R&E-SOURCE http://journal.ph-noe.ac.at
Open Online Journal for Research and Education
Sonderausgabe Nr. 19, Juli 2020, ISSN: 2313-1640

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

Gibt es einen Planeten B? — Über die Detektion und Klassifikation von Exoplaneten

Vanessa Janeczek[1], *Christian Spreitzer*[2]

Zusammenfassung

Die Entdeckung des ersten Exoplaneten im Jahr 1995 wurde, ebenso wie Beiträge zur Kosmologie, mit dem Physiknobelpreis 2019 ausgezeichnet. Mittlerweile sind mehr als 4000 Exoplaneten bekannt und diese Zahl wird in den nächsten Jahren weiter stark steigen, da bald eigens für die Exoplanetensuche konzipierte Weltraumteleskope ihren Betrieb aufnehmen werden. 2019 wurde erstmals ein Exoplanet identifiziert, auf dem sowohl Wasser existiert als auch lebensfreundliche Temperaturen herrschen. Die Suche nach Exoplaneten ist somit ein hochaktuelles Thema, wobei Mathematik für die Analyse entsprechender astronomischer Beobachtungsdaten von essentieller Bedeutung ist, was in Grundzügen in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II inkludiert werden kann.

1 Einleitung

Ein Mathematikunterricht, im Zuge dessen Mathematik ausschließlich um ihrer selbst willen betrieben wird, scheint den aktuellen Anforderungen nicht gerecht werden zu können. So sind auch in den didaktischen Grundsätzen des Lehrplans für die AHS-Oberstufe „Vernetzungen der Inhalte durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen" (RIS, 2018) als erstrebenswert angeführt. Vor diesem Hintergrund ist insbesondere eine enge Zusammenarbeit mit naturwissenschaftlichen Fächern wie Physik naheliegend. Darüber hinaus vertritt Engel (2018, S. 18-19) die Ansicht, dass das Arbeiten mit realen Fragestellungen sowie mit realen Daten in einem anwendungsbezogenen Mathematikunterricht unerlässlich ist. Für die Bearbeitung von Aufgaben mit physikalischem Kontext bedeutet dies konkret, Datensätze entweder direkt aus selbstständig durchgeführten Experimenten oder aber aus seriösen öffentlichen Datenbanken zu beziehen. Für letzteres bietet sich beispielweise das NASA Exoplanet Archive[1], in dem Daten zu allen derzeit bekannten Exoplaneten zur Verfügung gestellt werden, an. Dabei ist es nicht allein ob des Vorhandenseins sowie der einfachen Zugänglichkeit der entsprechenden Daten, sondern auch ob der enormen Bedeutung von Exoplaneten für die moderne Wissenschaft empfehlenswert, sich im Rahmen des Mathematikunterrichts mit diesen zu befassen. Deshalb und weil Mathematik bei der Suche nach Exoplaneten in verschiedenster Hinsicht von großer Bedeutung ist, liegt es nahe, im Mathematikunterricht mit realen Daten zu Exoplaneten zu arbeiten. Mithilfe einfacher physikalischer Zusammenhänge und elementarer Algebra können einige der für eine etwaige Bewohnbarkeit dieser fernen Welten relevanten Parameter ermittelt werden. Darüber hinaus lässt sich im Rahmen solcher Berechnungen auch der verständige Umgang mit physikalischen Zusammenhängen, Größen und Einheiten, wie er bei der standardisierten Reifeprüfung verlangt wird, schulen.

2 Die Suche nach Exoplaneten

Die erste Entdeckung eines extrasolaren Planeten, also eines Planeten, der einen außerhalb unseres Sonnensystems befindlichen Stern umkreist, wurde 1855 gemeldet, wobei es sich allerdings um eine Fehldeutung handelte.

[1]Studierende des Lehramtsstudiums der Sekundarstufe an der Universität Wien, Unterrichtsfächer Deutsch, Mathematik und Physik.
[2]Pädagogische Hochschule Niederösterreich, Mühlgasse 67, 2500 Baden. *Korrespondierender Autor. E-Mail: christian.spreitzer@univie.ac.at.*

Anschließend sollte es noch 140 Jahre dauern, bis es den Schweizer Astronomen Michel Mayor und Didier Queloz 1995 tatsächlich erstmals gelang, einen Exoplaneten zu beobachten (Piper, 2014, S. 21-29). Seither wird mit Hilfe stets weiterentwickelter Teleskope und Detektionsmethoden nicht nur bloß nach weiteren Exoplaneten, von denen bislang etwa 4100 bekannt sind, sondern auch speziell nach für Menschen potentiell bewohnbaren Planeten gesucht. Da bereits sehr erdähnliche Exoplaneten sowie solche, in deren Atmosphäre Wasserdampf vorkommt, aufgespürt wurden, und mit Hilfe neuer Teleskope (TESS, Cheops, James Webb), die ihren Betrieb kürzlich aufgenommen haben oder bald aufnehmen werden, in den nächsten Jahren ohne Zweifel zahlreiche weitere entdeckt werden können, ist es wohl nur eine Frage der Zeit, bis ein solcher gefunden wird.

Für mikrobakterielles Leben ist dabei das Vorhandensein von flüssigem Wasser, chemischen Basisbausteinen sowie einer Energiequelle ausreichend. Um menschenähnliches Leben zu ermöglichen, müssten Planeten zusätzlich mindestens ein Drittel und maximal das Zehnfache der Erdmasse aufweisen. Weniger Masse wäre vermutlich nicht ausreichend, um eine lebensnotwendige Atmosphäre halten zu können, während besonders massereiche Planeten sehr wahrscheinlich Gasplaneten ohne feste Oberfläche sind. Handelt es sich um einen Gesteinsplaneten mit passender Masse, ist außerdem eine Plattentektonik notwendig, welche unter anderem einen wesentlichen Beitrag zur Temperaturregulation leistet (Piper, 2014, S. 123-127). Weitere Kriterien für die potentielle Bewohnbarkeit durch den Menschen sind eine geeignete Temperatur auf dem Planeten und deren (annähernde) zeitliche Konstanz, um neben der Entwicklung auch die Aufrechterhaltung von Leben zu gewährleisten. Dafür sollte sich die Bahn des Planeten in der sogenannten habitablen Zone des jeweiligen Sterns befinden, wobei dies nicht automatisch die Habitabilität eines Planeten bedeutet und umgekehrt (Rehder, 2015, S. 124-128).

Im vorliegenden Artikel werden exemplarisch einige physikalische Beziehungen und Informationen zur Detektion und Klassifikation von Exoplaneten dar- bzw. vorgestellt, die im Mathematikunterricht zusammen mit den entsprechenden astronomischen Beobachtungsdaten in Form von Übungsaufgaben behandelt werden können. Deren Ergebnisse wiederum sollten hinsichtlich der Existenz und Bewohnbarkeit von Exoplaneten interpretiert und somit nachvollziehbar gemacht werden. Ein dazu konzipiertes Arbeitsblatt mit konkreten Aufgaben kann von der Website zum Tag der Mathematik 2020 heruntergeladen werden: `https://www.ph-noe.ac.at/fileadmin/root_phnoe/PHN%C3%96/fachbereiche/Mathematik/Tag_der_Mathematik_2020`.

2.1 Detektion von Exoplaneten mit der Transitmethode

Die allermeisten der bisher entdeckten Exoplaneten wurden mit der Transitmethode gefunden. Zieht ein Exoplanet vor seinem Zentralgestirn vorbei, führt dies zu einem Absinken der scheinbaren Helligkeit des Sterns, weil der Exoplanet einen Teil des Sternenlichts abblockt. Aus einem periodischen Abfall der Helligkeit kann auf die Existenz eines den Stern begleitenden Planeten geschlossen werden. Der zeitliche Abstand zwischen zwei Helligkeits-Dips entspricht der Umlaufzeit des Planeten. Bei bekanntem Sternradius lässt sich aus der prozentualen Abnahme der Helligkeit beim Transit auf die Größe des Exoplaneten schließen. Ist r der Radius des Planeten und R der Radius des Sterns, dann deckt der Planet einen Bruchteil $(r/R)^2$ der Sternenscheibe ab, d.h. die Helligkeit sinkt um diesen Bruchteil. Auf der Website Jet Propulsion Laboratory der NASA findet man zahlreiche Unterrichtsmaterialien zum Thema Raumfahrt, darunter auch Arbeitsblätter zur Transitmethode[2].

2.2 Große Halbachse und Umlaufzeit

Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetz verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten so wie die Kuben ihrer großen Halbachsen. Während Kepler dieses Gesetz empirisch fand, konnte Newton es aus seinen Axiomen der klassischen Mechanik und seinem Gravitationsgesetz herleiten und so einen Zusammenhang mit der Masse des Sterns herstellen[3]:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}a^3.$$

Hierin ist T die Umlaufzeit, M die Sternmasse und a die große Halbachse der Umlaufbahn des Planeten. Die Planetenmasse kann gegenüber der Sternmasse vernachlässigt werden, d. h. wir können $M + m \approx M$ annehmen.

Betrachten wir die obige Gleichung einmal für die Erde und einmal für einen Exoplaneten, dann erhalten wir durch Division der beiden Gleichungen und unter Vernachlässigung der Exoplaneten- bzw. Erdmasse die Beziehung

$$\frac{T^2}{T_{♁}^2} = \frac{M_{\odot}}{M} \frac{a^3}{a_{♁}^3},$$

wobei $\odot$ für die Sonne und ♁ für die Erde steht. Ist die Umlaufzeit oder die große Bahnhalbachse eines Exoplaneten bekannt, lässt sich (bei bekannter Sternmasse) damit die jeweils andere Größe ermitteln. Die große Halbachse der Erdbahn entspricht in etwa 1 AE (einer **A**stronomischen **E**inheit, 1 AE ≈ 150 Millionen km).

2.3 Leuchtkraft

Die Leuchtkraft eines Sterns ist die pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie. Sie hängt im Wesentlichen nur von der Temperatur und der Größe des Sterns ab. Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ist die Strahlungsleistung P eines (schwarzen) Körpers der Temperatur T durch $P = \sigma A T^4$ gegeben, wobei A die Oberfläche des Körpers ist und $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}$ die Stefan-Boltzmann-Konstante. Die Oberfläche eines Sterns hängt quadratisch von seinem Radius ab ($A = 4\pi R^2$), also verhält sich die Leuchtkraft eines Sterns mit Radius R und Temperatur T zu jener der Sonne (5778 K) wie folgt:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \frac{T^4 R^2}{T_{\odot}^4 R_{\odot}^2}.$$

Beispiel: Der hellste Stern am Nachthimmel, Sirius A, besitzt eine Oberflächentemperatur von 9900 K (lässt sich anhand des Spektrums mithilfe des Wien'schen Verschiebungsgesetzes bestimmten), sein Radius, der bei bekannter Masse etwa aus der gravitativen Rotverschiebung von Spektrallinien im Spektrum des Sterns ermittelt werden kann, ist etwa 1.7-mal so groß wie jener der Sonne. Damit ergibt sich für die Leuchtkraft

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{9900}{5778}\right)^4 \cdot 1.7^2 \approx 24.9,$$

d. h. Sirius A hat etwa die 25-fache Leuchtkraft der Sonne.

2.4 Gravitationsbeschleunigung

Zwei Massen M und m im Abstand r ziehen einander gegenseitig mit der Kraft $F = G\frac{Mm}{r^2}$ an, wobei $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kgs^2}}$ die Newton'sche Gravitationskonstante ist. Die Gravitationsbeschleunigung auf der Oberfläche eines Planeten mit Masse M und Radius R ist damit

$$a_G = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2}.$$

Beispiel: Der Jupitermond Titan hat einen Durchmesser von 5150 km (er ist damit größer als Merkur, der kleinste Planet im Sonnensystem) und eine Masse von $1.345 \cdot 10^{23}$ kg. Damit beträgt die Gravitationsbeschleunigung auf der Oberfläche Titans

$$a_G = \frac{GM}{R^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.345 \cdot 10^{23}}{(2.575 \cdot 10^6)^2} \approx 1.35\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}},$$

also nur etwa $\frac{1}{7}$ der Erdbeschleunigung. Titan ist deshalb interessant, weil er der erdähnlichste Himmelskörper des Sonnensystems ist (so gibt es auf seiner Oberfläche z. B. gefrorenes Wasser) und in etwa 6 Milliarden Jahren, wenn sich die Sonne zu einem Roten Riesen aufblähen wird, dort ähnliche Temperaturen wie heute auf der Erde herrschen könnten. (Auf der Erde wird, unabhängig vom Klimawandel, bereits viel früher, nämlich in einigen 100 Millionen Jahren, kein höheres Leben mehr möglich sein, da die Leuchtkraft der Sonne kontinuierlich zunimmt (um etwa 10 % in einer Milliarde Jahre).

2.5 Habitabilität

Die habitable Zone um einen Stern ist in erster Linie durch seine Leuchtkraft bestimmt (zu weit weg vom Stern ist es zu kalt, zu nahe zu heiß). Fragen wir uns, in welchem Abstand sich ein Exoplanet von einem Stern der Leuchtkraft L befinden müsste, damit dort Temperaturen herrschen, die mit jener auf der Erde vergleichbar sind, können wir in einer vereinfachten Betrachtung, die die Atmosphäre des Exoplaneten außer Acht lässt, diesen Abstand durch

$$r_{\text{hab}} = \sqrt{L/L_\odot} \cdot 1\text{AE}$$

bestimmen (weil die Strahlungsleistung pro Fläche quadratisch mit dem Abstand vom Stern abnimmt). Wie weit darf der Bahnradius von diesem Wert abweichen, damit auf dem Exoplaneten höheres Leben möglich ist? Bereits für unser Sonnensystem kommen verschiedene Studien zu verschiedenen Zahlen, die habitable Zone hängt von vielen Parametern ab (etwa auch von der Spektralklasse des Sterns). Dem ungefähren Mittelwert der Ergebnisse dieser Studien entsprechend nehmen wir an, dass die habitable Zone in unserem Sonnensystem derzeit zwischen 0.95 AE und 1.02 AE liegt. Wir definieren den Habitabilitätsparameter

$$h := \frac{r}{r_{\text{hab}}},$$

wobei r der tatsächliche Bahnradius des Exoplaneten ist, und betrachten einen Exoplaneten als habitabel, falls

$$0.95 \leq h \leq 1.02.$$

Beispiel: Die große Halbachse des Planeten Venus beträgt 0.723 AE, jene des Planeten Mars 1.524 AE. Die Bahnen dieser Planeten liegen damit deutlich außerhalb der habitablen Zone. Da die Sonne aber immer heißer werden und sich schließlich zu einem Roten Riesen aufblähen wird, verschiebt sich die habitable Zone mit der Zeit nach außen, sodass die Marsbahn irgendwann innerhalb der habitablen Zone liegen wird.

Literatur

Engel, J. (2018). *Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion. Eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtsstudierende*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Piper, S. (2014). *Exoplaneten. Die Suche nach einer zweiten Erde*. Berlin, Heidelberg: Springer (2. Auflage).

Rehder, D. (2015). *Exoplanets. Extant Life?* New York: Nova Science Publishers.

RIS (2018). *Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 01.09.2018*. Online verfügbar unter: `https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2018-09-01` [Zugriff: 13.04.2020].

---

[1] NASA Exoplanet Science Institute. *NASA Exoplanet Archive*. Verfügbar unter: `https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/cgi-bin/TblView/nph-tblView?app=ExoTbls&config=planets` [Zugriff: 15.04.2020].

[2] NASA Jet Propulsion Laboratory - California Institute of Technology. *Exploring Exoplanets with Kepler*. Verfügbar unter: `https://www.jpl.nasa.gov/edu/teach/activity/exploring-exoplanets-with-kepler/` [Zugriff: 15.04.2020].

[3] Unter den Annahmen, dass $m \ll M$ und die Bahn des Planeten kreisförmig ist, lässt sich das zweite Keplersche Gesetz wie folgt herleiten: Wir setzen die Gravitationskraft $F_G = G\frac{Mm}{a^2}$ gleich der Zentripetalkraft $F_Z = \frac{mv^2}{a}$, drücken die Bahngeschwindigkeit durch die Umlaufzeit aus, $v = \frac{2\pi a}{T}$, und lösen nach T^2 auf. Damit ergibt sich $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$.