? Je nach Auffassung und Interpretation kann sich dabei der Wert 1/2 oder

1/3 ergeben (Götz und Humenberger, 2008). Entscheidend ist dabei, wie die Information über das Geschlecht des eines Kindes zustande kommt (Götz und Humenberger, 2008, S. 52). Die Bewertung erfolgt zum Beispiel aufgrund eines Sinneseindruckes (ein zur Familie gehörendes Mädchen wurde zufällig im Stiegenhaus angetroffen), das andere Kind tritt nicht zutage. Wird dagegen die Frage „Gibt es in der Familie ein Mädchen?“ mit „Ja“ beantwortet, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit anders zu bewerten (Götz und Humenberger, 2008, S. 55).

Beim Taxiproblem wird ebenfalls aufgrund einer Beobachtung eine Bewertung abgegeben: In einer Stadt gäbe es N Taxis mit den vom Straßenrand aus lesbaren Nummern 1, . . ., N. Ein Passant stehe eine gewisse Zeitlang an einer viel befahrenen Straße und notiere sich die Nummern x_1, . . ., x_k der vorbeifahrenden Taxis. Es sei angenommen, dass $1 \leq x_1 < \cdots < x_k$ und dass der Passant ein mehrmals vorbeifahrendes Taxi nur einmal zählt. Unter der Annahme, dass im Beobachtungszeitraum alle Taxis in Betrieb sind, ist die Anzahl N aller Taxis zu schätzen. Eine Möglichkeit ist, die Länge der nicht beobachteten Lücke $\{x_k + 1, \dots, N\}$ oberhalb von x_k durch die mittlere Länge der vorangegangenen Lücken zu schätzen. Es ist dann $\frac{(x_1-1)+(x_2-x_1-1)+\cdots+(x_k-x_{k-1}-1)}{k} = \frac{x_k-k}{k}$. Dies führt zu dem Schätzer $x_k + \frac{x_k-k}{k}$ (Krengel, 1991, S. 65).

Die Beispiele an sich passen u. E. sehr gut zur Hume'schen Auffassung: der (Sinnes-)Eindruck führt zur Bewertung bzw. Einschätzung der Situation. Doch er alleine genügt nicht. Im ersten Beispiel spielt die Art, wie der Sinneseindruck zustande gekommen ist, die entscheidende Rolle. Im zweiten Beispiel dagegen ist die Wahl des Schätzers entscheidend. In beiden Fällen sind also sowohl ein Sinneseindruck als auch eine Theorie notwendig, nicht um "die Realität" zu erfassen, sondern um zu Einschätzungen unterschiedlicher Möglichkeiten zu kommen.

Wie gehen wir mit solch grundsätzlicher Relativierung in Sachen Realität um? Worauf können wir uns noch wirklich verlassen, wenn uns die naive Gewissheit der Sinneseindrücke oder der Glaube an Gott oder an die Wahrheit der Ergebnisse der wissenschaftlichen Forschung verlassen hat? Uns bleibt im Bereich von Alltag und Technik anzunehmen, dass die Dinge, die wir benutzen und brauchen (vom Haushalt bis zum öffentlichen Nahverkehr), wenn gleich nicht absolut, so doch zumindest vorläufig real und brauchbar sind. Wir fallen (hoffentlich nicht!) in ein metaphysisches Loch, wenn wir die Kaffeemaschine verwenden oder einen Film im Kino ansehen. Die prinzipiell, auch unter größter Anstrengung erreichbare Gewissheit über die tatsächliche Situation in Syrien oder die aktuelle Interessenlage in Sachen „Brexit“ erscheint uns viel geringer.

Zusammenfassend halten wir fest, dass wir wie die meisten Menschen im Alltag ganz gut zurechtkommen, wenn wir das für „die Realität“ halten, und uns so benehmen, als wäre es tatsächlich die Realität, was wir mit unseren Sinnen erfassen können. Dabei hilft uns, dass wir in sozialen Zusammenhängen aufwachsen und erzogen bzw. sozialisiert werden. Interessant – und bisweilen – kritisch wird es, wenn wir z. B. Kontakt zu fremden Kulturen haben, in denen andere gemeinsame Sichtweisen vorherrschen, oder wenn wir in den Bereich der Wissenschaft kommen. Sehr einfach formuliert können wir im Alltag in der Regel schlicht ignorieren, was uns die Physik über Relativität oder Quanten berichtet. Wenn wir selbst aber eine Wissenschaft wie „Didaktik der Mathematik“ betreiben wollen, müssen wir schon genau hinschauen, auf welchem begrifflichen Fundament, auf welchen (auch empirischen) Schlussweisen wir unsere Theorien aufbauen wollen. Sonst riskieren wir berechtigte Kritik.

In Bezug auf realitätsbezogenen Mathematikunterricht haben wir den Eindruck, dass wir mit geringem Risiko einfache Beispiele aus dem Alltag (Haushalt, Alltagstechnik, Finanzbeispiele für die Sekundarstufe I etc.) der Lernenden thematisieren können. Behandeln oder entwickeln wir komplexere Modelle etwa aus Ökonomie oder Ökologie oder die Theorie des Modellierens müssen wir viel genauer berücksichtigen, dass es hier nicht einfach „die“ Realität gibt, die modelliert wird: siehe Abschnitt 4.3.

4 „Modellieren“ – ein Vorschlag für ein erweitertes Begriffsverständnis

Wer heute in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik von „Modellieren“ spricht, benutzt zur Erläuterung in der Regel einen Modellierungskreislauf nach Werner Blum oder einem anderen ISTRON-Mitglied (vgl. Blum & Leiss, 2005). In diesen Kreisläufen geht die Bewegung von der Realität in die Mathematik und zurück zur Realität (die in der Regel unkommentiert als fix gegeben angenommen wird), wobei je nach Autor oder Autorin mehr oder weniger viele Stationen explizit erwähnt sind (z. B. die Nutzung eines Computers für Berechnungen wird nicht von allen erwähnt, aber als selbstverständlich vorausgesetzt). Schon aus Platzgründen können wir hier nicht auf die verschiedenen Varianten eingehen. Die vorangegangenen zwei Abschnitte zeigen aber, dass dieses Vertrauen in eine feste Realität wissenschaftlich (philosophisch) zumindest in Frage gestellt werden kann. Wir haben zum Ende des letzten Abschnitts bewusst festgehalten, dass schon unser kurzer Ausflug in die Philosophie deutlich gemacht hat, dass so ein Verständnis von „Realität“ als Basis wissenschaftlicher Arbeit als zu eng aufgefasst werden kann.

Weiterhin ist „Kreis“ eine missverständliche Metapher für einen wünschenswerten Lernvorgang. Selbstverständlich lernt auch, wer lernt, im Kreis zu laufen. Aber: wer nur im Kreis läuft, kommt letztlich nicht weit. Wir schlagen stattdessen als Bezeichnung und Leitbild eine sich öffnende Spirale vor (Maaß, 2015, S. 202, vgl. Abschnitt 5).

Eine andere Art von Kritik zielt darauf, dass vereinfachte Modellierungskreisläufe mit fixer Realität insofern nicht angemessen sind, als es in entsprechenden Aufgaben gar nicht um „Realität“, einen authentischen Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler geht, sondern um eine „Mathematikunterrichtskunstrealität“, wie sie aus üblichen Textaufgaben (insbesondere in älteren Schulbüchern) bekannt ist: „Der (oben offene) Abfülltrichter eines Zementsilos besteht aus einem Drehzylinder, an den unten ein Drehkegel (mit vernachlässigbarer Abfüllöffnung) anschließt. […]“ (Götz und Reichel, 2011, S. 149). Wir schlagen deshalb vor, in der Didaktik und im Unterricht nur dann von Modellieren und Realitätsbezug zu sprechen, wenn es tatsächlich um einen authentischen Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler geht. Haben Sie bemerkt, wie wir nun selbst bei diesem Eingrenzungsversuch mit dem Problem zu kämpfen haben, um das es uns in diesem Beitrag geht: Was ist denn nun die „tatsächliche“, „authentische“ Realität, die Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler und weshalb gehört die „Mathematikunterrichtskunstrealität“ nicht dazu? Es ist offenbar wirklich wichtig, „die Realität“ nicht einfach als fixe Größe vorauszusetzen.

Im Zentrum des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts, der in vielen Veröffentlichungen etwa von ISTRON-Mitgliedern beschrieben und mittlerweile in allen Lehrplänen und Kompetenzkatalogen für Standards und zentrale Reifeprüfungen im deutschsprachigen Raum in irgendeiner Form gefordert wird, steht das „Modellieren“: Die Schülerinnen und Schüler sollen Modellierungskompetenzen erwerben (Siller und Greefrath, 2015). Das wird bisweilen so diskutiert, als käme damit eine ganz neue Anforderung auf sie zu, als müsste nun neben all dem wichtigen Stoff (der bisher gelehrten Mathematik) noch etwas zusätzlich gelernt werden. Eine solche Sicht aufs Modellieren mobilisiert Abwehrkräfte statt zu motivieren. Deshalb erinnern wir in diesem Beitrag auch daran, dass wir ebenso wie alle Schülerinnen und Schüler im Alltag ganz selbstverständlich modellieren, also Modelle bilden und nutzen. Wir behaupten: Das Besondere an mathematischen Modellen ist, dass sie dazu beitragen können, die Qualität dieser Tätigkeiten zu verbessern, etwa genauere Vorhersagen zu machen oder etwas trennschärfer zu systematisieren. Unsere zentrale Botschaft an die Lernenden und Lehrenden ist also: Wer die Macht der Mathematik beim Modellieren nutzen kann, wird die Welt besser verstehen und beeinflussen.

Die folgenden Ausführungen beruhen auf Maaß (2015), von dem wir für diesen Beitrag einige Argumentationen zusammengefasst und aufgearbeitet haben. Zum Einstieg verwenden wir eine Grafik, die einen anderen als den bisher im Umkreis von ISTRON üblicherweise verwendeten Modellierungskreis zeigt, nämlich einen wesentlich allgemeineren. Die Grafik in Abbildung 1 zeigt Menschen, Realität und Modelle in einer jeweiligen (dialektischen) Wechselbeziehung.

Die zentrale Botschaft dieser Grafik ist, dass wir alle in unserem Umgang mit dem, was wir als Realität verstehen, ganz selbstverständlich Modelle verwenden. Die zweite zentrale Botschaft ist die jeweilige Wechselwirkung zwischen Mensch, Realität und Modell. Menschen kreieren Modelle (Abschnitt 4.1) und verändern – auch mit diesen Modellen – Realität; die Realität hat offenbar Einfluss auf Menschen und Modelle, mit denen sie beschrieben und verändert werden soll (Abschnitt 4.2). Modelle (z. B. für die Berechnung der Einkommensteuer) beeinflussen Menschen und (zumindest die von ihnen in diesem Zusammenhang wahrgenommene) Realität (Abschnitt 4.3).

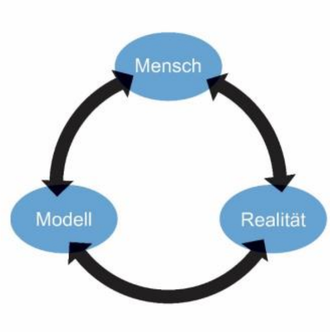

Abbildung 1: Modellierungskreis (Maaß, 2015, S. 195)

4.1 Ausgangspunkt: Modelle sind ein Mittel zur Erkenntnis im Alltag

Zur Erläuterung dieser Basisform in Abbildung 1 (eine detaillierte Version folgt in Abschnitt 5.1) diskutieren wir zunächst ein paar einfache Beispiele, auch um zu zeigen, dass es nicht nur *einen* Begriff „Modell" gibt, der in allen Verwendungsformen für alle Nutzer und Nutzerinnen genau dasselbe meint. Wir kommen in Anbetracht dieser Vielfalt bestenfalls auf eine weniger exakte Beschreibung als gewünscht – etwa derart, dass ein Modell eine vereinfachte Version einer realen Komplexität ist.

Wenn jemand einkaufen geht, verwendet er (oder sie) Modelle von Objekten, Leuten und Verhaltensweisen, um z. B. einen Weg zu planen oder eine Einkaufsliste zu schreiben. Wer täglich den Bäcker um die Ecke besuchen will, denkt nicht lange über den Weg dorthin nach. Er ist – als Modell, z. B. als Ausschnitt einer Stadtkarte oder als Folge von Wegstücken – im Kopf präsent. Natürlich hat niemand den Weg selbst (als Materie, gleichsam den ganzen Bürgersteig, die angrenzenden Häuser mit Tonnen von Ziegelsteinen etc.) im Kopf, sondern eine Vorstellung davon bzw. eine Erinnerung daran, wie der Weg beim letzten Gang zum Bäcker war. Der Unterschied von einem Modell des Weges, bei dem Wegstücke mit Erinnerungen kombiniert werden (etwa: aus der Haustür links bis zur Ecke, dann über die Straße und weiter bis zum Eingang des Ladens), und einer Karte der Stadt ist auch ein Unterschied in dem Grad der Mathematisierung des Modells. Wer zudem ausprobieren will, ob das neue Smartphone mit GPS den gleichen Weg weist, erlebt die Funktion eines extrem hoch entwickelten mathematischen Modells: etwa viele Lösungen von klassischen Problemen der Navigation, der mathematischen Modellierung der Erdoberfläche, der Satellitensteuerung und der Kommunikation mit ihnen. Im GPS, im Smartphone etc. steckt sehr viel Mathematik (vgl.: Greefrath und Riemer, 2013, Maaß und Spiegl, 2020). Beides sind schöne Beispiele für mathematische Technologie, die als Black Box funktioniert, auch wenn ein User bzw. eine Userin die verwendete Mathematik nicht versteht oder keine Ahnung davon hat, dass hier überhaupt Mathematik zum Einsatz kommt (vgl. Relevanzparadoxon)!

Wir erweitern das Einkaufsbeispiel, um an einen weiteren Aspekt des Modellbildens zu erinnern, der uns im Alltag sehr geläufig ist. Wer zum ersten Mal in ein neu gebautes Einkaufszentrum vor den Toren der Stadt fahren will, braucht zur Planung der Fahrt vielleicht ein besser als solches erkennbare Modell, einen Stadtplan oder einen Plan des öffentlichen Nahverkehrs. Vielleicht fragt man auch jemanden, der oder die schon dort gewesen ist und den Weg kennt, nach einer Wegbeschreibung (i. e. ein Modell des Weges!). Mit anderen Worten: Ohne lange theoretisch über Modellierung nachzudenken, versucht jemand sein bzw. ihr Modell des Weges dorthin so zu verbessern, dass er bzw. sie tatsächlich zum gewünschten Ziel gelangt. Dabei gehen die meisten Menschen pragmatisch vor. Die (zu erwartende oder erlebte) Praxis hilft zu entscheiden, wann eine Lösung gut genug ist. Wer fährt erst dann los, wenn mathematisch korrekt bewiesen ist, dass die gewählte Fahrtroute optimal ist? Wir betonen den pragmatischen Umgang mit der Bewertung der Qualität von Modellen, weil er auch in Unterrichtsprojekten als Entscheidungsgrundlage hilfreich sein kann.

Zum Abschluss des Einkaufsbeispiels verweisen wir noch darauf, wie selbstverständlich wir den Begriff „Modell" im Alltag in vielfältiger Art verwenden. Wer eine neue Hose kaufen will, hat vielleicht ein Modell davon im Kopf, ein Bild aus einer Werbung oder ein – menschliches – Modell, das eben diese Hose bei einer Vorführung (Modenschau) getragen hat, die dann im Werbefernsehen gezeigt wurde. Andere Beispiele sind etwa Spielzeugmodelle wie die Modelleisenbahn, ein Modellflugzeug oder Profimodelle wie das eines geplanten Hauses oder Einkaufszentrums, das vom Architektenteam dem Bauherrn gezeigt wird.

4.2 Modelle als Mittel zur Erkenntnis

Wir haben in Abschnitt 4.1 daran erinnert, dass Modelle ein Mittel zur Erkenntnis auch im Alltag sind. Wir skizzieren nun einige Schritte in die Erkenntnistheorie zur Begründung dieser These, wollen dabei aber nicht mit einer Erörterung in philosophischer Fachsprache abschrecken, sondern bewusst didaktisch erläutern, worum es geht. Der Einfachheit halber (und weil es am nächsten zur mathematischen Erkenntnis ist) beschränken wir uns hier auf Überlegungen zu optischen Wahrnehmungen.

Das Auge liefert uns – wenn es gesund ist – bei Licht optische Eindrücke, genauer eine Folge von Hell/Dunkel- und Farbimpulsen, die von Zellen im Augenhintergrund in Signale umgewandelt werden, die das Sehzentrum im Gehirn interpretieren kann. Diese Interpretation der optischen Reize durch das Gehirn ist der entscheidende Punkt! Eine elektronische Kamera nimmt optische Informationen (z. B. 24 Bilder pro Sekunde) auf und speichert sie – unkommentiert! – auf einem Speichermedium, etwa einer Festplatte. Unser Gehirn differenziert bekanntlich im Unterschied zur elektronischen Kamera, welche Bilder (bzw. optischen Informationen) es überhaupt zur Kenntnis nimmt, auf welche es reagiert und welche es einfach unbeachtet lässt. Das Gehirn arbeitet als Filter, wir konzentrieren uns – vielleicht – auf das Wichtige, das Bedeutende, das Richtungsweisende von all dem, was wir sehen (vgl. die lernprozessorientierte Didaktik, z. B. Schukajlow-Wasjutinski, 2010, Abschnitt 5.1). Eine ganz zentrale Rolle spielt dabei das Wiedererkennen von Bekanntem (Erfahrung), etwa von Objekten wie einem Buch oder einem Auto oder von Leuten, die wir schon kennen. Wenn wir z. B. ein Auto sehen, hilft dem Gehirn, dass es ein allgemeines Muster eines Autos, eben ein Modell eines Autos gespeichert hat. Ein PKW hat gewisse Merkmale (wie etwa vier Räder, eine bestimmte Größe, Anzahl der Sitze, Fenster, …), die das Gehirn nicht wie ein (schlecht programmierter) Computer bei der Objekterkennung Pixel für Pixel vergleicht, sondern aufgrund charakteristischer Merkmale. Aus der Vielzahl der gesehenen PKWs wird im Gehirn so etwas wie ein typisches Auto oder eben ein Modell eines PKWs, meist differenziert mit Unterkategorien wie Sportwagen, Kombi, SUV etc. Diese Bildung von Mustern oder Modellen ist ein wesentlicher Lernvorgang, er hilft schnell und effizient wahrzunehmen. Wer mitten auf der Straße steht und das erste Mal in seinem Leben ein merkwürdiges Ding beobachtet, das auf ihn zukommt, hat sehr wenig Zeit, etwas über Autos, Straßenverkehr und Verkehrsregeln (etwa „Vorsicht beim Überqueren von Straßen als Fußgänger!“) zu lernen. Wer hingegen schon seit Jahren routiniert Auto fährt, überlässt es oft seinem Gehirn (dem nicht bewussten Teil), die wichtigen (Verkehrs-)Signale und Bewegungen von anderen Verkehrsteilnehmern und -teilnehmerinnen zu erkennen und darauf angemessen zu reagieren (etwa durch Bremsen vor einer roten Ampel) – und konzentriert sich beim Fahren (auch) auf die Musik aus dem Autoradio oder ein Telefongespräch.

Selbstverständlich speichert das Gehirn nicht nur Muster oder Modelle von Autos (wer einen Bericht von einer Automesse sieht, erkennt ohne langes Nachdenken, ob ein neues Auto z. B. als Sportwagen oder Kombi konzeptioniert ist), sondern von allem: Lebewesen, technische Objekte, Gesichter, … Damit deuten wir an, in welchem – umfassenden – Sinn unsere Wahrnehmung der Realität (oder dessen, was wir dafürhalten) durch vorhandene Modelle bestimmt wird. Wenn wir spazieren gehen und Pflanzen und Tiere sehen, erkennen wir Laubbäume, Hecken, Blumen, Vögel, Insekten etc. mit Hilfe dessen, was wir schon vorher über solche Pflanzen und Tiere wissen. Mit anderen Worten: Wir haben biologische oder gärtnerische Kenntnisse (die mehr oder wenig richtig oder falsch sein können), um die Pflanze bzw. das Lebewesen vor unseren Augen einem Typ (von dem wir wiederum ein Modell, etwa eine mehr oder weniger korrekte Definition, im Kopf haben) zuzuordnen: dies ist eine Tanne, dies eine Buche, dies eine Rose, jenes eine – offenbar kranke – Eiche (wir sehen viele abgestorbene Äste) etc.

Im Alltag spielt noch eine andere Art von Modellen eine wichtige Rolle: Wenn wir Kindern beim Spielen mit einem Ball zuschauen, helfen uns dabei mehr oder weniger gut verstandene naturwissenschaftliche Modelle bzw. wieder die Erfahrung, um eine Erwartung zu haben: Geht dieser Ball ins Tor? Erreicht das laufende Kind den Ball noch, bevor er in den Bach fällt oder auf die Straße rollt? Hier geht es nicht um den Vergleich von gesehenen Dingen mit Mustern (oder im Gehirn gespeicherten Modellen), sondern um Vorstellungen davon, wie sich Objekte oder Lebewesen typischer Weise bewegen, z. B. wie sie fallen. Diese Art von Modellen kann durch explizite Mathematisierung ganz offensichtlich präziser werden!

Den kleinen Ausflug in die Philosophie abschließend, erinnern wir daran, dass diese unsere Argumentation zu Erkenntnis und Modellen in der Philosophie längst bekannt ist, also hier nicht neu erfunden wurde. Sir Karl Popper schrieb z. B. in seiner im Jahre 1934 veröffentlichten „Logik der Forschung“: „Unsere Alltagssprache ist voll von Theorien; Beobachtung ist stets Beobachtung im Lichte von Theorien." (S. 31). Theorien sind im hier verwendeten Sinne auch Modelle von Objekten, Verhaltensweisen, Organisationen etc.

4.3 Wechselwirkung: Modelle beeinflussen Menschen

Weshalb gibt es in der Grafik in Abbildung 1 auch einen Pfeil in Gegenrichtung, also von den Modellen zu den Menschen? Offenbar wirken Modelle auf Menschen, sie haben Einfluss auf die Möglichkeit etwas wahrzunehmen. Wer eine modellhafte Vorstellung von der Funktionsweise eines Autos, eines PCs oder eines Virus hat, kann diese Vorstellung verwenden, um ein Auto oder einen PC besser zu nutzen oder sich vor einem Virus zu schützen. Gerade in der Medizin gibt es sehr viele Beispiele dafür, wie Modellvorstellungen von Organen, Bakterien oder Genen zu Fortschritten in der Diagnose und Therapie beitragen („Funktionsmodell“[26], Morgenstern, 2011). Ebenso können solche Modelle dabei eine Rolle spielen, dass sich Menschen „gesünder“ verhalten.

Auch im Alltag und in der Gesellschaft haben Modelle erhebliche Auswirkungen auf uns alle. Als Beispiele nennen wir volkswirtschaftliche Modelle, mit denen Steuererhöhungen oder Steuersenkungen begründet werden (vgl. Abschnitt 2.5) oder Klimamodelle, mit denen auf Veränderungen durch menschliche Energienutzung verwiesen wird (vgl. als frühes Beispiel Volk, 2003).

Das Stichwort „menschliche Energienutzung“ erinnert daran, dass in der Grafik zwar das Wort Mensch steht, damit aber nicht behauptet werden soll, alle Menschen seien gleich, hätten gleiche Wahrnehmungen der Realität, Interessen an Veränderung und ähnliche Möglichkeiten zur Beeinflussung. Wer in Europa oder Nordamerika in einem Haus mit Heizung und Klimaanlage wohnt, nutzt deutlich mehr Energie als jemand, der in Afrika oder Mittelamerika auf der Straße lebt. Wer an der Börse mit Lebensmitteln spekuliert, hat einen ganz anderen Zugang zu Getreide als jemand, der wegen hoher Preise für Getreide seine Familie nicht ernähren kann. Wer mit dem Fahrrad in den Urlaub radelt, braucht dazu viel weniger Erdöl als jemand, der im Urlaub um die halbe Welt fliegt. Wie eng Ökologie, Energienutzung und Mathematik verbunden sind, zeigen übrigens eine Vielzahl von Unterrichtsmaterialien etwa in der MUED.

Ebenso unterschiedlich sind für verschiedene Menschen ihre Zugänge zur Realität bzw. ihre Wahrnehmung derselben; dies wiederum hängt auch damit zusammen, welche Modelle von Aspekten der Realität sie im Kopf haben und nutzen können. Dabei ist uns bewusst, dass hier das Wort *Realität* in einer philosophisch recht naiven Weise gebraucht wird.

Mit anderen Worten: Die Grafik selbst in Abbildung 1 ist ein sehr stark vereinfachtes Modell des menschlichen Umgangs mit Realität, bei dem Modellierung stets eine Rolle spielt.

Zur Abbildung 1 sei abschließend noch angemerkt, dass es zwischen Realität und Mensch offenbar eine dialektische Wechselwirkung gibt. Auf der einen Seite gibt die soziale, wirtschaftliche, gesellschaftliche, ökologische und persönliche Realität für jeden Menschen einen Rahmen, in dem er bzw. sie sich bewegen kann. Auf der anderen Seite beeinflussen Menschen diesen Rahmen und damit die Realität, indem sie versuchen, ihre Situation zu erkennen und zu verbessern.

5 „Modellieren“ steht im Zentrum des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts – ein Vorschlag für ein erweitertes Begriffsverständnis

5.1 Zur Rolle der Mathematik beim Modellieren[27]

Und wo bleibt die Mathematik? Die Modellierung mit mathematischen Methoden ist in der Forschung selbstverständlich. Forschungsberichte aus Natur- und Sozialwissenschaft enthalten ebenso wie solche aus anderen Bereichen der Wissenschaft üblicherweise mathematische Formeln (manche Menschen nennen diese Formeln „Gesetze“ in der Hoffnung, dass sich Natur und Gesellschaft an die „Naturgesetze“ halten mögen) und als Begründungen für die Richtigkeit der Ergebnisse bzw. die Korrektheit der Forschungsmethoden Verweise auf benutzte Mathematik. Unsere zentrale These für die Rolle der Mathematik beim Modellieren ist, dass ihr Einsatz die Qualität aller Modelle verbessert, in denen Regelmäßigkeiten mit Formeln oder Gleichungen bzw. Gleichungssystemen beschrieben und damit auch vorhergesagt werden können. Die Geschichte der Naturwissenschaften ist ein so reichhaltiger Beleg für die These, dass wir hier zur Begründung nur an Astronomie und Navigation sowie an Mechanik und Analysis erinnern („Ich behaupte aber, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel *eigentliche* Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin *Mathematik* anzutreffen ist.“ schreibt I. Kant 1786: Kant (2014), S. 6). Wer an der These zweifelt, ist eingeladen, unter dem Stichwort „Industriemathematik“ oder „Technomathematik“ im Internet zu suchen. Die Suchergebnisse verstärken den Eindruck, dass mathematische Modellierung für eine große Menge von Aspekten der Realität eine genauere und tiefer gehende Einsicht und Veränderungsmöglichkeit eröffnet. Das gilt insbesondere für naturwissenschaftliche, technische und ökonomische Themen; wenn hingegen individuelle menschliche Verhaltensweisen oder psychologische Faktoren modelliert werden sollen, zeigen sich schnell Grenzen sinnvoller mathematischer Modellierung.

Im Alltag der meisten Menschen sind explizite Modellierungen mit mathematischen Methoden eher selten. Wir fürchten, dass deshalb viele Menschen eine Möglichkeit zur rationaleren Entscheidungsfindung bzw. zum besseren Verständnis von gesellschaftlichen, wirtschaftlichen (vgl. Dorner, 2017, Abschnitt 1) und ökologischen Entwicklungen verpassen und plädieren auch deshalb für realitätsbezogenen Mathematikunterricht.

Um auf die mögliche Rolle der Mathematik beim Modellieren auch optisch deutlicher hinzuweisen, erweitern wir die Grafik im Bereich „Modell“: Abbildung 2. Die Arbeit am mathematischen Modell steht hier im Mittelpunkt des unteren Teils der Grafik, der gleichsam mit einer Lupe in den Bereich „Modell“ hineinschaut. Mit dem Ziel, ein mathematisches Modell zu erstellen, werden aus dem Modell für jene Aspekte der Realität, die zu erkennen oder zu verändern sich der Menschen zum Ziel gesetzt hat, die benötigten Daten samt ihrer Struktur herausgefiltert. Wichtig ist, dass es hier nicht einfach eine TOP-DOWN-Struktur gibt, in der ein planender Mensch die Wirklichkeit nach seinem Willen modelliert und mathematisiert – auch wenn viele Menschen gern so etwas tun könnten. Tatsächlich geht es um vielfältige Wechselwirkungen. Schon bei der Auswahl von zu beachtenden Aspekten der Realität geht als ein Kriterium mit ein, welche Aspekte denn überhaupt sinnvoll mathematisch beschreibbar sind. Mit anderen Worten: Wenn in einer Schulklasse etwas mathematisch modelliert werden soll, geht selbstverständlich auch die Selbsteinschätzung „Was können wir überhaupt?“ mit in die Entscheidung ein. Technische oder naturwissenschaftliche Aspekte sind aus dieser Sicht viel eher modellierbar. Emotionen und andere psychologische Aspekte bleiben deshalb ebenso meist ebenso unbeachtet wie soziale Beziehungen oder Esoterisches. Das ist auf den ersten Blick sehr sinnvoll: Wenn etwa Anhaltewege von Autos modelliert werden, um Gefahren oder Staubildungen besser verstehen zu können, bleibt die Farbe oder das Design der Autos zunächst ganz zurecht unbeachtet. Wenn man nach einigen Verfeinerungen der technisch orientierten Modellierung merkt, dass sich Verkehrsteilnehmer und -teilnehmerinnen in der beobachteten Realität auf den Straßen anders verhalten als im Modell, mag es sinnvoll sein, ihre emotionale Situation mit zu modellieren. Führt Stress oder Zeitdruck zu geringeren Sicherheitsabständen? Solche Zusammenhänge zu modellieren kann allerdings mathematisch schnell sehr anspruchsvoll werden!

Mit Abbildung 2 wird versucht, der Dynamik einer Modellierung insofern Rechnung zu tragen, als optisch mehrere Durchläufe eingezeichnet sind (vgl. der kleine Kreis im Teil mathematische Modellierung rechts unten). Die mathematische Modellierung, wie sie unten in Abbildung 2 angedeutet wird, ist eigentlich „nur“ ein besonderer Bestandteil der Modellierung, eine spezifische und in gewisser Hinsicht besonders effektive Methode der Modellierung.

Wenn die mathematische Arbeit im engeren Sinn für die erste mathematische Modellierung getan ist, ergeben sich daraus häufig Wünsche an die Modellierung und Versuche, sie durch bessere Daten, mehr Information über die Struktur der Daten oder das gezielte Beachten nur bestimmter Aspekte der Realität zu verbessern. Auch nach passenderer mathematischer Modellierung wird häufig gesucht. Es gibt keine fixe Regel dafür, nach wie vielen solchen Durchläufen das Ergebnis den Wünschen entspricht oder die weitere Arbeit an diesem Thema aufgrund von Zeitmangel, fehlenden weiteren Möglichkeiten zur Modellverbesserung oder anderen Gründen abgebrochen wird. In diesem Zusammenhang sei ausdrücklich erwähnt, dass weiterhin die Technologie eine wichtige Rolle spielt: Die Möglichkeiten und Grenzen des Einsatzes von mathematischer Software hat einen

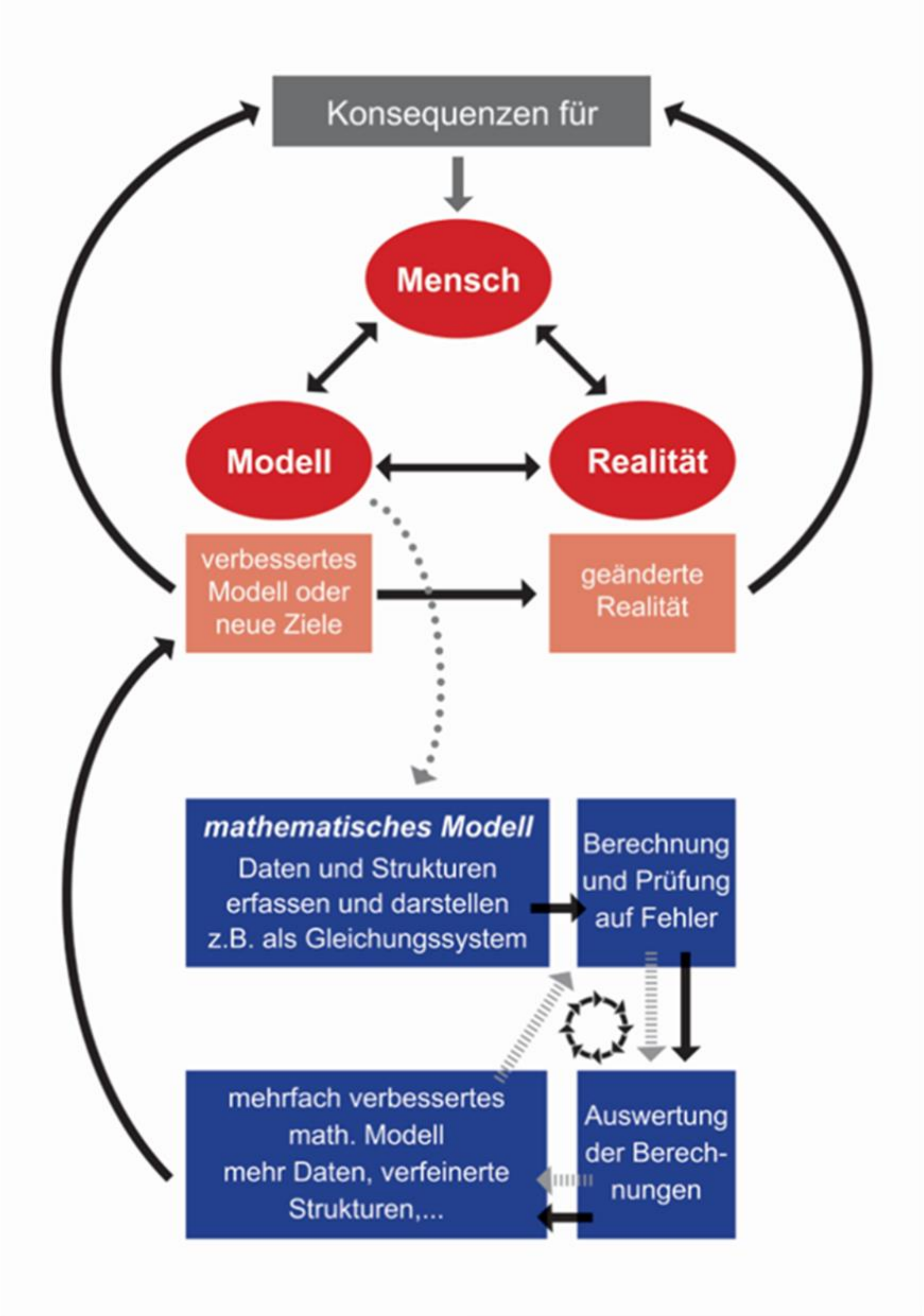

Abbildung 2: Erweiterter Modellierungskreislauf (Maaß, 2015, S. 200)

großen Einfluss auf die Auswahl von Themen, Aspekten der Modellierung und auf die Chancen, zu einem adäquaten Ergebnis zu kommen. Viele Themen können heute in der Forschung, der Industrie und in der Schule nur deshalb thematisiert werden, weil die Technologie hinreichende Unterstützung bietet.

Die Kästen für „verbessertes Modell oder neue Ziele“ und „geänderte Realität“ sollen daran erinnern, dass die (mathematische) Modellierung Folgen haben kann und soll, die ihrerseits wiederum Rückwirkungen auf den Menschen haben können und sollen. Eine mögliche Rückwirkung etwa einer forschenden Modellierung sind häufig neue Einsichten und Fragen, die zu neuen Modellierungen führen.

Einer Anregung von I. Grafenhofer (Koblenz) folgend, die wir gern aufnehmen, weisen wir an dieser Stelle ausdrücklich darauf hin, dass der untere (blaue) Teil der Grafik, in dem spezifisch auf mathematische Modellierung hingewiesen wird, auch durch einen (z. B. grünen) Teil ersetzt oder ergänzt werden kann, in dem biologisches, chemisches, physikalisches, ökonomisches etc. Modellieren dargestellt wird. Ganz offensichtlich gelingt das Modellieren am überzeugendsten, wenn Wissen aus allen relevanten Quellen einbezogen wird. Ein Beispiel dafür sind Modelle zur Veränderung des Klimas auf unserer Erde.

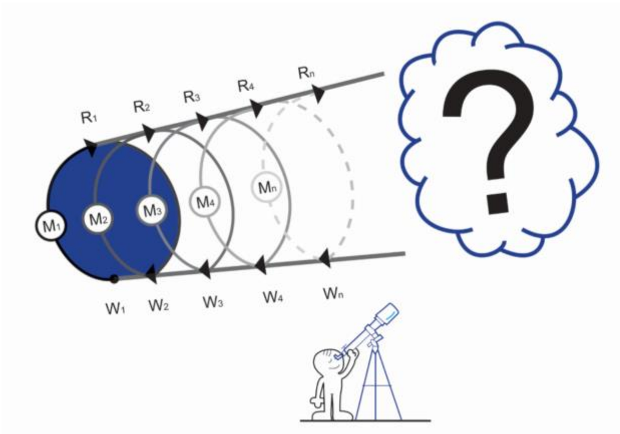

Abbildung 3: Modellieren mit Perspektive (Maaß, 2015, S. 202)

Abbildung 3 soll visualisieren, dass es sich hier um einen offenen Prozess handelt, der zu einem ungewissen Ende führt: Ausgangspunkt sind wieder WIR (W_i), also Menschen, die etwas verstehen oder verändern wollen, dazu modellieren und so Konsequenzen für die Realität (R_i) bewirken. Diese Konsequenzen oder andere Motivationen führen zu erneuten Anstrengungen, zu neuen und hoffentlich besseren Modellen, die wiederum Auswirkungen auf die Realität haben. Wann und wie die Bemühung um eine Verbesserung der Erkenntnis oder der Realität (normative Modelle!) endet, ist zu Beginn prinzipiell ebenso offen, wie die abschließende Bewertung des Prozesses: Ist tatsächlich (bzw. aus wessen Sicht?) eine Verbesserung erreicht worden?

Am Anfang steht eine Entscheidung: der Wunsch, etwas zu erkennen, etwas besser zu verstehen, zu verändern, schneller zu erreichen, mit wenig(er) Aufwand zu steuern oder Ressourcen möglichst effizient einsetzen zu können. All das und viel mehr kann als Motivation dienen. Nachdem ein Aspekt der Realität ausgewählt wurde, der mit mathematischen Methoden genauer betrachtet werden kann und soll, werden Daten und Gesetzmäßigkeiten gesucht, mit denen diese Daten verknüpft sind. Zu Beginn sind meist nicht alle notwendigen Daten vorhanden und nicht immer ist klar, in welcher Weise die Daten mit Hilfe des mathematischen Werkzeugkastens strukturiert werden können bzw. durch einen mathematischen Zusammenhang dargestellt oder beschrieben werden können.

Der Start im ersten Durchlauf beruht deshalb oft auf Schätzungen und sehr einfachen Mathematisierungen. Es werden zunächst (mathematische) Modelle erstellt von denen bekannt ist, dass sie keinesfalls alle Parameter berücksichtigen. Trotzdem werden schon bald Berechnungen angestellt, und sowohl das Ergebnis als auch der Weg dahin interpretiert. Die Interpretation kann in verschiedene Richtungen führen. Die ersten Ergebnisse verursachen oft Kopfschütteln: das Ergebnis ist im Hinblick auf seine Erklärungsmächtigkeit nicht zufriedenstellend. Meist aber kann wenigstens aus der Interpretation des ersten Anlaufes geschlossen werden, wie weiter vorgegangen werden soll.

Typische Folgen sind Fragen nach genaueren oder zusätzlichen Daten, nach komplexeren mathematischen Werkzeugen oder der Wunsch nach Präzisierung der Fragestellung bzw. der Zielsetzung (vgl. Borovcnik et al., 2018). Sobald eine oder mehrere dieser Fragen durchdacht sind, wird ein zweiter Versuch durchgeführt, dessen Ergebnis wiederum interpretiert werden muss.

Analog zum ersten Durchgang müssen die handelnden Personen entscheiden, ob und wie es weitergeht. Das ist oft eine subjektive Entscheidung, die von Zeit und Fähigkeiten, Motivation und vielen weiteren Faktoren abhängt, aber nicht objektiv durch die Mathematik vorgegeben ist (wie etwa beim Beweis eines Satzes). Nach einigen Durchgängen haben die handelnden Personen meist mit genügend großer Genauigkeit herausgefunden, was sie wissen wollten oder merken, dass sie trotz aller Bemühungen nicht weiterkommen, weil z. B. bessere Daten nicht zugänglich sind, mathematische Darstellungen die kognitiven Fähigkeiten übersteigen oder sie schlicht den Eindruck haben, dass weitere Bemühungen sich nicht mehr lohnen, weil der Arbeitsaufwand zu groß wird.

5.2 Verantwortung für die Folgen einer Modellierung in der Realität[28]

An dieser Stelle weisen wir besonders darauf hin, dass mit der Tätigkeit des (mathematischen) Modellierens mehr Verantwortung für die Resultate verbunden ist, als üblicherweise bei Übungs- oder Rechenaufgaben. Wenn ein Algorithmus für den nächsten Test geübt wird, kommt es nur darauf an, ob das Ergebnis stimmt, nicht aber, was es für die Realität bedeutet oder welche Konsequenzen für die betroffenen Menschen aus der Anwendung dieses Resultates folgen (können). Schon wenn eine Schulklasse zur besseren Finanzierung der nächsten Klassenfahrt plant, am Elternabend selbst gebackenen Kuchen zu verkaufen, kann das Erleben einer geglückten Modellierung (etwa die Überlegungen zur verkaufbaren Menge an Kuchen stimmten ebenso gut wie die Planung des Einkaufens und das Backen selbst) erfreuen. Es kann aber nicht so gut gelingen – und schon wird die Frage nach der Verantwortung gestellt.

Viel dramatischer ist es bei einer Profimodellierung, also dem Resultat der Arbeit von Mathematikerinnen und Mathematikern: Wenn die Belastbarkeit einer Brücke oder eines tragenden Seiles bei einer Seilbahn falsch modelliert und berechnet wurde, können die Folgen katastrophal sein – ebenso wie bei einem an einseitigen Interessen orientierten volkswirtschaftlichen Modell, das zu Gesetzen (für Steuern, Umweltbelastungen oder Subventionen) führt, die langfristig schlimme Folgen haben. Den Schülerinnen und Schülern ist nicht neu und unbekannt, dass ihre Handlungen in der realen Welt Konsequenzen haben (können), für die sie sich verantworten müssen (Stichwort: Ballspiel und Glasscheibe im Nachbarhaus). Neu ist für viele von ihnen nur, dass im realitätsbezogenen Mathematikunterricht die Resultate ihrer Bemühungen Konsequenzen wie im realen Leben außerhalb des Schulunterrichts haben (können).

6 Überlegungen zur Didaktik

6.1 Drei Thesen

Bevor wir einige Vorschläge zur Didaktik des Realitätsbezugs im Mathematikunterricht machen bzw. wiederholen, fassen wir unsere Sicht der Gründe dafür in einigen Thesen zusammen, die sowohl in den bisherigen empirischen Forschungsergebnissen von ISTRON-Mitgliedern zum realitätsbezogenen Mathematikunterricht (vgl. etwa Maaß, 2004) belegt sind als auch in unseren und internationalen empirischen Forschungen zum Verhältnis von Erwachsenen zur Mathematik (vgl. zusammenfassend Maaß, 1994, sowie viele Beiträge im ALM Journal[29]).

These 1: *Realitätsbezug kann sehr überzeugende und motivierende Antworten auf die Frage nach dem Sinn des Mathematikunterrichts geben.*

Wer im Unterricht den optimalen Tarif(-Anbieter) für sein Handy ausgerechnet hat und dadurch tatsächlich Geld spart, fragt sicher nicht mehr: „Wozu soll ich das lernen?" (vgl. Maaß, 2002). Ähnlich überzeugend können viele Themen aus dem Bereich Energie und Umwelt sein, wenn sie auf den Erfahrungshorizont der Lernenden bezogen sind. Also: Besser über das eigene Konsumverhalten nachdenken als über das aller Einwohnerinnen und Einwohnern der USA. Aber auch „Erwachsenenthemen" wie die Finanzierung des Eigenheims (vgl. Dorner, 2017) oder den schnellsten Weg zum nächsten Krankenhaus (vgl. Lutz-Westphal, 2007) im Falle eines Herzinfarktes können manchmal durch eine gute Rahmengeschichte für die Lernenden interessanter werden: Wir helfen der Tante, die nicht so gut rechnen kann, bei der Planung. Sie hat folgende drei Angebote bekommen. Welches soll sie annehmen? Oder für das zweite Beispiel: Der Nachbar war beim Arzt, er hat ein Problem mit dem Herzen. Was könnt ihr tun, wenn er schnell ins Krankenhaus muss?

These 2: *Verbindungen von Mathematik und Realität haben zu allen Zeiten einige Menschen so fasziniert, dass sie ihr ganzes Leben lang darüber nachgedacht haben.*

Wir verdanken diesen Menschen manch wichtige Einsichten und viele offene Fragestellungen, die uns zum weiteren Nachdenken anregen (vgl. Abschnitt 3). Wenn wir dazu beitragen, dass mehr Schülerinnen und Schülern in der Schule mit Aspekten der Thematik in Kontakt kommen, können wir hoffen, dass auch einige von ihnen sich über die Schule hinaus intensiv damit beschäftigen. Wir sind sehr gespannt darauf, wie sich die Diskussion der Thematik durch die erhofften neuen Impulse erweitert.

These 3: *Realitätsbezug erweitert das Bild von Mathematik, mit dem die Lernenden die Schule verlassen*.

Wenn im Schulunterricht der operative Aspekt der Mathematik, das Trainieren des Lösens verschiedener Aufgabentypen zu sehr dominiert (was ja immer wieder kritisiert wurde und wird), bleibt bei den Erwachsenen auf die Schulzeit rückblickend ein sehr einseitiges und – aus unserer Sicht – falsches Bild von Mathematik. Das ist aus vielen Gründen bedauerlich. Einmal hindert ein solches Bild viele Menschen daran, Mathematik für ihre Zwecke im Alltag zu nutzen. Viel zu wenig Menschen können Finanzierungen tatsächlich nachrechnen, aufgrund eigener Berechnungen für sie günstige Tarife wählen, handwerkliche Dinge in der eigenen Wohnung vorab kalkulieren (Geometrie und Finanzen!) und auf der anderen Seite fallen viel zu viele auf manipulative Statistiken (vgl. Krämer, 2015), interessengeleitete mathematische Modellierungen von wirtschaftlichen Dingen etc. herein. Weiterhin fehlen solche Menschen, wenn es um den Wirtschaftsstandort geht. Wer kann glauben, dass Mathematik die Basis und das Erfolgsgeheimnis aller Neuen Technologien ist und sich mit Begeisterung den kreativen und konstruktiven Aspekten der Mathematik verschreiben, wenn er oder sie aus der Schule nur weiß, dass Mathematik einzig aus endlosen Ansammlungen sinnloser (Rechen-)Aufgaben besteht?

Wir weisen an dieser Stelle ausdrücklich darauf hin, dass das Lösen von Aufgaben, das Üben von Algorithmen wie bisher und Unterricht zum Verständnis der Verbindungen von Mathematik und Realität nur zwei von vielen Aspekten sind, die ein einigermaßen rundes oder vollständiges Bild von Mathematik ausmachen. Argumentieren und Beweisen (Bürger, 1979; Sattlberger und Götz, 2007), historische Entwicklungen, Verbindungen („Vernetzungen“, siehe z. B. die „Mathe vernetzt“-Bände bei der MUED) von Mathematik zu Kunst, Musik, Naturwissenschaften und Informatik, Sprachwissenschaften und Technologie, Philosophie und Theologie, Sport und Medizin sind nur einige weiterführende Stichworte dazu.

Ganz zum Schluss erwähnen wir noch einen ganz egoistischen Grund. Leute, die ein schlechtes Bild von Mathematik haben, können auch mal als Politiker bzw. Politikerinnen über Mathematik entscheiden. Wir haben durchaus Angst davor, dass es uns eines Tages so geht wie derzeit den Kolleginnen und Kollegen aus der Biologie, denen per Gesetz „Intelligent Design“ vorgeschrieben wird[30]. Übertriebene Ängste? Wir erinnern an die Begeisterung, mit der seinerzeit die Schlagzeile „Sieben Jahre sind genug!“ in Bezug auf den Mathematikunterricht in den Medien aufgegriffen und verbreitet wurde (vgl. Heymann, 2013).

6.2 Gegenargumente

Immer dann, wenn gewünscht oder gefordert wird, etwas Neues oder etwas schon Bekanntes wieder etwas mehr im Unterricht zu behandeln, gibt es eine typische Abwehrdiskussion. Das Kernargument dagegen ist klar, einfach und für die Meisten sehr überzeugend: Wir haben jetzt schon zu viel Stoff – mehr geht nicht. Was nutzen all die schönen – und uns überzeugenden – Argumente für das Thema „Verbindungen von Mathematik und Realität“, wenn sie an dieser Blockademauer abprallen? Nichts. Also müssen wir uns mit dem zentralen Gegenargument zumindest thesenhaft befassen.

Zunächst weisen wir darauf hin, dass in allen uns bekannten Lehrplänen im deutschsprachigen Raum ein Mathematikunterricht in unserem Sinn gefordert wird. Nirgendwo findet sich die staatliche Auflage, sich im Unterricht auf ein „training-to-the-test“ zu beschränken. Wir sehen allerdings das Problem, dass viele Lehrende Stoffkataloge aus Lehrplänen oder Kompetenzkatalogen sehr umfassend interpretieren, also mehr Aufgaben oder Aspekte eines Stoffgebietes unterrichten, als „eigentlich“ notwendig wäre, um den offiziellen

Anforderungen gerecht zu werden. Die Freiheit, die vorhandenen Stoffkataloge zu interpretieren, ist aber die Chance, andere Sichtweisen auf denselben Stoff (die Mathematik) im Unterricht zu thematisieren. Mit anderen Worten: Der Stoff ist nicht „objektiv“ (durch den Dienstgeber) erdrückend viel, sondern nur subjektiv als Ergebnis der Interpretation der Lehrkraft. Es gibt also einen Spielraum, der nutzbar ist. Denken wir zum Beispiel an die Konstruktion von Dreiecken, dann ist dieser Spielraum von der Angabe der drei Seitenlängen bis zur Angabe „Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Summe s der Seiten a und b (mit $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b$), die Größe des Winkels ACB und die Länge h_a der von A auf die Gerade durch B und C gefällten Höhe gegeben sind: $s = 7$ cm, $h_a = 4$ cm und $\gamma = 100°$“[31] sehr groß.

Vielleicht fehlt es doch eher an der Motivation, als an der Möglichkeit. Dann bringen wir ein motivierendes Argument! Wer gründlich empirisch forschend oder einfach sich und andere Leute beobachtend, die Mathematik gelernt haben, wissen möchte, wie das Verhältnis von Mathematik und Erwachsenen ist, wird auf zwei harte Fakten stoßen:

1. *Die Mathematikkenntnisse sind sehr gering. Was nicht im Beruf oder Alltag verwendet wird, ist schnell vergessen.*
2. *Die Einstellung zur Mathematik ist häufig negativ. Wenn das Schulfach Mathematik in Filmen oder Büchern, in Träumen oder Erinnerungen eine Rolle spielt, dann meist eine negative.*

Wenn das stimmt (und es gibt keinen begründeten Zweifel – vgl. zusammenfassend Maaß (1994) oder die internationalen Beiträge von *Adults Learning Mathematics*), dann ist es kein Nachteil, wenn etwas vom üblichen Stoff entfällt, damit der Druck geringer wird und dafür etwas Neues, Positives, Motivierendes im Mathematikunterricht stattfindet, etwa zum Thema „Verbindungen von Mathematik und Realität“.

Nach unseren Erfahrungen bleiben solche besonderen Unterrichtssequenzen besser im Gedächtnis als „normale“ und verhelfen zudem zu positiven Eindrücken von Mathematikunterricht. Kurz: Wer etwas in dieser Richtung in den Mathematikunterricht einbringt, ist auf dem richtigen Weg, das Image der Mathematik insgesamt zu verbessern!

6.3 Eine Weichenstellung

Beginnen wir mit einem kleinen Beispiel: Andrea hat ein Buch gelesen, das ihr sehr gut gefallen hat. Am Ende des Buches findet sie einen Hinweis, nach dem es noch zwei Fortsetzungen zum Buch gibt. Die beiden Bücher kosten 7,90 Euro und 8,90 Euro. Die typische Aufgabe lautet nun: Wie viel kosten beide Bücher zusammen?

Wir schlagen stattdessen vor, etwas offener zu fragen: Was kann Andrea tun, um die beiden Bücher zu lesen? Kann sie sich die Bücher leihen? Vielleicht haben andere Schüler und Schülerinnen alle drei Bücher und sind bereit, sie auszuleihen? Vielleicht lernt Andrea bei dieser Gelegenheit, dass es eine Bücherei gibt, die ihr diese Bücher leiht? In diesem Fall hat Andrea etwas für ihr Leben gelernt, das wesentlich wichtiger ist als 7,9 + 8,9 = 16,8 (Euro). Hören wir den Einwand, dass das nicht Mathematik ist und nicht in den Mathematikunterricht gehört? Im realitätsbezogenen Mathematikunterricht geht es um die tatsächliche Lösung realer Probleme, nicht nur ums Rechnen! Wenn wir nach gebrauchten Exemplaren (im Internet) suchen, können wir Fragen nach der (prozentuellen) Verbilligung im Vergleich zum Neupreis stellen.

Das kleine Beispiel soll mit Nachdruck darauf hinweisen, dass wir es für sehr wichtig halten, in einem solchen Mathematikunterricht nicht bloß mit Fake-News zu arbeiten, sondern nachvollziehbar den Versuch zu machen, reale Probleme tatsächlich zu lösen. Fragestellungen aus der Praxis sollen nicht nur Vorwand für oder Einleitung zu typische(n) Schulbuchaufgaben sein.

In diesem Sinne ist es eine Weichenstellung für ein anderes Verständnis von Verbindlichkeit im Mathematikunterricht.

6.4 Konkreter bedeutet komplexer

Mathematik zeichnet sich durch ihre Abstraktionsleistung im Vergleich zu anderen Wissenschaften besonders aus. Wenn wir die natürlichen Zahlen 2 und 2 addieren, erhalten wir immer 4, egal welche Einheit wir verwenden oder welche Objekte wir dabei im Sinn haben. Wenn wir hingegen im Unterricht die Frage stellen, wie weit wir gegangen sind, wenn wir erst 2 km und dann weitere 2 km gegangen sind, ist die richtige Antwort nur auf den ersten Blick „4 km“. Wenn wir reale Wege betrachten, sind wir vermutlich beispielsweise 3,92 km oder 4,15 km gegangen. Zudem müssen wir beim Nachrechnen sehr lange darüber diskutieren, ob und wie wir etwa Höhenunterschiede (eine Bordsteinkante, eine Steigung) berücksichtigen (vgl. Maaß, 2011). Dann sind wir aber sofort bei durchaus schwierigen und spannenden Fragen der Modellierung und Genauigkeit. Wenn wir über sehr große Genauigkeit nachdenken, kommen auch physikalische Grenzen in den Blick: Moleküle und Atome sind zwar sehr klein, aber nicht beliebig klein. Für welches n wird 10^{-n} Meter physikalisch sinnlos?

Hegel schreibt, dass es einen Aufstieg vom Allgemeinen zum Konkreten gibt (gut erläutert in Siebert (2006, S. 159)). Deshalb ist es für uns nicht überraschend, dass es auch im Mathematikunterricht schwieriger sein kann, einen immer konkreteren Realitätsbezug herzustellen und zu erarbeiten, als „nur“ abstrakte, also inhaltsleere Algorithmen zu üben. Wie viel Realitätsbezug ist sinnvoll? Was kann aus dem Versuch gelernt werden, bei der Behandlung einer einfachen Frage (2 + 2 = ?) ganz besonders nah an die Realität zu gehen? Wir sehen hier eine nützliche Lernchance. Inhaltlich ist das Begriffspaar *abstrakt/konkret* sehr wichtig beim Nachdenken über Realität. Mathematik spielt hier (zusammen mit Logik) eine bedeutende Rolle als Beispiel für gelungene Abstraktion mit immer wieder verblüffender konkreter Relevanz in der Praxis. Methodisch ergibt sich eine wunderbare Chance zum selbstbestimmten Lernen. Die Schüler und Schülerinnen können selbst entscheiden, wie weit sie auf dem Weg der Konkretisierung gehen wollen. Gelegenheiten, bei denen die Lernenden im Mathematikunterricht selbst über den Unterrichtsgang und die Themenwahl entscheiden können (ohne Risiken für ihren Maturaerfolg) sind äußerst selten, aber im Hinblick auf die zentralen Lehrziele „Selbstständigkeit“ oder „Mündigkeit“ sehr wertvoll (Adorno, 1971).

6.5 Projekte

Diese beiden zentralen Lehrziele („Selbstständigkeit“, „Mündigkeit“) werden besser erreicht, wenn auch im Mathematikunterricht mit Hilfe der Lehrkraft geübt und gelernt wird, im Rahmen des Unterrichts über den Unterricht verantwortungsbewusst Entscheidungen zu fällen. Realitätsbezogene Projekte bieten dafür besonders gute Chancen, weil nach jedem Umlauf in der Spirale von WIR auf MODELL zu REALITÄT und zurück zu UNS eine Entscheidung ansteht: Reicht das? Machen wir weiter? (Vgl. Abschnitt 4.)
In unserem Beitrag (um hier nur ein Beispiel von vielen anzudeuten) im ISTRON Band 6 zum Flug des Habichts haben wir ganz bewusst solche Entscheidungspunkte herausgearbeitet (Maaß und Götz, 2019). Von Stufe zu Stufe brauchen wir bessere Daten, neue mathematische Werkzeuge etc. und werden für die Mühe belohnt, dass es immer besser gelingt, die Daten aus der Realität mathematisch zu modellieren und zu verstehen.

Literatur

Ableitinger, C. (2010). *Biomathematische Modelle im Unterricht. Fachwissenschaftliche und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien.* Vieweg+Teubner Wiesbaden.

Adorno, T. W. (1971). *Erziehung zur Mündigkeit*. Suhrkamp Berlin.

Baldus, R. & Löbell, F. (1964). *Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Geometrie der Ebene*. Sammlung Göschen Band 970/970a. Walter de Gruyter & CO. Berlin (4. Aufl.).

Bardy, T. (2019). Die Geschwindigkeit eines Ruderbootes im Verlauf eines Rennens – ein Beispiel mathematischen Modellierens für die Sekundarstufe II. In I. Grafenhofer & J. Maaß (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 6. ISTRON-Schriftenreihe.* Springer Spektrum Wiesbaden (S. 7–37).

Baumann, P. & Kirski, T. (2016). Analysis mit hyperreellen Zahlen. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 100, S. 6–16. https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/79

Beutelspacher, A. & Petri, B. (1996). *Der Goldene Schnitt.* Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg Berlin Oxford (2., überarb. und erw. Aufl.).

Bigalke, H. G. (1996). Chaostheorie und Fraktale Geometrie im Mathematikunterricht? *MNU 49*(1), S. 40–52.

Blum, W. & Kaiser, G. (2018). Zum Lehren und Lernen des mathematischen Modellierens – eine Einführung in theoretische Ansätze und empirische Erkenntnisse. In H.-S. Siller, G. Greefrath & W. Blum (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4. 25 Jahre ISTRON-Gruppe – eine Best-of-Auswahl aus der ISTRON-Schriftenreihe.* Springer Spektrum Wiesbaden (S. 1–16).

Blum, W., & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren*, 128, S. 18–21.

Boese, G., & Luther, W. (1981). Stetige, nirgends differenzierbare Funktionen und nicht rektifizierbare Kurven. *Mathematische Semesterberichte, 30*(2), S. 228–249.

Borovcnik, M. & Götz, S. & Maaß, J. (2018). Ein literarischer Zugang zu Zufall und Wahrscheinlichkeit. *Stochastik in der Schule 38* (Heft 2), S. 2–17.

Bourbaki, N. (1971). *Elemente der Mathematikgeschichte*. Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen.

Brouwer, L. E. J. (1907). *Over de Grondslagen der Wiskunde*. Akademische Prüfschrift Amsterdam, Leipzig.

Brouwer, L. E. J. (1925). Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. I. *Mathematische Annalen, 93*(1), S. 244–257.

Bürger, H. (1979). Beweisen im Mathematikunterricht – Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Beweisen im Mathematikunterricht.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 2. Hölder-Pichler-Tempsky, B. G. Teubner Wien Stuttgart (S. 103–134).

Cantor, G. (1932). Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. In E. Zermelo (Hrsg.), *G. Cantor: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Springer-Verlag Berlin (S. 282–356).

Dormayer, P. (1991). Chaos bei der Feigenbaumabbildung $f(x) = 4x(1-x)$. *Didaktik der Mathematik 19*, S. 207–220.

Dorner, C. (2017). Kreditszenarien. In H. Humenberger & M. Bracke (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 3. ISTRON-Schriftenreihe.* Springer Spektrum Wiesbaden (S. 51–81).

Eichler, A. & Riemer, W. (2008). Daten, die auf der Erde liegen – auf der Spurensuche im Supermarkt. *Stochastik in der Schule 28* (Heft 2), S. 2–12. http://www3.math.uni-paderborn.de/~agbiehler/sis/sisonline/struktur/jahrgang28-2008/Heft2/2008-2_Eichler_Riemer.pdf

Engels, F. (1978). Anteil der Arbeit an der Menschwerdung des Affen. In *Marx-Engels-Werke*, Band 20. Dietz Verlag Berlin.

Götz, S. & Humenberger, H. (2008). Das Problem des anderen Kindes. *MU Jahrgang 54*, Heft 1, Thema: „Stochastische Phänomene", S. 50–60.

Götz, S. & Reichel, H.-C. (Hrsg.) (2011). *Mathematik 7* von R. Müller und G. Hanisch. öbv Wien.

Götze, H. & Wille, R. (Hrsg.) (1985): *Musik und Mathematik. Salzburger Musikgespräch 1984 unter Vorsitz von Herbert von Karajan*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo.

Greefrath, G. & Riemer, W. (Hrsg.) (2013). Mit Positionen rechnen – GPS im Mathematikunterricht nutzen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 55. Jahrgang*, Heft 53. http://www.riemer-koeln.de/mathematik/publikationen/gps/mit-positionen-rechnen/mit-positionen-rechnen-pm-53.pdf

Habermas, J. (1973). *Erkenntnis und Interesse*. Suhrkamp Frankfurt.

Henn, H.-W. (2006). Durchblick im Steuerdschungel. Die Mathematik der Einkommensteuer. *mathematik lehren*, 134, S. 22, S. 47–51.

Heuser, H. (1986a). *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. B. G. Teubner Stuttgart.

Heuser, H. (1986b). *Lehrbuch der Analysis. Teil 2.* B. G. Teubner Stuttgart.

Heymann, H. W. (2013). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz Weinheim Basel (2., überarbeitete und neu ausgestattete Aufl.).

Heyting, A. (1934/1974). *Mathematische Grundlagenforschung – Intuitionismus – Beweistheorie*. Springer Berlin (Neudruck Berlin, Heidelberg, New York).

Hilbert, D. (1923). Die logischen Grundlagen der Mathematik. In D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen III.* Springer-Verlag Berlin 1935 (S. 178–191).

Hischer, H. (1994). Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt (1). Entdeckung der Irrationalität am Pentagon – Ein Beispiel für den Sekundarbereich I. *Mathematik in der Schule 32*, 4, S. 238–248. http://hischer.de/horst/publikationen/zeitschr-beitraege/1994-MathSchule-MU_Gesch/1994-Math-Gesch-Teil1.pdf

Hume, D. (1896). *A Treatise of Human Nature*. Oxford Clarendon Press. http://files.libertyfund.org/files/342/0213_Bk.pdf

ISB (o. J.). *Genehmigter Lehrplan – gültig für Jgst. 8 bis 12. Mathematik.* http://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26378

Jonak, U. (2012). *Grundlagen der Gestaltung.* Vieweg+Teubner/Springer Wiesbaden (2. Aufl.).

Kaiser, B. (2019). *Targeted. My Inside Story of Cambridge Analytica and How Trump, Brexit and Facebook Broke Democracy*. HarperCollins Glasgow.

Kant, I. (1781/1979). *Kritik der reinen Vernunft*. Johann Friedrich Hartknoch Riga, zitiert nach Philipp Reclam jun. Leipzig.

Kant, I. (2014). *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*. Edition Holzinger Berlin (3. Aufl.).

Krämer, W. (2015). *So lügt man mit Statistik*. Campus Frankfurt / New York.

Krengel, U. (1991). *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Vieweg Braunschweig / Wiesbaden (3., erw. Aufl.).

Lobatschewski, N. I. (1899). *Zwei geometrische Abhandlungen*. Aus dem Russischen übersetzt mit Anmerkungen und einer Biographie des Verfassers von F. Engel. B. G. Teubner Leipzig.

Lutz-Westphal, B. (2007). Optimal zum Ziel: Das Kürzeste-Wege-Problem. In S. Hußmann & B. Lutz-Westphal (Hrsg.), *Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht*. Vieweg Wiesbaden (S. 1–37).

Luhmann, N. (2017). *Systemtheorie der Gesellschaft*. Suhrkamp Berlin.

Maaß, J. (1988). *Mathematik als soziales System. Geschichte und Perspektiven der Mathematik aus systemtheoretischer Sicht*. Deutscher Studien Verlag Weinheim.

Maaß, J. (1994). Was bleibt? Erfolge und Mißerfolge des Mathematikunterrichts aus der Sicht von Erwachsenen. *Didaktik-Reihe der ÖMG*, Heft 22, S. 108–131.

Maaß, J. (2011). Realitätsbezug und Realität im Mathematikunterricht. In T. Krohn, E. Malitte, G. Richter, K. Richter, S. Schöneburg & R. Sommer (Hrsg.), *Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik – Mathematikdidaktische Ansätze*. Franzbecker Hildesheim (S. 221–230).

Maaß, J. (2015). *Modellieren in der Schule. Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts*. Reihe „Schriften zum Modellieren und zum Anwenden von Mathematik“, Band 5. WTM Münster.

Maaß, J. & Götz, S. (2019). Der Beuteflug des Habichts und das Nest des Sperbers. Einfache Modelle für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. In J. Maaß & I. Grafenhofer (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 6. ISTRON-Schriftenreihe*. Springer Spektrum Wiesbaden (S. 113–127).

Maaß, J. & Grafenhofer, I. (2019). Einige Überlegungen zum Modellieren. In J. Maaß & I. Grafenhofer (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 6*. *ISTRON-Schriftenreihe*. Springer Spektrum Wiesbaden (S. 1–6).

Maaß, J. & Spiegl, M. (2020). Eine Sonde flog zum Pluto: „New Horizons“ flog auch für den Mathematikunterricht! In J. Maaß (Hrsg.), *Attraktiver Mathematikunterricht. Motivierende Beispiele aus der Praxis*. Springer Heidelberg (S. 91–112).

Maaß, K. (2002). Handytarife. Funktionen mit mehreren Veränderlichen. *mathematik lehren*, 113, S. 53–57.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht – Ergebnisse einer empirischen Studie*. Verlag Franzbecker Hildesheim.

Meschkowski, H. (1965). *Mathematik als Bildungsgrundlage*. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig.

Meschkowski, H. (1973). *Hundert Jahre Mengenlehre*. Deutscher Taschenbuch Verlag München.

Morgenstern, U. (2011). *Simulation biologischer Prozesse in Organen und Organsystemen. Modelle in der Biomedizinischen Technik*. Lehrmaterial nur für den Gebrauch im Kurs am Institut für Mehrphasenprozesse an der Leibniz-Universität Hannover. https://tu-dresden.de/ing/elektrotechnik/ibmt/das-institut/Kontakt-Liste/ute-morgenstern/ressourcen/dateien/lehre_mo/lehrmaterialien/modelle_in_der_bmt/mod-64-Hannover-10_11.pdf?lang=de

NOSt (2018). *Neue Oberstufe AHS in Österreich. Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 10.12.2019*. https://www.ris.bka.gv.at/Geltende Fassung.wxe? Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568

Platon (1994). *Euthydemos* und *Der Staat* findet sich in den gesammelten Werken. Rowohlt Reinbek bei Hamburg.

Popper, K. (1934). *Logik der Forschung*. Mohr Tübingen.

Pöschl, M. (2017): Normative Grenzen der Wissenschaftsfreiheit. In R. Neck, H. Schmidinger & C. Spiel (Hrsg.), *Grenzen in den Wissenschaften. Wissenschaft Bildung Politik* (Band 20). Böhlau Wien (S. 159–199).

Raith, P. (2009). Chaos und Fraktale. *Didaktikhefte. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, Heft 41, S. 85–99.

Reichel, H.-C. (1988). Zum Realitätsproblem mathematischer Begriffe. In E. Oeser & E. M. Bonet (Hrsg.), *Das Realismusproblem. Wiener Studien zur Wissenschaftstheorie* 2. Edition S Wien (S. 95–157).

Reichel, H.-C. & Zöchling, J. (1990). Tausend Gleichungen – und was nun? – Computertomographie als Einstieg in ein aktuelles Thema des Mathematikunterrichts. *Didaktik der Mathematik, 18*(4), S. 245–270.

Ruben, P. (1979). *Philosophie und Mathematik*. B. G. Teubner Leipzig.

Rusawin, G. I. (1968). *Über die Natur der mathematischen Erkenntnis* (russisch). Moskau, Übersetzung: Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (DDR).

Russell, B. (1901/1967). *Die Mathematik und die Metaphysiker*. Zit. nach Kursbuch 8 Frankfurt.

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. Cambridge University Press.

Sattlberger, E. & Götz, S. (2007). ERBEG – Erklären und Begründen im Mathematikunterricht. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen der ÖMG*, Heft 39, S. 102–132.

Schukajlow-Wasjutinski, S. (2010). *Schüler-Schwierigkeiten und Schüler-Strategien beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik*. Dissertation Kassel. https://kobra.uni-kassel.de/bitstream/handle/123456789/2010081133992/DissertationSchukajlowWasjutinski.pdf;jsessionid=0BACB3E6F2FF9924737259D42EADA5AA?sequence=7

Siebert, B. (2006). *Begriffliches Lernen und entwickelnder Unterricht: Grundzüge einer kulturhistorischen Didaktik für den integrativen Unterricht*. *Schriftenreihe International Cultural-historical Human Sciences*, Band 18. Lehmanns Berlin.

Siller, H.-S. & Greefrath, G. (2015). Die ISTRON-Gruppe – Anwendungen und Modellieren in Forschung und Praxis. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* 98, S. 58. https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/320/ 316

Stegmüller, W. (1978). *Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie*. Band 1. Alfred Kröner Verlag Stuttgart.

Thiel, C. (1972). *Grundlagenkrise und Grundlagenstreit*. Verlag Anton Hain Meisenheim.

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Band 1 (unter Mitarbeit von F. Förster). *Fachdidaktische Grundfragen. Didaktik der Analysis*. Springer Wiesbaden (2., durchgesehene Aufl.).

Tietze, U.-P. (2000). Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. In U.-P. Tietze, M. Klika & H. Wolpers (Hrsg.), *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*, Band 2 (unter Mitarbeit von P. Schroth und G. Wittmann). Vieweg Braunschweig/Wiesbaden.

Tschiedel, R. (1977). *Wissenschaft im Konflikt um die Kernenergie*. Campus Frankfurt am Main/New York.

Volk, D. (2003). Schlüsselprobleme! Der CO_2-Müll unserer Schule. *mathematik lehren*, 120, S. 16–20.

Volkert, K. Th. (1997). *Die Krise der Anschauung. Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik* 3. Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen.

Wittenberg, A. I. (1963). *Bildung und Mathematik*. Ernst Klett Stuttgart.

Wittgenstein, L. (1974). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Suhrkamp Frankfurt am Main.

Wußing, H. (1982). *Carl Friedrich Gauß*. B. G. Teubner Leipzig.

---

[1] Nach Niklas Luhmann lässt sich eine Wissenschaft durch die Qualität ihrer Aktivität in den drei Systemreferenzen Funktion (Forschung), Leistung (Ausbildung) und Reflexion (Kommunikation über die eigenen Grundlagen) beurteilen (Luhmann, 2017, S. 471–484). Wir hoffen, mit diesem Beitrag unserer Wissenschaft, der Mathematikdidaktik, im Bereich der Reflexion einen Impuls zu geben.

[2] http://www3.math.uni-paderborn.de/~agbiehler/sis/sisonline/index.htm. Zugegriffen: 10. Dez. 2019

[3] https://www.mued.de/html/index.html. Zugegriffen: 10. Dez. 2019

[4] Solche Zuordnungen sind natürlich Vereinfachungen!

[5] https://www.spektrum. de/lexikon/mathematik/philosophie-der-mathematik/ 7823. Zugegriffen: 13. Juli 2020.

[6] Ein einführendes Werk in dieses Thema ist zum Beispiel Baldus und Löbell (1964).

[7] Auch hier verkürzen wir mit der Zuordnung bzw. Etikettierung eine umfangreiche Diskussion.

[8] Für den Mathematikunterricht hat sich der formal-axiomatische Standpunkt als nicht fruchtbar erwiesen. Die nach dem Sputnikschock ins Leben gerufene New Math-Bewegung ist schon nach wenigen Jahren gescheitert und u. a. von einem anwendungsorientierten Zugang abgelöst worden (vgl. Tietze et al., 2000, Abschnitte 1.1.1 und 1.1.2).

[9] In der Geschichte der Philosophie wurden solche Probleme besonders intensiv am Beispiel des Dualismus von Seele und Körper diskutiert, z. B. von R. Descartes (Abschnitt 3.2).

[10] Wir zielen auf pointierte Anregungen zur Diskussion über hier erwähnte Positionen, nicht auf eine abgerundete und ausgewogene Lexikondarstellung.

[11] Kaum eine Verbindung von Mathematik und Realität wirkt auf uns alle so stark wie wirtschaftswissenschaftliche Modelle und Prognosen zu Steuern, Konjunktur etc.

[12] https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201516-mathematik-ahs/. Zugegriffen: 11. Dez. 2019.

[13] Vgl. die differenzierte Darstellung in: https://plato.stanford.edu/entries/pythagoreanism/. Zugegriffen: 13. Juli 2020.

[14] Zur Einführung seien z. B. die Seiten https://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/goldenerschnitt/lu/anfang04.html oder http://mathe-abakus.fraedrich.de/mathematik/pythagoras.html genannt. Zugegriffen: 11. Dez. 2019.

[15] Die Existenz irrationaler Zahlen kann am Beispiel der Diagonale eines Quadrates (Wurzel 2) einfacher bewiesen werden. Aber es ist eine bemerkenswerte Pointe, dass ausgerechnet das Symbol einer einflussreichen Gruppe etwas enthält, das dem Motto eben dieser Gruppe widerspricht. Entscheidend ist aber, dass im antiken Griechenland die Sprache der Algebra nicht zur Verfügung stand. Die geometrische Methode der Wechselwegnahme ist ungleich einfacher beim regelmäßigen Fünfeck anzuwenden als beim Quadrat.

[16] http://www.numa.uni-linz.ac.at/JKS/. Zugegriffen: 13. Juli 2020.

[17] Wer nicht das Glück hat, von den Modellierungsprofis der Industrie- oder Technomathematik persönlich etwas über neue Forschungen zu erfahren, findet viele Informationen im Internet, etwa bei den wissenschaftlichen Gesellschaften wie der Max-Plank-Gesellschaft oder den Frauenhofer-Instituten. Viele dieser Berichte sind bewusst für ein nichtwissenschaftliches Publikum geschrieben – also auch als Basismaterial für Schülerreferate geeignet. Wer die Berichte mit „mathematischen Augen" liest, findet überall Spuren der Anwendung von Mathematik. Übrigens wird weniger viel über die Mathematik als treibende Kraft der Rüstungsforschung geschrieben.

[18] http://www.istron.mathematik.uni-wuerzburg.de/istron/index.html@p=1033.html. Zugegriffen: 15. Juli 2020.

[19] https://www.wiwo.de/politik/deutschland/dobrindts-projekt-wie-hoch-sind-die-einnahmen/10109096-2.html. Zugegriffen: 14. Juli 2020.

[20] https://www.ensembleresonanz.com/task/mozarts-musikalisches-wuerfelspiel/. Zugegriffen: 14. Juli 2020.

[21] http://www.editions75.com/FreeScores/TomJohnson(piano).pdf. Zugegriffen: 14. Juli 2020.

[22] Z. B. auf http://www.medium.com. Zugegriffen: 14. Juli 2020.

[23] Siehe https://www.hermetik-international.com/mediathek/historische-schriften-der-mystik/gottfried-wilhelm-leibniz-die-monadologie/. Zugegriffen: 14. Juli 2020.

[24] Eine unsterbliche Seele befindet sich in einem sterblichen und vergänglichen Körper. Das hier nur angedeutete Modell erklärt vieles recht anschaulich, aber nicht die Verbindung von Seele und Körper: vgl. https://www.argumentarium.ch/philosophie/leib-seele/77-dualismus. Zugegriffen: 17. Juli 2020.

[25] https://de.wiki-pedia.org/wiki/David_Hume. Zugegriffen: 12. Dez. 2019. Vgl. Hume (1896, Book One, Part IV, Section II).

[26] Z. B. für Stimmbänder: https://www.sammlungen.hu-berlin.de/objekte/lautarchiv/9313/. Zugegriffen: 30. Dez. 2019.

[27] Vgl. Maaß und Grafenhofer, 2019, S. 4 ff.

[28] Vgl. Maaß und Grafenhofer, 2019, S. 6.

[29] http://www.alm-online.net/. Zugegriffen: 30. Dez. 2019.

[30] https://www.findlaw.com/education/curriculum-standards-school-funding/creation-evolution-and-intelligent-design-in-public-schools.html. Zugegriffen: 13. Nov. 2020.

[31] https://www.olympiade-mathematik.de/pdf/klassen_al/klasse_07_al.pdf (Aufgabe 020736). Zugegriffen: 10. Jan. 2020.