R&E-SOURCE https://journal.ph-noe.ac.at
Online Journal for Research and Education
Ausgabe 14, Oktober 2020, ISSN: 2313-1640

Kognitive Neurowissenschaft meets Mathematikdidaktik

Interdisziplinäre Forschungsdesigns mit Perspektiven für die Didaktik der Mathematik

Petra Gössinger[1]

Zusammenfassung

In diesem Artikel werden relevante Studien vorgestellt, die sich mit Schlüsselfragen der kognitiven Neurowissenschaften im Rahmen des Mathematiklernens befassen und deren Forschungsdesign sich an multidisziplinären, innovativen Ansätzen orientiert. Einen Schwerpunkt in der Darstellung bilden Untersuchungen aus dem Bereich der Arithmetik und Raumvorstellung. Aufgrund der hohen Bedeutung für eine zeitgemäße Unterrichtsgestaltung wird der Rolle des Arbeitsgedächtnisses ein eigenes Kapitel gewidmet. Alle beschriebenen Erkenntnisse werden hinsichtlich ihrer Praxisrelevanz erörtert. Den Abschluss bilden eine Diskussion über entstandene Impulse durch die Betrachtungen der interdisziplinären Schnittstelle von kognitiven Neurowissenschaften und Mathematikdidaktik sowie Schlussfolgerungen für künftige kooperative Projekte.

Abstract

In this article, appreciable studies are presented dealing with key questions of cognitive neuroscience in the context of mathematics education and based on multidisciplinary and innovative approaches. The focus of the presentation lies on arithmetic and spatial concepts. Due to the high importance for modern teaching design a separate chapter is devoted to the role of working memory. All of the findings described are discussed in terms of their practical relevance. It concludes with a discussion of the impulses created by considering the interdisciplinary interface between cognitive neuroscience and mathematics didactics and conclusions for future cooperative projects.

Schlüsselwörter:
Bildungsforschung
Interdisziplinarität
Didaktik der Mathematik
Kognitive Neurowissenschaften

Keywords:
Educational research
Interdisciplinarity
Mathematics education
Cognitive neuroscience

1 Einleitende Überlegungen

Der Terminus „Neurowissenschaften“ ist jung. 1969 wurde die amerikanische Society of Neuroscience, ein Zusammenschluss amerikanischer Neurowissenschaftlerinnen und -wissenschaftler, gegründet. In den 1980er Jahren stieg das Interesse an der Erforschung des Aufbaus und der Funktionsweise der zentralen Einheiten des Nervensystems. 1990 rief der damalige amerikanische Präsident George W. Bush „The Decade of the Brain“ aus. Die Vertreterinnen und Vertreter der unterschiedlichen Forschungsrichtungen, die sich mit Untersuchungen zu Aufbau und Leistung des Gehirns befassten, schlossen sich zusammen. Sie erkannten, dass die Funktionsweise des Gehirns in den unterschiedlichen Bereichen nur durch eine interdisziplinäre Herangehensweise verstanden werden kann. Die Kombination von herkömmlichen und innovativen Verfahren in unterschiedlichsten Wissensbereichen sollte zu einer Synthese von Bekanntem und Neuem und zu zukunftsorientierten Sichtweisen auf Lernprozesse führen (Danzinger, 2008).

[1] Pädagogische Hochschule Niederösterreich, Mühlgasse 67, 2500 Baden.
petra.goessinger@ph-noe.ac.at

Daher hat sich die psychologische Gedächtnisforschung in den letzten Jahrzehnten vermehrt an neurowissenschaftlichen Befunden orientiert. Besonders die Integration überfachlicher Perspektiven in bestehende Theorien und der Einsatz nicht-invasiver Methoden in der Forschung konnten die Erkenntnisse über das Gedächtnis und das Lernen vertiefen, die Disziplin der kognitiven Neurowissenschaften etablierte sich.

Jede Fachdidaktik befindet sich – inhaltlich wie methodisch – in einem Wissensgefüge, zu dem unter anderem die Fachwissenschaften, die Psychologie, die Pädagogik und die Neurowissenschaften gehören. Wenn es auch den spezifischen Status und die relative Autonomie der unterschiedlichen Fachdidaktiken zu betonen gilt, ist dennoch zu prüfen, wie und in welchem Ausmaß die Einsichten über die Funktionsweise des Gehirns die Aufbereitung fachspezifischer Lerninhalte beeinflussen können. Ebenso wie die anderen Fachdidaktiken soll sich auch die Didaktik der Mathematik nicht ohne die Impulse der kognitiven Neuropsychologie weiterentwickeln.

Die Diskussion um den praktischen Nutzen der Neurowissenschaften für den Unterricht wird nach wie vor kontroversiell geführt, die Anwendung neurowissenschaftlicher Erkenntnisse auf die Bildungsforschung und Fachdidaktiken ist weiterhin umstritten. De Smedt argumentiert:

„While some scholars have argued that such applications are not possible (and will never be possible), others have been more optimistic and suggest that these are possible, albeit under certain conditions, for example when one aims to understand very basic cognitive processes. Concrete examples of these applications are increasing in the emerging interdisciplinary field of mind, brain, and education or educational neuroscience, which posits itself at the intersection of cognitive neuroscience, psychology, and educational research.“ (De Smedt, 2018, S.1)

Die Dimension des interdisziplinäreren Austausches basiert nach De Smedt auf der jeweiligen Forschungsfrage. Sollen sehr spezifische kognitive Prozesse auf einer Mikroebene untersucht werden – beispielsweise die unterschiedlichen mentalen Repräsentationen bei der Anwendung spezifischer Strategien zum Lösen arithmetischer Problemstellungen – können diese nicht mit Hilfe von Tests, Fragebögen oder Verhaltensbeobachtungen erfasst werden. Hier bedarf es der Methoden der Neurowissenschaften, um Elemente des Mikroprozesses zu identifizieren und zu ergründen (De Smedt & Grabner, 2015). Denn vielversprechende Anwendungen der kognitiven Neurowissenschaften in der Bildungsforschung erfassen das Verstehen biologischer Prozesse, die beim Erlernen schulrelevanter Fähigkeiten eine Rolle spielen, sowie die Ursprünge und Besonderheiten atypischer Entwicklungen. Die Herausforderungen im Forschungsprozess betreffen die Relevanz und Zielfokussiertheit der biologischen Erklärung mathematischen Lernens ebenso wie das Aufdecken möglicher Neuromythen. Die Neurowissenschaften nehmen jedoch nicht die Wirkungsweise globaler Interventionen auf einer Makroebene in den Blick.

2 Ausgangslage

Die Motivation für das Verfassen dieses Artikels resultiert aus persönlichem Interesse und der Überzeugung, dass der wechselseitige Bezug der beiden Wissenschaftsdisziplinen Didaktik der Mathematik und kognitive Neurowissenschaften nachhaltige Impulse bei der Gestaltung von Lernumgebungen im mathematischen Kontext geben kann. Ziel ist es, in einer Übersicht interdisziplinäres Wissen aufzuarbeiten und offene Fragestellungen im Kontext zu erfassen.

Ausgangspunkt bot eine Publikation von Daniel Ansari und Ian Lyons in der Zeitschrift Mathematics Education mit dem Titel „Cognitive neuroscience and mathematics learning: How far have we come? Where do we need to go?“. Die beiden Autoren ziehen in dieser Veröffentlichung Bilanz über Fortschritte im Rahmen der interdisziplinären Kooperation der Forschungsrichtungen der kognitiven Neurowissenschaften und der Mathematikdidaktik zwischen 2010 und 2015 (Ansari & Lyons, 2016). Bereits 2010 zeigten Grabner und Ansari themenspezifische methodologische Probleme und Grenzen der Kooperation auf. Fünf Jahre später wurden Veränderungen im kollaborativen Zusammenwirken der beiden Forschungsfelder hinterfragt. Ansari und Lyons identifizierten Fortschritte und zeigten Herausforderungen auf. 2010 beschrieben Grabner und Ansari zwei Hauptprobleme in den von ihnen erfassten Studien (Grabner & Ansari, 2010). Zum einen waren die Studienteilnehmerinnen und -teilnehmer zumeist Erwachsene, es fehlten Untersuchungen mit Kindern in denjenigen Alterskohorten, in denen die zu untersuchenden mathematikspezifischen Kompetenzen erworben werden. Zum anderen wurden viele der damals veröffentlichten Arbeiten mit Hilfe von hochkontrollierten Verfahren der experimentellen Psychologie durchgeführt, die zumeist wenig in den Kontext des mathematischen Lernens und Denkens eingebettet waren und daher die mentalen Vorgänge der Schülerinnen und Schüler bei mathematischen Aufgabenstellungen nicht abbilden konnten.

Die Veränderungen, die Ansari und Lyons in den Arbeiten zwischen 2010 und 2015 aufzeigen, lassen eine beeindruckende Zunahme der Themendiversität der Forschungsfragen erkennen. In dem Zeitraum wurden vielfältige Zusammenhänge zwischen Mathematikunterricht und kognitiven Neurowissenschaften von multidisziplinären Forschungsgruppen aus differenten Ländern untersucht. Die Autoren merken an, dass bei vielen Arbeiten allgemeingültige neuronale Korrelate kognitiver Grundprinzipien, die den mathematischen Prozessen im Gehirn zugrunde liegen, angesprochen werden. Für sie fehlen Modelle, die diese neurobiologischen Veränderungen beim Mathematiklernen mit Verhaltensänderungen im mathematischen Tun in Verbindung bringen und damit wechselseitige Bezüge von Verhaltens- und neuronalen Erklärungsebenen für die Praxis nutzbar machen. Nach Ansicht der Autoren entnehmen wenige Publikationen ihre Themenstellungen aus Gebieten, die sich aus den Herausforderungen im aktuellen Mathematikunterricht ableiten und damit für Mathematikpädagoginnen und -pädagogen relevant und nutzbar sind. Komplexe methodisch-didaktische Elemente des Mathematikunterrichts aus der Sicht der Neurowissenschaften – beispielsweise inwiefern und in welchem Verhältnis die Präsentation spezifischer konkreter Unterrichtsinhalte mittels verbaler, visueller und räumlicher Instruktionen erfolgen soll – bleiben unberücksichtigt.

Nach Einschätzung von Daniel Ansari und Ian Lyons müsste die interdisziplinäre Kooperation der Forschungsrichtungen der kognitiven Neurowissenschaften und der Mathematikdidaktik die von De Smedt angesprochene Mikroebene stärker mit der Makroebene der Unterrichtpraxis und -entwicklung verbinden. Solche Bemühungen haben sich in den letzten Jahrzehnten unter den Labels der „Neuropädagogik“ und „Neurodidaktik“ formiert. Diese versuchen, Erkenntnisse über Funktionsmechanismen und Entwicklungsprozesse des menschlichen Gehirns für die schulische Praxis aufzubereiten, konnten sich jedoch bislang noch nicht als akademische Teildisziplinen im Wissenschaftsbetrieb etablieren und eine „Scientific Community“ aufbauen (Göppel, 2014).

Auf Grundlage der vorangegangenen Ausführungen soll in dieser Übersichtsarbeit eine Auswahl an interdisziplinären innovativen Ansätzen und Projekten der letzten Jahre angeführt werden, die versuchen, die Schnittstelle zwischen den kognitiven Neurowissenschaften und der Mathematikdidaktik zu überwinden. Besonderes Augenmerk wurde bei der Auswahl auf Studien gelegt, in denen relevante kognitive Prozesse für den Mathematikunterricht auf einer Mikroebene mit Bezug zum Unterrichtsgeschehen erforscht wurden und bei welchen die Testpersonen Schülerinnen und Schüler unterschiedlichen Alters waren.

3 Algebra und Neurowissenschaften – Vom Zählen und Rechnen

Rechnen ist eine Basiskomponente der Mathematik und eine neurokognitiv komplexe Leistung, die voraussetzt, dass wir mit Zahlen sicher und kompetent umgehen können. Ohne näher auf die unterschiedlichen Definitionen von Mathematik einzugehen, wird hier Mathematik als Wissenschaft von Mustern und Strukturen verstanden, als das Erkennen von Ordnungen, Beziehungen, Zusammenhängen, Abhängigkeiten oder Regelmäßigkeiten von Phänomenen, die über das Konkrete hinausgehen (Wittmann & Müller, 2012; Matter, 2017).

Erste Erkenntnisse von Kindern über Gesetzmäßigkeiten unseres Zahlensystems und dessen Ordnungsprinzip bedürfen basaler Verarbeitungsprozesse numerischer Informationen und verlangen Einsichten in Muster und Strukturen. Neurokognitive Forschungsergebnisse ermöglichen das Beschreiben dieser elementaren Entwicklungsvorgänge und zeigen, dass das Verstehen und Verarbeiten von Zahlen in Teilkomponenten zerfällt, die es zu durchleuchten gilt.

3.1 Mentale Repräsentationen von natürlichen Zahlen

Auch wenn Mathematik als herausragende kulturelle Leistung eng mit Sprache verbunden ist, finden sich nicht nur beim Menschen grundlegende numerische Fähigkeiten, sondern auch bei Organismen ohne Sprachvermögen, da diese in biologischen Vorläufersystemen wurzeln. Das Erfassen von numerischen Kompetenzen wie Quantität und Rang (Anzahl und serielle Position von Objekten) gelingt Menschen und Tieren auch ohne Sprache, ist souverän und beansprucht weitläufige kortikale Areale, insbesondere den Präfrontalkortex und den interparietalen Sulcus (Cabeza et al., 1997). Es bedarf jedoch der Sprache, um ein systematisches Zahlenkonzept durch die Verknüpfung von Beziehungen zwischen Zahlen auszubilden und dieses im Sinne der Definition von Mathematik weiterzuentwickeln (Nieder, 2012).

Die nichtverbalen Repräsentationen erfahren fundamentale Transformationen durch das sich ontogenetisch entwickelnde verbale Zählvermögen, die Grundlage für das Rechnen und anspruchsvolle mathematisch-logische Fähigkeiten. Die Analyse von Rechenvorgängen beschreibt das Rechnen als eine komplexe Fertigkeit, welche die Vernetzung unterschiedlicher kognitiver Verarbeitungsprozeduren erfordert, in differenten Gehirnregionen lokalisiert ist und verschiedene Gedächtnissysteme beansprucht. Die Gedächtnisleistungen umfassen neben dem

Erkennen und Verstehen der spezifischen Zahlen- oder Variablennotation und Rechenzeichen auch den Abruf der im deklarativen und prozeduralen Gedächtnis gespeicherten Rechenfakten und -prozeduren (Nieder, 2012).

Richtet man den Fokus auf Erkenntnisse zur Zahlenverarbeitung und zum verbalen Zählvermögen, lassen sich unterschiedliche Modelle extrahieren, die aufzeigen, in welcher Art und in welchen Strukturen Zahlen mental repräsentiert sind (Willmes, 2012).

Das bekannteste theoretische Konstrukt, das sich mit den anatomisch-funktionalen Vorgängen beim Zählen und Rechnen beschäftigt, ist das Triple-Code-Modell von Stanislas Dehaene und Kollegen (Dehaene & Cohen, 1995, 1997; Dehaene et al., 2003, 2011; Willmes, 2012, Willmes et al., 2013), das auf Untersuchungen von erwachsenen Probandinnen und Probanden basiert und funktionale Zahlenrepräsentationen verschiedenen neuronalen Gebieten zuordnet. Das Modell stellt die zurzeit einzige spezifische anatomisch-funktionale Theorie der Zahlenverarbeitung dar, die neben einer internen visuell-arabischen Zahlform und einer auditiv-sprachlichen Repräsentation von Zahlwörtern auch eine quantitative analoge Größenrepräsentation, also einen mentalen orientierten Zahlenstrahl, annimmt. Wann immer Zahlenverarbeitung stattfindet, interagieren diese drei neurokognitiven Komponenten, auf die noch genauer eingegangen werden soll.

Arbeiten von Shum et al. (2013) oder Grotheer et al. (2016) zeigen, dass zahlenverarbeitende Areale in divergenten Regionen beider Gehirnhälften zu finden sind. Selbst die einfachste Zahlenverarbeitung ist auf neuronaler Ebene eine komplexe Herausforderung, die mehr als eine Hirnregion beschäftigt.

Gehörte und gesprochene Zahlwörter werden in den auditiv-verbalen Code transformiert, der präphonologische Wortformen ohne numerische Bedeutung enthält und bei dem Abruf von arithmetischem Faktenwissen und dem fortlaufenden Zählen aktiviert wird. Er umfasst beispielsweise die verbale Speicherung von Zahlen (z.B. „vier“), aber auch das kleine Einmaleins sowie alle auswendig gelernten Rechenfakten. Diese Form der Verarbeitung findet sich im Gyrus angularis und in den linksseitig platzierten sprachverarbeitenden Arealen des Gehirns (Willmes, 2012). Gelesene und geschriebene arabische Zahlen werden in dem visuell-arabischen Code gespeichert. Um Zahlensymbole oder Zahlwörter (z.B. „4“) erkennen zu können, müssen diese visuell repräsentiert sein. Forschungsgruppen versuchten, die visuelle Verarbeitung von Zahlen, die dem „visual number form area“ (VNA) zugeordnet wird, genauer zu spezifizieren. Der visuell-arabische Zahlencode ist nach Dehaene (Dehaene, 2011) für arabische Ziffern bilateral im okzipitotemporalen Übergangsbereich – den Schläfenlappen der Gehirnrinde – verortet und für geschriebene Zahlwörter in der sylvischen Furche der linken Großhirnrinde lokalisiert. Von zentraler Bedeutung ist darüber hinaus der sprachunabhängige analoge Größencode, der in abstrakter Form Mengen- und Größenvergleiche über mentale räumliche Darstellungen repräsentiert. Er wird für das Abschätzen von Rechenergebnissen, für Zahlenvergleiche, das Ordnen der Zahlen nach ihrer Größe, das Schätzen, das Einordnen von Plausibilitäten und das Erfassen kleiner Mengen (Subitizing) aktiviert und ist bilateral im Sulcus parietalis lokalisiert, einer Region, in der räumliche Informationen und Zusammenhänge verarbeitet werden (Dehaene et al., 2003).

In einer Metastudie konnte eine Forschungsgruppe um Kaufmann zeigen, dass sich die neuronale Aktivität beim Rechnen im Laufe der Entwicklung von den domänenübergreifenden frontalen zu den parietalen Arealen im Scheitellappen verschiebt (Kaufmann et al., 2011). Bei Kindern scheinen Frontalhirnfunktionen deutlich stärker aktiviert zu sein. Ein Erklärungsmuster ist die fehlende Automatisierung und Spezialisierung. Schülerinnen und Schüler sind im Umgang mit Zahlen und beim Rechnen zunächst noch ungeübt. Mit zunehmender Mechanisierung des basisnumerischen Wissens verschiebt sich auch die Auslastung der Gehirnstrukturen.

Das Verständnis für Zahlen und Zahlenbeziehungen ist Grundlage für die Entwicklung der Rechenkompetenz im Grundschulalter. Aber nicht nur die erwähnten, sondern auch eine Reihe anderer wissenschaftlich fundierter Entwicklungsmodelle machen deutlich, dass sich bereits vor Schulantritt wichtige mathematische Vorläuferkompetenzen herausbilden. Besondere didaktische Relevanz hat die Erstellung von Modellen im Bereich der Zahl-Größen-Verknüpfung als Basis für weiterführende mathematische Lernprozesse (u.a. Krajewsky, 2008, 2013; Sale et al., 2018). Das im Folgenden dargestellte Projekt wirft einen genauen Blick auf die Repräsentation von Zahlen unterschiedlicher Größe.

3.2 Mentale Zahlenrepräsentationen aus fachdidaktischer Perspektive

Um empirische Evidenz für die Wirkung der theoretischen Ansätze zu erlangen und Grundlagen für die Entwicklung von Förderprogrammen zu schaffen, untersuchte eine deutsche Forschungsgruppe von 2009 bis 2012 im Rahmen des Projektes MenZa die spezifischen Effekte zweier unterschiedlicher instruktionaler Ansätze zur Unterstützung des Aufbaus mentaler Zahlenrepräsentationen bei Schulanfängerinnen und -anfängern (Obersteiner et al., 2013). Das Forschungsdesign wurde auf Basis zweier Ansätze entwickelt, die unterschiedliche didaktische Ausrichtungen des Mathematikanfangsunterrichts favorisieren und sich auf die Annahme stützen, dass externe Repräsentationen von Zahlen Einfluss auf den Aufbau mentaler Modelle haben (u.a. Lorenz, 1992; Schnotz, 2014).

Von dem mathematisch-didaktisch begründeten Ansatz wird für den Anfangsunterricht die Verwendung strukturierter Zahlendarstellungen zur Verdeutlichung der Zehnerstruktur und der präzisen Kodierung von Anzahlen empfohlen. Didaktisches Hilfsmittel ist etwa das Zwanzigerfeld, auf dem Zahlen in einer Fünfer- und Zehnerstruktur dargestellt sind. Schülerinnen und Schüler sollen lernen, Zahlendarstellungen aufgrund der Struktur möglichst schnell zu erfassen. Aus der kognitionspsychologischen und neuropsychologischen Forschung lässt sich dagegen ein Ansatz ableiten, der lineare Darstellungen – wie etwa anhand des Zahlenstrahls oder des leeren Rechenstriches – befürwortet und damit die approximative Repräsentation numerischer Größen stärker betont. Relationen zwischen Zahlen lassen sich als räumliche Abstände besonders gut veranschaulichen und unterstützen Kinder, eine tragfähige Vorstellung von Größenbeziehungen aufzubauen. Mit den approximativen Zahlensystemen und den Zahlenrepräsentationen, die eine exakte Kodierung von Anzahlen erlauben, finden sich in der Literatur zwei differente Repräsentationsformate für Zahlen, die auf unterschiedlichen Beobachtungen beruhen (Dornheim, 2008). Prozesse, die den beiden Modellen zuzuordnen sind, existieren sowohl im frühen Kindesalter als auch in Kulturen mit eingeschränkten sprachlichen Möglichkeiten zur Beschreibung von Anzahlen. Es bleibt zu erforschen, inwiefern es sich dabei um zwei unabhängige kognitive Systeme handelt.

Das Konzept der präzisen Anzahl-Repräsentation beruht auf der Basis des ‚object-file'-Paradigmas und besagt, dass wenige, deutlich erkennbare Einzelobjekte, beispielsweise Punktmengen, exakt erfasst, repräsentiert und verarbeitet werden können. Erste präzise numerische Vergleiche finden sich schon bei sehr jungen Kindern, die bereits zwischen einem und drei Objekten unterscheiden. Demgegenüber steht die Theorie der unpräzisen Mengen-Repräsentation, das perzeptuelle Erkennen von Unterschieden in der räumlichen Ausdehnung von Mengen. Dieses System ist Grundlage des Schätzens und erlaubt die näherungsweise Beurteilung von diskreten oder kontinuierlichen Mengen als unterschiedlich oder gleich groß. Studien belegen neuronale Grundlagen dieses ontogenetisch bereits sehr früh vorhandenen approximativen Zahlenverständnisses (u.a. Krajewski, 2008, Dornheim, 2008).

Aktuelle Unterrichtsmaterialien integrieren beide Modelle, wobei sich mit der Erweiterung des Zahlenraumes der Schwerpunkt von strukturierten Mengendarstellungen hin zu linear-räumlichen Repräsentationen verschiebt. Im schulischen Bereich sind positive Auswirkungen beider Herangehensweisen auf Basiskompetenzen wie beispielsweise die Automatisierung des elementaren Rechnens (1+1) sowie auf komplexe Fähigkeiten einer flexiblen Strategiewahl bei wachsenden Anforderungen zu vermuten.

Auf diesem theoretischen Hintergrund verglichen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler im Projekt MenZa, ob die Förderung des schnellen Erkennens von Zahlen mit Hilfe des Zwanzigerfeldes in Verbindung mit exaktem Rechnen oder aber der Umgang mit linearen Zahlendarstellungen in Verbindung mit Überschlagen zu größeren Lernerfolgen führt. Die Forschungsfrage wurde in zwei Teilstudien an über 200 Schülerinnen und Schülern überprüft (Obersteiner et al., 2013). In Teilstudie 1 im Halbjahr des ersten Schuljahres verglichen die Forscherinnen und Forscher die beiden Ansätze in einem experimentellen Design mit 204 Kindern in zwei Fördergruppen. Dabei wurde ermittelt, ob numerische Fähigkeiten im ersten Schuljahr durch kurzfristige Interventionen mittels exakten beziehungsweise approximativen Ansatzes messbar gefördert werden können und inwiefern sich diese Förderung auf allgemeine arithmetische Fähigkeiten auswirkt. In Teilstudie 2 wurden Förderansätze im Rahmen einer erweiterten Lernumgebung für 265 rechenschwache Kinder im zweiten Schuljahr implementiert. Ziel war es, festzustellen, inwiefern bei schwachen Schülerinnen und Schülern durch kurzfristige Interventionen die Fördereffekte auf basale numerische Fähigkeiten übertragen werden und inwieweit die Unterstützung spezifisch bleibt oder auch übergreifend wirkt. Angewandt wurde die Methode der Nah-Infrarot-Spektroskopie (NIRS). Sie ist anwendungsfreundlicher als die funktionelle Magnetresonanztomographie (fMRT), da im Sitzen gearbeitet werden kann und kleinere Bewegungen die Auswertung nicht beeinträchtigen, wenn auch die aktiven Gehirnregionen weniger exakt abgebildet werden. Die Ergebnisse von Teilstudie 1 zeigten einen signifikanten Leistungszuwachs zugunsten der Kinder der beiden Fördergruppen. Dabei wurde ersichtlich, dass der approximative Ansatz auf approximative Fähigkeiten, der exakte Ansatz auf das Quasisimultanerfassen wirkt. Die theoretischen Annahmen von unterschiedlichen kognitiven Systemen scheinen durch die Resultate bestätigt. Transfereffekte auf den jeweils anderen Fähigkeitsbereich und auf allgemeine arithmetische Fähigkeiten konnten nur begrenzt nachgewiesen werden. Auch das Zusammenwirken der beiden Repräsentationen bedarf noch genauerer Forschungsbemühungen. Teilstudie 2 macht deutlich, dass beide Förderbedingungen gleichermaßen geeignet sind, Leistungssteigerungen bei rechenschwachen Kindern zu erwirken, die Interventionen zeigten jedoch aufgrund der Kurzfristigkeit geringe Effekte. Eine langfristige Förderung mit spezifischem Training der Teilfähigkeiten sowie ihrer expliziten Verknüpfung scheint nach Angaben der Autorinnen und Autoren notwendig (Obersteiner et al., 2013).

Aus fachdidaktischer Sicht wird die spezifische Wirkung der Verwendung von externen Repräsentationen wie Zwanzigerfeld oder Zahlenstrahl auf die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler deutlich. Diese Erkenntnis ist nicht neu, betont aber die im Anfangsunterricht oft unterschätzte Relevanz des Schätzens und Überschlagrechnens.

3.3 Mentale Repräsentationen von irrationalen Zahlen

Das Projekt MenZa beschränkte sich auf die Erforschung mentaler Modelle natürlicher Zahlen. Forschungen zu mentalen Repräsentationen unter dem Aspekt von neuronalen anatomisch-funktionalen Korrelaten in Bezug auf rationale, reelle oder komplexe Zahlen finden sich nicht. Daher wird nachstehend auf eine Publikation verwiesen, die Forschungsperspektiven für diesen Bereich aufzeigt.

Das Forschungsteam um Ludwig Bauer (Bauer et al., 2005) bat 55 Schülerinnen einer 9. Jahrgangsklasse eines Mädchengymnasiums in Bayern, in Aufsätzen ihre subjektive Sicht zum Thema „Irrationale Zahlen“ nach der Phase der Themeneinführung zu reflektieren. Die Schülerinnen gewannen in der ersten Unterrichtssequenz Einsicht in die Darstellbarkeit irrationaler Zahlen durch unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche. Verbindungen zur Geometrie wurden durch die Darstellung der Länge der Diagonale im Einheitsquadrat hergestellt. Mittels freier Textproduktion erfassten die Forscherinnen und Forscher die mentalen Repräsentationen der Jugendlichen nach der Einführungsphase und versuchten, diese zu charakterisieren. Der Auftrag an die Schülerinnen lautete, in 20 Minuten ihr Wissen über irrationale Zahlen darzulegen und zu beschreiben, welche affektiven Prozesse und Emotionen die Bearbeitung der Stoffinhalte begleiteten. Die Arbeiten wurden anhand von Kategorien themenspezifisch analysiert. In der Kategorie „Ontologie des Objekts“ – Ontologien werden hier als formal definierte Konzepte und Relationen verstanden (Anm. der Verf.) – erhob man, in welcher Form die Schülerinnen die mentalen Repräsentationen auf einer Metaebene abbilden. Konnte ein schlüssiges Zahlbegriffsverständnis („concept image“) aufgebaut werden, oder wurde das Objekt auf einen mnemotechnisch abgespeicherten Defintionstext reduziert?

Für das Konzept der Zahlenbereichserweiterung ist eine Verschränkung von unterschiedlichen Zugängen, in denen irrationale Zahlen inhaltlich verankert sind, erforderlich: die Orientierung am formalen Wurzelgedanken, die Betonung des Rechnens mit unendlichen Dezimalbrüchen, das Wissen über die Eigenschaften transzendenter Zahlen und die geometrische Darstellung von Strecken und deren Längen.

Die Untersuchungsergebnisse zeigen, dass subjektive Sichtweisen in Beug auf die Menge der irrationalen Zahlen bei einem Großteil der Schülerinnen über die Differenzmenge geformt werden. Der Einbezug der Geometrie, um die Existenz der Wurzel zu belegen, verstärkt die Probleme bei der Vorstellung, denn die Elemente existieren mental „als ‚Größen‘, doch fehlen anscheinend Zahlen, die den ‚Wert‘ der Größen darstellen“ (Bauer, 2005, S. 24). Zudem konnten wenige Schülerinnen das Bild, dass die Zahlengerade Lücken aufweist, in ihr „concept image“ integrieren. Schülerempfindungen zu irrationalen Zahlen werden durch den Terminus „unvernünftige Zahlen“ beschrieben.

Offen bleiben Fragen von fachdidaktischem Interesse und Nutzen für ein besseres Verständnis der kognitiven Prozesse im Bereich der Zahlenbereichserweiterung im unterrichtlichen Geschehen der Sekundarstufe. Inwieweit können bereits vorhandene approximative oder präzise Repräsentationen numerischer Größen aktiviert werden, um die geometrische Vorstellung im Rahmen der Ausweitung der Zahlenmenge zu unterstützen? Welche Bedeutung müssen den Erkenntnissen der Kognitions- und Neuropsychologie im Vermittlungsprozess attribuiert werden, die approximative Zahlenrepräsentationen befürworten? Oder wäre es zielführender, für den Verstehensprozess auf ein präzises Zahlenverständnis zurückzugreifen? Kann im Vermittlungsprozess in höheren Schulstufen auf dem Konzept der mentalen Zahlengeraden aufgebaut werden? Wünschenswert wäre eine Beantwortung durch die Zusammenarbeit mit Forschungsteams aus den Neurowissenschaften.

3.4 Neuronale Korrelate mathematischen Denkens

Ein weiteres für die Thematik interessantes Forschungsprojekt wurde von 2007 bis 2008 in Deutschland durchgeführt. Die Besonderheit des Projekts BrainMath bestand in der interdisziplinären Zusammenarbeit der Fachbereiche Mathematikdidaktik, Neurophysiologie und Psychologie unter der Leitung von Kristina Reiss, Andres Fallgatter und Reinhard Pekrun (Reiss et al., 2008). Ziel war es, die Zusammenhänge zwischen neuronalen Korrelaten mathematischen Denkens bei verschiedenen Aufgabenstellungen und in unterschiedlichen Gefühlszuständen zu erfassen. Die Stichprobe umfasste 73 Schülerinnen und Schüler der vierten und achten Klasse. Diese sollten unter anderem mathematische Aufgaben bearbeiten, welche sowohl in numerischer Form als auch in kurzen Textaufgaben dargeboten wurden. Darüber hinaus untersuchte die Forschungsgruppe anhand von Verhaltensdaten den Einfluss von emotionalen Zuständen auf die Mathematikleistung. Die Gehirnaktivität wurde mit Hilfe der Nah-Infrarot Spektroskopie (NIRS) gemessen. Ergebnisse in Bezug auf numerische Aufgaben und Textaufgaben sollten detaillierter dargestellt werden. Zunächst wurde in der Studie hinterfragt, inwiefern die Reaktionszeit und die Lösungsquote der Schülerinnen und Schüler in den beiden genannten Altersstufen variieren. Die Ergebnisse der beiden Versuchsgruppen unterschieden sich signifikant in der durchschnittlichen Bearbeitungszeit pro Rechenaufgabe. Die jüngeren Schülerinnen und Schüler lösten sowohl die numerischen als auch die Textaufgaben langsamer. Beide Gruppen benötigten für Textaufgaben, aber auch für Aufgabentypen mit Zehnerüberschreitung länger, wobei der Unterschied in der Bearbeitungszeit der unterschiedlichen Präsentationsformate bei den Achtklässlern im Vergleich zu den Viertklässlern deutlich kleiner war. Der Einfluss des Aufgabentyps (mit und ohne Zehnerübertrag) auf die Trefferquote war in beiden Jahrgangsstufen bedeutsam, Aufgaben ohne Zehnerüberschreitung wurden signifikant häufiger korrekt gelöst, das Präsentationsformat war unerheblich. In Bezug auf die Gehirnaktivierungen bei den zu rechnenden Aufgaben hatten die Faktoren Präsentationsformat und Jahrgangsstufe keinen Einfluss. Die bereits in Vorstudien konsistent gefundenen parietalen Aktivierungen wurden auch in dieser Studie sichtbar.

Bisherige Untersuchungen lassen erkennen, dass der Gefühlszustand einen entscheidenden Einfluss auf kognitive Prozesse und Problemlöseverhalten hat. Die Forscherinnen und Forscher dieser Studie fragten daher nach den Unterschieden in der Gehirnaktivierung in Abhängigkeit von drei differenten emotionalen Befindlichkeiten und fanden, dass der Effekt der Stimmung von der Art der Aufgabe abhing. Bei den numerischen Aufgaben waren die Lösungszeiten für alle drei emotionalen Bedingungen vergleichbar. Deutlich kürzer war die Lösungsdauer der Textaufgaben bei positiven und negativen Stimmungsbedingungen. Die Anzahl der richtig gelösten Textaufgaben fiel trotz rascherer Lösung vergleichbar aus.

Die grundlegenden neuronalen Aktivierungsmuster weisen in den beiden getesteten Gruppen keine signifikanten Unterschiede auf. Zu ergründen bleibt, warum sich trotz einer pro Zeiteinheit gleichen Stimulation die Reaktionszeiten zwischen Grund- und Realschülerinnen und -schülern so deutlich unterscheiden. Die Autorinnen und Autoren vermuten eine effektivere Bearbeitung der Aufgaben, aber auch eine bessere Nutzung von Aktivierungs- und Deaktivierungsphasen. Überraschend war die Verbesserung der Lösungszeit sowohl durch positive als auch durch negative Stimmung. Sie könnte nach Meinung der Autorinnen und Autoren ihren Grund in einem Arousaleffekt haben. Inwiefern sich dieser allgemeine Grad der Aktivierung auch auf spezifische Emotionen wie Trauer, Angst, aber auch Freude beim Lösen von Mathematikaufgaben übertragen lässt, bleibt offen (Reiss et al., 2011).

Aus mathematikdidaktischer Sicht zeigen die Ergebnisse, dass die deutlich länger andauernden Bearbeitungszeiten bei Textaufgaben und Aufgaben mit Zehnerüberschreitung in die Überlegungen von Lehrerinnen und Lehrern beim Erstellen von Haus- und Prüfungsaufgaben einfließen sollten.

Neben spezifischen Fragen zur Beteiligung unterschiedlicher kognitiver Systeme und ihrer Aktivierung beim Mathematiklernen sind auch das Arbeitsgedächtnis und die Exekutive Kontrolle für das Erbringen von mathematischen Leistungen von entscheidender Bedeutung.

4 Zur Relevanz des Arbeitsgedächtnisses und des Konstrukts der Exekutiven Funktionen für die Mathematikdidaktik

Das Konzept des Kurzzeitgedächtnisses wurde seit den 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts um das Modell des Arbeitsspeichers erweitert, das die aktive und bewusste Verarbeitung von eingehenden Informationen aus den sensorischen Registern beschreibt und diese mit den im Langzeitgedächtnis gespeicherten Informationen verknüpft. Diese Prozesse spielen beim Lösen mathematischer Aufgabenstellungen eine bedeutende Rolle.

Das zurzeit bedeutendste Modell des Arbeitsgedächtnisses (working memory) stammt von Alan Baddeley (Baddeley, 1992, 2012). Es umfasst zwei voneinander unabhängige Kurzzeitspeicher, die flexibel eingesetzt werden können: den visuell-räumlichen Notizblock zur Speicherung und Manipulation visueller räumlicher Informationen und die phonologische Schleife. Hier werden sprachliche Informationen mittels subvokalem Rehearsalprozess gehalten und manipuliert. Eine Ergänzung erfuhr das Modell von Baddeley um die Jahrtausendwende durch den episodischen Puffer, der die Informationen aus den beiden Systemen integriert. Eine vierte Komponente ist die Zentrale Exekutive. Sie ist Teil des Regulations- und Kontrollsystems in unserem Gehirn, arbeitet situationsangepasst und ermöglicht zielorientiertes Handeln. Diese Fähigkeiten basieren auf Kompetenzen, die unter dem Fachbegriff der Exekutiven Funktionen des Frontalkortex subsummiert werden. Die Entwicklung der Exekutiven Funktionen beginnt im Säuglingsalter, die Reifungsvorgänge setzen sich bis in die späte Adoleszenz fort.

Eine Ausdifferenzierung der beiden Speichersubsysteme illustriert Hasselhorn (Hasselhorn, 2017). Er ordnet dem visuell-räumlichen Notizblock zwei separate Funktionsbereiche zu. Farb- und Forminformationen werden in einem statischen visuellen Speicher gehalten bzw. modelliert. Daneben sorgt eine Art „Inneren Sehens" bzw. „Inneren Schreibens" dafür, dass von der Zentralen Exekutive als wichtig und relevant befundene Informationen vernetzt werden und über längere Zeiträume präsent bleiben. Die Leistungsfähigkeit des passiven visuellen Speichers zeigt im Gegensatz zum räumlich-dynamischen Bereich eine deutliche alterskorrelierte Steigerung. Die phonologische Schleife ist nach Hasselhorn (2017) einerseits durch den phonetischen Speicher geprägt, der akustische und sprachliche Informationen aufnimmt, die dort ohne weitere Verarbeitungsprozesse zwei Minuten verweilen können. Diese Art Echo-Gedächtnis bildet das temporäre Abbild von Klängen. Ohne weitere Verarbeitungsprozesse werden diese Informationen sofort wieder mit neuen Einträgen überschrieben. Dieses Überschreiben kann andererseits durch eine zweite Komponente, dem Rehearsal – einer Art inneren Nachsprechprozess – verhindert werden.

Für die erfolgreiche Bearbeitung von mathematischen Aufgaben spielen auch die Exekutiven Funktionen des Frontalkortex eine Rolle (Cragg & Gilmore, 2014).

Baddeley unterscheidet in der übergeordneten Steuer- und Kontrolleinheit, der Zentralen Exekutive, vier Teilfunktionen: die Koordinationskapazität für ein simultanes Ausführen von Aufgaben, die Steuerung und den Wechsel von Verarbeitungsstrategien, die Fokussierung von Aufmerksamkeit sowie Manipulationen und die selektive Aktivierung von Wissensinhalten aus dem Langzeitgedächtnis (Baddeley, 2006).

Im Modell von Miyake und Kollegen bauen Exekutive Funktionen auf drei unabhängigen Basismechanismen auf: Shifting, Inhibition und Updating (Miyake, 2000). Shifting bezeichnet den Wechsel zwischen verschiedenen Aufgaben, Operationen und Erwartungszuständen. Inhibition bezieht sich auf die Hemmung dominanter konkurrierender Reize. Updating umfasst das Überwachen und Kodieren von Informationen hinsichtlich ihrer Relevanz sowie den Austausch bedeutungsloser gespeicherter Inhalte im Arbeitsgedächtnis durch relevante.

Neben diesen beiden Ansätzen gibt es in der wissenschaftlichen Diskussion ähnliche Versuche, Exekutive Funktionen zu Dimensionen zusammenzufassen (für weiterführende Informationen siehe Gössinger, 2015).

Die individuelle Leistungsfähigkeit des Arbeitsgedächtnisses und insbesondere die Exekutiven Funktionen sind nach Vanderberg & Swanson zentrale Determinanten beim Erwerb elementarer Kulturtechniken (Vanderberg & Swanson, 2007). Sie gelten als entscheidende Prädiktoren für Schul- und Berufserfolg (Clair-Thompson & Gathercole, 2006). Korrelationsstudien liefern überzeugende Hinweise für eine Beziehung zwischen Arbeitsgedächtnis und Mathematikleistung, die möglicherweise stärker ist als jene in anderen akademischen Schulfächern. Nach Geary und seinem Team verringert sich die Bedeutung des Arbeitsspeichers für das Lesen im Laufe der Schullaufbahn, jene für Mathematik erhöht sich (Geary et al., 2011).

Die Rolle der Komponenten des Arbeitsgedächtnisses für das mathematische Können und die Lesekompetenz untersuchte eine Forschungsgruppe um Giofrè bei 141 italienischen Kindern der 6. und 8. Schulstufe (Giofrè et al., 2018). Die erste Fragestellung der Forschungsarbeit bezog sich auf den Zusammenhang zwischen dem verbalen und dem visuell-räumlichen Arbeitsgedächtnis. Das Forschungsteam konnte die Ergebnisse früherer Studien replizieren und stellte Überschneidungen der beiden Komponenten des Arbeitsgedächtnisses im Ausmaß von 45% der Varianz fest. Die Unterschiede zwischen den Dimensionen lassen sich statistisch fassen, 55% der Varianz hat domänenspezifischen Ursprung. Die Frage nach der Bedeutung des Arbeitsgedächtnisses für akademische Leistungen dokumentiert, dass 40% der Varianz der Mathematikleistungen und 31% der Varianz der Leseleistungen durch die beiden Arbeitsgedächtnissysteme aufgeklärt werden können. Getrennte Analysen belegen, dass dem visuell-räumlichen Arbeitsgedächtnis 10% und der phonologischen Schleife 4% der Varianz bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben entsprechen, bei Leseaufgaben sind es in Bezug auf den verbalen Faktor 15%.

Bedeuten diese Ergebnisse, dass es im Unterricht der Primarstufe neben der gezielten Förderung der Rechenfertigkeiten auch eine konsequente Stärkung der Subsysteme des Arbeitsgedächtnisses bedarf, um Rechenaufgaben lösen zu können?

Weitere Studien bestätigen die zentrale Rolle des Arbeitsgedächtnisses beim Erwerb mathematischer Kompetenzen, beim Rechnen im Allgemeinen und beim Addieren im Besonderen (z.B. Trbovich & LeFevre, 2003; Raghubar et al., 2010). Bei diesen Forschungsprojekten basieren die Versuchsanordnungen zumeist auf einem Dual-Task-Paradigma, bei dem zwei Aufgaben gleichzeitig erledigt werden sollen. Zum einen wird eine Rechenaufgabe dargeboten, zum anderen eine Aufgabe präsentiert, die eine bestimmte Komponente des Arbeitsgedächtnisses beansprucht. Forscherinnen und Forscher gehen davon aus, dass bei Überlappung identer kognitiver Ressourcen durch zunehmenden Schwierigkeitsgrad der zweiten Aufgabe ein Qualitätsverlust bei der Performanz der ersten Aufgabe entsteht. Durch diese und ähnliche Experimente konnte bestätigt werden, dass die einzelnen Komponenten des Arbeitsgedächtnisses beim Lösen von Rechenoperationen involviert sind.

Da die meisten Ergebnisse von Experimenten mit erwachsenen Probandinnen und Probanden stammen, soll hier explizit auf eine Arbeit der Forschungsgruppe um Sara Caviola verwiesen werden, die die Beteiligung der phonologischen Schleife sowie des visuell-räumlichen Notizblocks beim Lösen von Kopfrechenaufgaben in unterschiedlichen Settings bei Kindern untersuchte (Caviola et al., 2012). 91 Kinder der 3. und 4. Schulstufe wurden in einer dreiteiligen Versuchsanordnung gebeten, Additionen im Kopf zu lösen. Variationen gab es in Bezug auf die Darstellung der Aufgaben (horizontale versus vertikale Präsentation), das Aufgabenformat (Schätzung versus exakte Berechnung des Ergebnisses) und die Aufgabenkomplexität (Additionen mit und ohne Zehnerüberschreitung). Aufgaben zur Aktivierung der phonologischen Schleife enthielten den Abruf von Buchstaben, jener zur Aktivierung des visuell-räumlichen Notizblocks das Erinnern an räumliche Positionen. Die ersten beiden Teilexperimente unterschieden sich hinsichtlich der Aufgabenkomplexität. Es zeigte sich, dass Kinder bei Schätzaufgaben das Arbeitsgedächtnis mehr beanspruchen als bei exakten Berechnungen – im Unterschied zu Erwachsenen, die Überschlagsaufgaben mit geringer Beteiligung des Arbeitsgedächtnisses lösen. Als Ursache für das Ergebnis wurde deren Training im Schätzen von Größen im Alltag vermutet. Bei Aufgaben mit Übertrag spielte für die Beteiligung der Komponenten des Arbeitsgedächtnisses die Darstellungsform eine Rolle. Wurden die Aufgaben horizontal präsentiert, erkannte man eine Beeinträchtigung der Leistungen durch die Aktivierung der phonologischen Schleife, bei vertikaler Präsentation eine durch den räumlich-visuellen Notizblock. Geringe Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis stellten Aufgaben, die exakt berechnet werden sollten und vertikal präsentiert wurden. Im dritten Teil des Experiments wurden Schätzaufgaben mit und ohne Übertrag in Bezug auf die Ansprüche an das Arbeitsgedächtnis untersucht. Kinder schnitten generell bei Problemstellungen mit Übertrag schlechter ab, besonders dann, wenn sie entweder horizontal präsentiert wurden und zusätzlich das verbale Arbeitsgedächtnis gefordert war oder wenn sie vertikal präsentiert wurden und das visuelle Arbeitsgedächtnis beansprucht war. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Kopfrechenaufgaben mit Übertrag die Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis erhöhen, signifikant sind die Effekte bei den Schätzaufgaben. Unberücksichtigt bleiben in dieser Studie die Strategien, die bei der Lösung der Aufgaben zur Anwendung kamen (Caviola et al., 2012).

Als didaktische Konsequenz aus dieser Untersuchung erscheint ein verdichteter Einbau von Schätzaufgaben in den Mathematikunterricht zur Entlastung des Arbeitsgedächtnisses sinnvoll.

Die unterschiedlichen Anforderungen an den Arbeitsspeicher in Abhängigkeit von der Herangehensweise an die Aufgabenstellung belegen Forschungsergebnisse von Imbo und Vandierendonck (Imbo & Vandierendonck, 2007) bei 10- bis 12-jährigen Schülerinnen und Schülern. Die Forschungsgruppe untersuchte den Strategieeinsatz beim Lösen von Einmaleinsaufgaben. Kinder erschließen sich die Einmaleins-Reihen beispielsweise über das rhythmische Zählen in gleich großen Teilabschnitten, über das Zerlegen der Faktoren oder über den Rückgriff auf Faktenwissen, sie verwenden Zähl-, Zerlegungs- oder Abrufstrategien. Die Zentrale Exekutive des Arbeitsgedächtnisses wird bei jeder Rechenstrategie benötigt, bei der Anwendung von Zähl-Strategien wird darüber hinaus die phonologische Schleife eingesetzt. Weniger vorteilhafte Herangehensweisen scheinen mehr Arbeitsgedächtniskapazitäten zu beanspruchen als effiziente Strategien. Verbesserungen im Strategieeinsatz führen somit zu einer Reduktion der Arbeitsgedächtnisbelastung und zu einer möglichen Verschiebung dieser Ressourcen auf andere Aufgabenaspekte. Arithmetische Fertigkeiten korrelieren signifikant mit der Wahl des Strategieeinsatzes, wobei nach Steel und Funnell (Steel & Funnell, 2001) der Faktenabruf für Leistungseffizienz besonders geeignet ist. Leistungsstarke Lernende nutzen eine Kombination aller Methoden. Imbo und Vandierendonck weisen ausdrücklich auf die begrenzte Zahl von Studien zur Rolle des Arbeitsgedächtnisses in der Didaktik der Mathematik hin, zudem halten sie eine Übertragung ihrer Ergebnisse in Bezug auf Addition und Subtraktion auf die Rechenoperationen der Multiplikation und Division für unzulässig. Didaktisch relevante Überlegungen zur Notwendigkeit von Automatisierungsprozessen und vertiefende Analysen dazu scheinen zukünftig unerlässlich.

In virtuellen Lernumgebungen und bei Lernspielen (game based learning) muss der Zusammenhang zwischen Arbeitsgedächtnis und Mathematikleistung neu hinterfragt werden. Die Eigenschaften und Besonderheiten von Computerspielen stellen hohe Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis. Ablenkende Reize wie Geräusche, leuchtende und blinkende Animationen, aber auch viele Alternativantworten können die Leistungskapazität zum Lösen von Aufgaben mindern und eine fehlerhafte Bearbeitung auslösen. In einer jüngeren Studie hinterfragte de Mooij (de Mooij et al., 2020) mittels Eye-Tracking-Methode und Verhaltensbeobachtung die individuellen Unterschiede in Bezug auf das verbale Arbeitsgedächtnis und die Hemmung spontaner Handlungsimpulse (Inhibition) von 8- bis 11-Jährigen beim Lösen von Additionen und Multiplikationen unter Zeitdruck in virtuellen Lernumgebungen. Dieser wurde durch einen animierten visuellen Reiz – die in Sekunden getaktete Bekanntgabe der verbleibenden Zeit durch Münzen – erzeugt. In Übereinstimmung mit früheren Studien (für eine Übersicht siehe Raghubar et al., 2010) erwies sich das verbale Arbeitsgedächtnis unabhängig vom Zeitdruck als starker

Prädiktor für die allgemeine Rechenleistung. Zusammenhänge mit dem Konstrukt der Inhibition wurden hauptsächlich bei den jüngeren Kindern festgestellt – eine höhere Impulshemmung konnte nur dann höhere Mathematikleistungen voraussagen, wenn die verbleibende Zeitspanne ausgeblendet und damit kein Zeitdruck erzeugt wurde. Die Eye-Tracking-Methode sollte Aufschluss über die Fokussierung der Aufmerksamkeit auf die Angabebox mit vorgegebenen Antwortmöglichkeiten bzw. über eine Aufmerksamkeitsverschiebung auf ablenkende Reize geben. Eine signifikant häufigere Fixation der Angabebox unter Zeitdruck zeigt, dass es unter diesen Bedingungen für die Kinder schwieriger war, die Aufgaben im Gedächtnis zu behalten, und lässt auf eine höhere Beanspruchung des Arbeitsgedächtnisses schließen. Jüngere Kinder mit geringerer Impulshemmung fixierten unter Zeitdruck öfter Antwortalternativen, die durch das Vermischen und Vertauschen von Ergebnis und Rechenoperatoren entstanden waren, z.B. 9x4=13, und verglichen die angezeigten Antwortoptionen häufiger, bevor sie eine eigene Antwort gaben.

Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass ein „One-size-fits-all“-Zugang auch für Computer Lernprogramme nicht gilt und deren Qualität mit der Anpassung an das individuelle kognitive Profil der Schülerinnen und Schüler gesteigert werden könnte.

5 Raumvorstellung und Neurowissenschaften

Studien zeigen, dass Menschen mit guter Raumvorstellung auch gute Mathematikleistungen erbringen. Dies ist nachvollziehbar, wenn der Teilbereich der Geometrie erfasst wird. Für diese Arbeit besonders interessant sind jedoch Veröffentlichungen, die Zusammenhänge zwischen Raumvorstellung und Mathematikleistung im Teilbereich der Arithmetik beleuchten, die Relevanz der Neurowissenschaften erkennen lassen und die darüber hinaus auf Erklärungsansätze zurückgreifen, die bereits vorgestellt wurden: das Arbeitsgedächtnis und die räumlich-quantitativen Zahlenrepräsentationen.

Zunächst soll der Begriff der Raumvorstellung hinterfragt werden. Trotz differenter Definitionen sind sich alle Autorinnen und Autoren einig, dass Raumvorstellung die visuell-räumliche rezeptive Wahrnehmung der Welt, ihre mentale Repräsentation und Transformation umfasst. Räumliche Informationen werden sowohl statisch als auch dynamisch auf einer mentalen Ebene abgebildet (Gittler, 1994). Eine der bekanntesten Begriffsbestimmungen stammt aus der Metaanalyse von Linn und Peterson (Linn & Peterson, 1985). Raumvorstellung wird beschrieben als

„[…] skill in representing, transforming, generating and recalling symbolic, nonlinguistic information“ (Linn & Peterson 1985, S. 1482).

Aufbauend auf der Begriffsdefinition extrahieren die Autoren drei Faktoren des Konstruktes Raumvorstellung: die räumliche Wahrnehmung (spatial perception), die mentale Rotation (mental rotation) und die räumliche Visualisierung (spatial visualization).

Aus psychologischer Perspektive stellt die Raumvorstellung in den klassischen Intelligenztheorien- und -modellen einen bedeutsamen Intelligenzfaktor dar, die Messung ist Bestandteil vieler Intelligenztest-Batterien. Bei deren Konzeption wird wiederholt auf Thurstone (Thurstone, 1950 zitiert nach Rost, 1977) verwiesen, der in seinem Intelligenzmodell dem Faktor Space drei Subdimensionen zuordnet: Veranschaulichung (visualization), räumliche Lagebeziehung (spatial relations), Orientierung (spatial orientation) (Thurstone, 1950 zitiert nach Rost, 1977).

Mathematikdidaktische Konzeptualisierungen finden sich insbesondere bei Maier, der die beiden Kategoriensysteme von Linn und Peterson sowie von Thurstone in einem eigenen Modell zusammenfasst (Maier, 1999) und fünf relevante Komponenten räumlich-visueller Qualifikationen erörtert, die in wechselseitiger Beziehung und Abhängigkeit stehen. Dazu zählen „Räumliche Wahrnehmung“, „Räumliche Visualisierung“, „Vorstellungsfähigkeit von Rotationen“, „Räumliche Beziehungen“ und „Räumliche Orientierung“ (Maier, 1999, S. 51).

Franke erweitert in seinem Modell das Konzept von Thurstone um die Subdimension Räumliche Wahrnehmung von Linn und Peterson und definiert vier Komponenten der Raumvorstellung: „Räumliche Beziehung“ bedeutet die Fähigkeit, einen Körper aus verschiedenen Perspektiven zu erfassen und zu identifizieren. „Veranschaulichung“ steht für die mentale Vorstellung von Bewegungen wie Rotation, Verschiebung und Faltung. „Räumliche Orientierung“ bedeutet die räumliche Einordnung der eigenen Person in eine Situation. Die „Räumliche Wahrnehmung“ ist die räumliche Relation zwischen Objekten und dem eigenen Körper, wozu auch der Umgang mit Horizontalität und Vertikalität zählt (Franke, 2007).

Die Bedeutung der Raumvorstellung für die Arithmetik illustrieren zahlreiche fachdidaktische Studien (Merschmeyer-Brüwer, 2011; Grassmann et al., 2010; Lorenz, 2006). Hier soll auf eine österreichische Studie verwiesen werden. Graß und Krammer erhoben die direkten und indirekten Einflüsse der Rechenleistung auf die Raumvorstellung bei 9- bis 11-jährigen Kindern (Graß & Krammer, 2018). Die Rechenleistung wurde mit Grundrechenaufgaben aus dem Heidelberger Rechentest gemessen, dem Raumvorstellungskonzept wurde jenes von Franke zugrunde gelegt. 17% der Varianz in der Rechenleistung konnten durch die Raumvorstellung aufgeklärt werden. Können die Ergebnisse durch neurowissenschaftliche Konzepte erklärt und in diese integriert werden?

Bereits Meyer und sein Kollegenteam (Meyer et al., 2010), aber auch Alloway und Passolunghi (Alloway & Passolunghi, 2011) zeigten, dass im Bereich des Arbeitsgedächtnisses die verbal-phonologische Schleife und die Zentrale Exekutive für die Leistung in frühen Stadien des mathematischen Lernens größere Relevanz besitzen, während der visuell-räumliche Notizblock in späteren Phasen eine zunehmend wichtigere Rolle spielt. Nach Meyer (Meyer et al., 2010) konnte bei Schülerinnen und Schülern der dritten Schulstufe das visuell-räumliche Arbeitsgedächtnis in den Subtests „Mathematical Reasoning“ und „Numerical Operations“, in deren Rahmen beispielsweise Grundrechenarten erfasst wurden, Leistungen vorhersagen. Es liegt die Annahme nahe, dass mit zunehmendem Alter visuell-räumliche Repräsentationen eine hohe Relevanz für die Bewältigung mathematischer Herausforderungen haben und damit ein starker Prädiktor für Mathematikleistungen werden. Die Resultate untermauern das bereits beschriebene neurowissenschaftliche Erklärungsmuster der Verschiebung der Gehirnaktivität von präfrontalen zu parietalen kortikalen Bereichen, denen auch die räumlichen Fähigkeiten zuzuordnen sind (Rotzer et al., 2009; Rivera et al., 2005).

Ein weiterer Zusammenhang von räumlich-numerischen Assoziationen kann aus den Erkenntnissen über die räumlich-qualitativen Repräsentationsformen des mentalen Zahlenstrahls und der ‚object-files‘ beim Zählen und Kopfrechnen gewonnen werden. So belegte ein Team um Hartmann (Hartmann et al., 2015, 2016) mittels Verfolgung der Augenbewegung eine nach rechts gerichtete Bewegung längs des mentalen Zahlenstrahls beim Vorwärtszählen. Eine Gruppe um Knops (Knops et al., 2013, 2014) wies bei einfachen Additionsaufgaben im einstelligen Zahlenbereich rechtsseitige, bei einfachen Subtraktionsaufgaben linksseitige Augenbewegungen nach.

Auch der Effekt der Überschätzung eines Rechenergebnisses am Zahlenstrahl ohne Skalierung bei Additionen und der Unterschätzung bei Subtraktionen sowie die an die Zählrichtung angepasste Bewegungsneigung beim Antworten durch Springen sprechen für die Bedeutung der Raumvorstellung bei der Rechenleistung (Patro et al., 2015; Fischer et al., 2016).

Von didaktischer Relevanz sind die replizierten Ergebnisse, weil sie die Bedeutung eines Trainings der Raumvorstellung für eine Verbesserung der Leistung im Teilbereich Arithmetik des Mathematikunterrichts akzentuieren. Dabei erscheint es notwendig, diese Inhalte nicht nur in den Unterricht der Primarstufe einfließen zu lassen, sondern auch in der Sekundarstufe konsequent weiterzuführen. Eine Reduktion der Lehrplaninhalte in diesem Bereich – wie auch in Österreich angedacht – scheint nicht zielführend. Weiterführende Studien könnten diese Vermutung verifizieren.

6 Richtungsweisende Fragestellungen und zukünftige Herausforderungen

Greift man die vorangestellten Ausführungen auf, muss ein Ausblick vorrangig drei Bereiche thematisieren: Interdisziplinarität, inhaltliche Ausweitung und fachliche Vernetzung der Didaktik der Mathematik.

Zunächst scheint es notwendig, die bisherige unterrichtliche Praxis des Mathematikunterrichts aus differenten Perspektiven neu zu hinterfragen. Interdisziplinarität muss als Möglichkeit und Chance begriffen werden, wissenschaftliche Erkenntnisse aus unterschiedlichen Disziplinen wie Fachwissenschaften, Fachdidaktik, Psychologie und Bildungswissenschaften zusammenzuführen. Hier ist zum einen die Wissenschaft gefordert, die fachdidaktische Herangehensweisen und Stoffvermittlung multiperspektivisch beleuchten kann. Für Lehrerinnen und Lehrer gehört es zu den zentralen zukünftigen Herausforderungen, bisherige Handlungsroutinen zu hinterfragen und die Enge des subjektiven Blickfeldes durch Integration neuer Forschungsinhalte zu weiten. Lehrerinnen und Lehrer sind dann Expertinnen und Experten, wenn es ihnen gelingt, fachspezifische Erkenntnisse mit jenen der Nachbardisziplinen zu verzahnen, vernetzen und verschränken. Nur dann wird Lehren und Lernen im 21. Jahrhundert gelingen.

Zweitens sollten neurowissenschaftliche Studien ihre Designs adaptieren und einen Erkenntnisgewinn auf der Mikroebene anstreben, der auch höhere Altersgruppen einschließt. Auch im Lehr-Lernprozess der Sekundarstufe darf das Augenmerk auf das Detail nicht verloren gehen. Der Blick auf ein spezifisches

Themensegment ist aufwendig und Studien können nur mit geringen Fallzahlen durchgeführt werden. Trotzdem scheint eine gezielte Passung und Einbettung in den Makrobereich der Fachdidaktik lohnend.

Zuletzt bedarf es einer intensiven Vernetzung zwischen den spezifischen Fachdidaktiken der Primar- und Sekundarstufen. Beispielsweise muss sich die Fachdidaktik der Sekundarstufe im Rahmen der Zahlenbereichserweiterung die fundamentalen Erkenntnisse über Repräsentationen von Zahlen durch den mentalen Zahlenstrahl zu eigen machen und didaktische Entscheidungen treffen, die an das Vorwissen im Vermittlungsprozess anknüpfen. Ebenso erfordert es genauerer Abstimmung zwischen den Schularten, welche Inhalte automatisiert werden müssen, sodass eine Entlastung des Arbeitsgedächtnisses bei herausfordernden Aufgaben zugunsten höherer kognitiver Prozesse möglich wird. Auch die Schulung der räumlichen Wahrnehmung verlangt ein langfristiges und nachhaltiges didaktisches Konzept, das auf den in der Primarstufe gesetzten Schwerpunkten aufbaut, diese vertieft und erweitert und so die positiven Auswirkungen auf arithmetische Leistungen auch weiterführen kann.

Sichtbar wird, dass die Notwendigkeit einer engeren Zusammenarbeit zwischen Forscherinnen und Forschern der Didaktik der Mathematik und der kognitiven Neurowissenschaften besteht. Dies erfordert nicht nur die Bereitschaft der Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler beider Disziplinen zur Kooperation, sondern unterstreicht auch die Verpflichtung von Institutionen, dieses Miteinander zu unterstützen und zu fördern.

Literatur

Alloway, T. P. & Passolunghi, M.C. (2011). The relationship between working memory, IQ, and mathematical skills in children. Learning and Individual Differences, 21 (Heft 1), S.133-137. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2010.09.013

Ansari, D. & Lyons, I. (2016). Cognitive neuroscience and mathematics learning: how far have we come? Where do we need to go? ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 48, S. 379-383. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0782-z

Baddeley, A. (1992). Working memory. Science, 255 (Heft 5044), S. 556–559. https://doi.org/10.1126/science.1736359

Baddeley, A. (2006). Working memory: An overview. In S. J. Pickering (Ed.), Working memory and education. Academic Press San Diego, S. 1-31. https://doi.org/10.1016/B978-012554465-8/50003-X

Baddeley, A. (2012). Working memory: Theories, models, and controversies. Annual Review of Psychology, 63, S. 1–29. https://doi.org/10.1146/annurev-psych-120710-100422

Bauer, L. & Rolka, K. & Törner, G. (2005). Mentale Repräsentationen von Irrationalzahlen — eine Analyse von Schülerinnenaufsätzen. Journal für Mathematikdidaktik, 26, S. 3–27. https://doi.org/10.1007/BF03339004

Brader, A. & Gössinger, P. (2015). Zukunftschance Lernen? Mut zur Bildung im Dialog. Ueberreuter Wien.

Cabeza, R. & Nyberg, L. (1997). Imaging cognition: an empirical review of PET studies with normal subjects. Journal Cognitive Neuroscience, 9, S. 1–26.

Caviola, S. & Mammarella, I. C. & Cornoldi, C. & Lucangeli, D. (2012). The involvement of working memory in children’s exact and approximate mental addition. Journal of Experimental Child Psychology,112 (Heft 2), S. 141–160. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.02.005

Cragg, L. & Gilmore, C. (2014). Skills underlying mathematics: The role of executive function in the development of mathematics proficiency. Trends in Neuroscience and Education, 3 (Heft 2), S. 63-68. https://doi.org/10.1016/j.tine.2013.12.001

Danziger, K. (2008). Marking the mind: a history of memory. Cambridge University Press Cambridge.

de Mooij, S. M. M. & Kirkham, N. Z. & Raijmakers, M. E. J. & van der Maas, H. L. J., & Dumontheil, I. (2020). Should online math learning environments be tailored to individuals’ cognitive profiles? Journal of Experimental Child Psychology, 191, Article 104730. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.104730

De Smedt, B. & Grabner, R. (2015). Applications of neuroscience to mathematics education. In: Dowker, A. & Cohen-Kadosh, R. (Ed.), Oxford handbook of mathematical cognition . Oxford University Press Oxford (S. 613–636).

De Smedt, B. (2018). Applications of Cognitive Neuroscience in Educational Research. In: Noblit, G. (Ed.), Oxford handbook of educational research. Oxford University Press New York, (S. 1-23).

https://oxfordre.com/education/view/10.1093/acrefore/9780190264093.001.0001/acrefore-9780190264093-e-69

Dehaene, S. & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. Mathematical Cognition, 1, S. 83-120. http://www.unicog.org/publications/DehaeneCohen_TripleCodeModelNumberProcessing_MathCognition1995.pdf

Dehaene, S. & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. Cortex, 33 (Heft 2), S. 219-250. https://doi.org/10.1016/S0010-9452(08)70002-9

Dehaene, S. & Piazza, M. & Pinel, P. & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. Cognitive Neuropsychology, 20 (Heft 3), S. 487-506. https://doi.org/10.1080/02643290244000239

Dornheim, D. (2008). Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche. Der Beitrag von Zahlenvorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten. Logos Berlin.

Fischer, U. & Moeller, K. & Class, F. & Huber, S. & Cress, U. & Nuerk, H.-C. (2016). Dancing with the SNARC: measuring spatial-numerical associations on a digital dance mat. Canadian Journal of Experimental Psychology, 70 (Heft 4), S. 306–315. https://dx.doi.org/10.1037/cep0000084

Franke, M. (2007²). Didaktik der Geometrie. Spektrum Akademischer Verlag München Heidelberg.

Geary, D.C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A 5- year longitudinal study. Developmental Psychology, 47 (Heft 6), S. 1539–1552. http://dx.doi.org/ 10.1037/a0025510

Giofrè, D. & Donolato, E. & Mammarella, I. (2018). The differential role of verbal and visuospatial working memory in mathematics and reading. Trends in Neuroscience and Education, 12, S. 1–6. https://doi.org/10.1016/j.tine.2018.07.001

Gittler, G. (1994). Intelligenzförderung durch Schulunterricht: Darstellende Geometrie und räumliches Vorstellungsvermögen. In G. Gittler & M. Jirasko & U. Kastner-Koller & C. Korunka & A. Al-Roubaie (Hrsg.), Die Seele ist ein weites Land. WUV Wien S. 105-122.

Göppel, R. (2014). Gehirn, Psyche, Bildung. Chancen und Grenzen einer Neuropädagogik. Kohlhammer Stuttgart.

Grabner, R. & Ansari, D. (2010). Promises and potentail pitfalls of a ´cognitive neuroscience of mathematics learning´. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 42 (Heft 6), S. 655-660. https://DOI:10.1007/s11858-010-0283-4

Graß, K. & Krammer, G. (2018). Direkte und indirekte Einflüsse der Raumvorstellung auf die Rechenleistungen am Ende der Grundschulzeit. Journal der Mathematik Didaktik, 39, S. 43–67. https://doi.org/10.1007/s13138-018-0129-0

Grassmann, M., Eichler, K.-P., Mirwald, E., & Nitsch, B. (2010). Mathematikunterricht. Kompetent im Unterricht der Grundschule. Baltmannsweiler-Schneider Hohengehren.

Grotheer, M. & Herrmann, K.H. & Kovács, G. (2016). Neuroimaging Evidence of a Bilateral Representation for Visually Presented Numbers, The Journal of Neuroscience, 36 (Heft 1), S.88-97. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.2129-15.2016

Grüßing, M. (2012). Räumliche Fähigkeiten und Mathematikleistung: Eine empirische Studie mit Kindern im 4. Schuljahr. Waxmann Münster.

Hartmann, M. & Mast, F.W. & Fischer, M. H. (2015). Spatial biases during mental arithmetic: evidence from eye movements on a blank screen. Frontiers in Psychology, S. 6 - 12. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00012

Hartmann, M. & Mast, F.W. & Fischer, M. H. (2016). Counting is a spatial process: evidence from eye movements. Psychological Research, 80, S. 399–409. https://doi.org/10.1007/s00426-015-0722-5

Hasselhorn, M. (2017). Arbeitsgedächtnis und Sprachentwicklungsstörungen. Bestandsaufnahme und Möglichkeiten der Diagnostik. Sprachförderung und Sprachtherapie in Schule und Praxis, 6 (Heft 3), S. 175-181. https://www.pedocs.de/volltexte/2019/16123/pdf/AGSprachentwicklungsstoerungen_2017_HasselhornA.pdf

Imbo, I. & Vandierendonck, A. (2007). Do multiplication and division strategies rely on executive and phonological working memory resources? Memory & Cognition, 35 (Heft 7), S. 1759-1771.

Kaufmann, L. & Wood, G. & Rubinsten, O. & Henik, A. (2011). Meta-Analyses of Developmental fMRI Studies Investigating Typical and Atypical Trajectories of Number Processing and Calculation. Developmental Neuropsychology, 36, S. 763-787. https://doi.org/10.1080/87565641.2010.549884

Knops, A. & Dehaene, S. & Berteletti, I. & Zorzi, M. (2014). Can approximate mental calculation account for operational momentum in addition and subtraction? The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 67 (Heft 8), S. 1541–1556. https://doi/10.1080/17470218.2014.890234

Krajewski, K. (2008[2]). Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Kovač Hamburg.

Krajewski, K (2013[2]). Wie bekommen Zahlen einen Sinn? Ein entwicklungspsychologisches Modell der zunehmenden Verknüpfung von Zahlen und Größen. In: M. von Aster Michael & J.H. Lorenz (Hrsg.), Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen, (S. 155-179).

Kubesch,S. & Walk, L. (2009). Körperliches und kognitives Training exekutiver Funktionen in Kindergarten und Schule. Sportwissenschaften, 39, S. 309-317. https://doi.org/10.1007/s12662-009-0079-2

Linn, M. C. & Peterson, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability. A meta-analysis. Child Development, 56 (Heft 6), S. 1479-1498. https://doi.org/10.2307/1130467

Lorenz, J.H. (1992). Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Hogrefe Göttingen.

Lorenz, J. H. (2006). Förderdiagnostische Aufgaben für Kindergarten und Anfangsunterricht. In M. Grüßing & A. Peter-Koop (Hrsg.), Beobachten – Fördern – Dokumentieren. Mildenberger Offenburg (S. 55–66).

Maier, P. H. (1999): Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen. Mit didaktischen Hinweisen für den Unterricht. Auer Donauwörth.

Matter, B. (2017): Mathematik - die Wissenschaft der Muster und Strukturen. In: Lernen in heterogenen Lerngruppen. Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik. Springer Spektrum Wiesbaden (S. 7-41). https://doi.org/10.1007/978-3-658-16694-6_2

Merschmeyer-Brüwer, C. (2011). Raum und Form. Vorstellung und Verständnis. Mathematik differenziert, 1, S. 4–5.

Meyer, M. L.& Salimpoor, V. N. & Wu, S. S. & Geary, D.C., & Menon, V. (2010). Differential contribution of specific working memory components to mathematics achievement in 2nd and 3rd graders. Learning and Individual Differences, 20 (Heft 2), S. 101–109. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.08.004

Miyake, A. (2000). The unity and diversity of executive functions and their contributions to complex "frontal lobe" tasks: A latent variable analysis. Cognitive Psychology, 41 (Heft 1), S. 49–100. https://doi.org/10.1006/cogp.1999.0734

Nieder, A. (2012). Neurobiologische Grundlagen der Zahlenverarbeitung. In: H.-O. Karnath & P. Thier (Hrsg.), Kognitive Neurowissenschaften. Springer Berlin Heidelberg (S. 493-502).

Obersteiner, A. (2012). Mentale Repräsentationen von Zahlen und der Erwerb arithmetischer Fähigkeiten. Konzeptionierung und Evaluation einer Förderung mit psychologisch-didaktischer Grundlegung und Evaluation im ersten Schuljahr. Waxmann München.

Obersteiner, A. & Reiss, K., & Ufer, S. (2013). How training on exact or approximate mental representations of number can enhance first-grade students' basic number processing and arithmetic skills. Learning and Instruction, 23, S. 125–135. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.08.004

Patro, K. & Nuerk, H. C. & Cress, U. (2015). Does your body count? Embodied influences on the preferred counting direction of preschoolers. Journal of Cognitive Psychology, 27 (Heft 4), S. 413–425. https://doi.org/10.1080/20445911.2015.1008005

Peters, L., & De Smedt, B. (2018). Arithmetic in the developing brain: A review of brain imaging studies. *Developmental Cognitive Neuroscience, 30,* S. 265–279. https://doi.org/10.1016/j.dcn.2017.05.002

Raghubar, K. P. & Barnes, M. A. & Hecht, S. A. (2010). Working memory and mathematics: A review of developmental, individual difference, and cognitive approaches. Learning and Individual Differences, 20 (Heft 2), S. 110–122. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.10.005

Reiss, K. & Pekrun, R. & Dresler, T. & Obersteiner, A. & Fallgatter, A. (2011). BrainMath: Eine neurophysiologische Untersuchung mathematikrelevanter Hirnfunktionen bei Schulkindern: Einflüsse von alter, Präsentationsformat und Gefühlszustand. In: A. Heine & A. Jacobs (Hrsg.), Lehr-Lern-Forschung unter neurowissenschaftlicher Perspektive. Waxmann Münster (S. 42-55).

Reiss, K. & Fallgatter, A. & Pekrun, R. (2008). BrainMath: Eine neurophysiologische Untersuchung mathematikrelevanter Hirnfunktionen bei Schulkindern - Einflüsse von Alter, Gefühlszustand und Präsentationsformat. Abschlussbericht an das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF), München.

Rivera, S.M. & Reiss, A.L. & Eckert, M.A. & Menon, V. (2005). Developmental changes in mental arithmetic: evidence for increased functional specialization in the left inferior parietal cortex. Cerebral Cortex, 15 (Heft 11), S. 1779–1790. https://doi.org/10.1093/cercor/bhi055

Rost, D. H. (1977). Raumvorstellung – Psychologische und Pädagogische Aspekte. Beltz Weinheim.

Rotzer, S. & Loenneker, T. & Kucian, K. & Martin, E. & Klaver, P. & von Aster, M. (2009). Dysfunctional neural network of spatial working memory contributes to developmental dyscalculia. Neuropsychologia, 47 (Heft 13), S. 2859–2865. https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2009.06.009

Sale, A. & Schell, A. & Koglin, U. & Hillenbrand, C. (2018). Einflussfaktoren mathematischer Kompetenzen vor Schuleintritt. Empirische Sonderpädagogik, 10 (Heft 4), S. 370-387.

Schneider, F. & Fink, G. (Hrsg.) (2013). Funktionelle MRT in Psychiatrie und Neurologie. Springer Berlin Heidelberg.

Schnotz, W. (2014). An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In: R. Mayer (Hrsg.), Cambridge Handbook of Multimedia. University Press Cambridge (S. 49-69).

Schweizer, K. (2006). Leistung und Leistungsdiagnostik. Springer Verlag Heidelberg.

Shum, J. & Hermes, D. & Brett, L. F. & Dastjerdi, M. & Rangarajan, V. & Winawer, J. & Miller, K. & Parvizi, J. (2013). A Brain Area for Visual Numerals. Journal of Neuroscience, 33 (Heft 16), S. 6709-6715. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.4558-12.2013

Smith, E. & Jonides, J. (1999). Storage and executive processes in the frontal lobes. Science, 283, S. 1657-1661. https://science.sciencemag.org/content/283/5408/1657

St Clair-Thompson, H.L & Gathercole, S.E. (2006). Executive functions and achievements in school: shifting, updating, inhibition, and working memory. Quarterly Journal of Experimental Psychology, 59, S. 745–759. https://doi.org/10.1080/17470210500162854

Steel, S.& Funnell, E. (2001). Learning multiplication facts: a study of children taught by discovery methods in England. Journal of Experimental Child Psychology, 79 (Heft 1), S. 37-55. https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2579

Trbovich, P. L. & LeFevre, J.-A. (2003). Phonological and visual working memory in mental addition. Memory & Cognition, 31, S. 738–745. https://doi.org/10.3758/BF03196112

Vanderberg, R. & Swanson, H. L. (2007). Which components of working memory are important in the writing process? Reading and Writing, 20 (Heft 7), S. 721–752. https://doi.org/10.1007/s11145-006-9046-6

Willmes, K. (2012), Mathematische Leistungen und Akalkulien. In: H.-O. Karnath & P. Thier (Hrsg.), Kognitive Neurowissenschaften. Springer Berlin Heidelberg.

Willmes, K. & Klein, E. & Nuerk, H.C. (2013). Akalkulie. In: F. Schneider & G.R. Fink (Hrsg.), Funktionelle MRT in Psychiatrie und Neurologie. Springer Berlin Heidelberg (S. 577-586). https://doi.org/10.1007/978-3-642-29800-4_36

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2012). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept des Mathematikunterrichts in der Grundschule. In G. N. Müller & Ch. Selter & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), Zahlen, Muster und Strukturen. Klett Stuttgart (S. 61–79).