R&E-SOURCE http://journal.ph-noe.ac.at
Open Online Journal for Research and Education
Sonderausgabe Nr. 19, Juli 2020, ISSN: 2313-1640

Gibt es eine größte Zahl?

Intuitive kindliche Begriffskonstruktionen zu „unendlich“

Franziska Strübbe[1], *Alena Witte*[2]

Abstract

Kleine Matheasse zeigen schon früh eine ausgeprägte Faszination für mathematische Fragestellungen. Es gelingt ihnen dabei, ein intuitives Begriffsverständnis zu entwickeln, welches Lehrkräfte differenziert erfassen und wertschätzen sollten. Zur empirischen Ergründung intuitiver kindlicher Begriffskonstruktionen wird im folgenden Beitrag eine in diesem Kontext entstandene Studie hinsichtlich der Anlage und erster Ergebnisse diskutiert.

1 Einleitung

„Gibt es eine größte Zahl?“ bzw. „Wann hören die Zahlen eigentlich auf?“, „Wie weit kann ein Mensch zählen?“, „Wie groß ist Unendlich?“ sind „große“ Fragen, die bereits kleine Matheasse zu regen Gedankenspielen herausfordern. Besonders interessant wird es, Kinder bei der Suche nach Antworten auf diese Fragen zu begleiten, ihre intuitiven Begriffskonstruktionen zu hinterfragen, sie zu verstehen und wertzuschätzen. Beobachtungen und Definitionsversuche von Kindern zur Unendlichkeit gaben den Anstoß zur wissenschaftlichen Erkundung kindlicher intuitiver Begriffskonstruktionen zur Frage „Gibt es eine größte Zahl?“. Im folgenden Beitrag gilt es, das Setting der Studie mit ersten Ergebnissen darzustellen und darüberhinausgehend praxeologische Konsequenzen für eine sinnvolle Thematisierung des Unendlichkeitsbegriffs mit Kindern aufzuzeigen.

2 Zum Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik

In der Fachwissenschaft Mathematik wird „unendlich“ üblicherweise mittels der Abzählbarkeit von Mengen definiert. Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, „wenn sie dieselbe Mächtigkeit wie die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ besitzt. Genauer, wenn eine Bijektion $f: M \rightarrow \mathbb{N}$ existiert. Andernfalls heißt die Menge überabzählbar [unendlich].“ (Modler & Kreh, 2014, S. 16) Das bedeutet also, dass jedem Element einer abzählbar unendlichen Menge M genau ein Element der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zugeordnet wird. Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sowie die Primzahlen sind abzählbar unendlich während beispielsweise die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ überabzählbar unendlich sind – man kann also nicht allen Elementen aus $\mathbb{R}$ genau ein Element der natürlichen Zahlen zuordnen und diese damit „abzählen“ (vgl. Modler & Kreh, 2014, S. 29). Mathematiker verwenden das Zeichen „∞“ für „unendlich“ (vgl. Behrends, 2013, S. 221).

So abstrakt diese „Unendlichkeitsdefinition“ auch erscheint, so fasziniert die „Unendlichkeit“ die Menschen schon seit einer langen Zeit. So bewiesen bereits die alten Griechen etwa 300 v. Chr., dass die Folge der Primzahlen nicht abbricht (vgl. Benölken et al., 2012, S. 89f.), während Peano 1889 das „Immer-weiterzählen-können“, das aus den unendlichen Mengen resultiert, in seinen Peano-Axiomen formalisierte (vgl. Beutelspacher, 2016, S. 47). Pi stellt zudem eine unendliche Zahl dar, dessen Ziffern nie abbrechen (Beutelspacher, 2015, S. 42). Faszinierend ist ferner die Illustration der Unendlichkeit anhand von „Hilberts Hotel“, das unendlich viele Zimmer hat, die mit 1, 2, 3 und so weiter durchnummeriert sind. Das Hotel sei nun ausgebucht, ein Gast möchte jedoch einziehen. In Hilberts Hotel ist das kein Problem. Der Gast aus Zimmer 1 zieht in Zimmer 2, der Gast aus Zimmer 2 in Zimmer 3 und so weiter. So wird das Zimmer 1 frei und alle Gäste kommen unter. Stellen Sie sich vor, das Hotel sei wieder ausgebucht und nun kommt ein Zug mit unendlich vielen Reisenden an. Auch sie bekommen alle ein Zimmer in Hilberts Hotel. Haben Sie eine Idee, wie die Gäste hierzu die Zimmer wechseln müssen? (vgl. Behrends, 2013, S. 42f.)

[1] Westfälische Wilhelms-Universität Münster, E-Mail: struebbe@uni-muenster.de
[2] Westfälische Wilhelms-Universität Münster, E-Mail: alena.witte@uni-muenster.de

3 Begabungsförderung im Projekt „Mathe für kleine Asse“

Die Studie „Gibt es eine größte Zahl - Intuitive kindliche Begriffskonstruktionen zu „unendlich““ ist eingebettet in das Enrichmentprojekt „Mathe für kleine Asse“ an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster. Unter Leitung von Prof. Dr. F. Käpnick werden hier in regelmäßig stattfindenden Knobelstunden Kinder von der Kita bis zur 9. Klassenstufe in ihrer Begabungs- und Persönlichkeitsentwicklung gefördert. Die Förderung mathematisch begabter Kinder, eingebunden in die Organisationsstruktur der universitären Lehre zur Lehramtsausbildung, bietet den teilnehmenden Kindern zahlreiche Möglichkeiten, zu verschiedenen Inhalten zu forschen. Insofern definiert sich das „Mathe für kleine Asse“-Projekt als Lehr-Lern-Labor (Brüning, 2018, S. 163). Wesentlich für die Forschungsaktivitäten im Lehr-Lern-Labor sind dabei die Grundpositionen zum mathematischen Begabungsbegriff (Käpnick, 2014, S. 218ff.) sowie die Begriffsdefinition (Fuchs & Käpnick, 2009, S. 9) und Modellierungen mathematischer Begabungsentwicklungen (Käpnick, 1998, S. 119; Käpnick & Fuchs, 2006, S. 67; Meyer, 2015, S. 249; Sjuts, 2017, S. 366). Die Forschungen zu intuitiven kindlichen Begriffskonstruktionen bilden einen weiteren Bereich, um die Spezifik mathematisch begabter Kinder weitergehend zu erkunden.

4 Intuitive kindliche Begriffskonstruktionen

Mathematisch begabten Kindern (vgl. Käpnick 2014, S. 213-231) gelingt es, ein intuitives Verständnis zu mathematischen Zusammenhängen zu entwickeln (vgl. Käpnick, 2016, S. 115). Während sich die sogenannten intuitiven Begriffsverständnisse zwar oft von denen der Erwachsenen unterscheiden, ist das Wissen doch theorieähnlich in Wissensbereiche geordnet (Sodian, 2002, S. 449). Die Kinder bilden die intuitiven Begriffsverständnisse auf der Grundlage ihrer Vorerfahrungen und ihres bisher erworbenen bzw. angeborenen (z. B. Zahlensinn) Wissens, indem sie beispielsweise den Begriffsinhalt, ein Begriffswort etc. für sich konstruieren. Das entspricht dem Verständnis des Lernens als ein subjektiver, aktiv-konstruktiver Prozess, der u. a. von individuellen Erfahrungen, Interessen, Denkstilen sowie von Gefühlen beeinflusst wird. Bereits Vorschulkinder sind diesbezüglich zum kausalen Denken fähig – auch wenn ihnen teilweise bereichsspezifisches Wissen für korrekte Erklärungen fehlt, sodass die Begriffskonstruktionen „fehlerhaft“ erscheinen (vgl. Käpnick, 2014, S. 92f.; Käpnick, 2016, S. 124f.).

Lehrkräfte sollten diese allerdings als „konstruktiv gewachsene und individuell geprägte Erkenntnisse einordnen“ (Käpnick, 2018, S. 84). Eine Korrektur der Begriffskonstruktionen ist nur in einem längeren Prozess dadurch möglich, die kindlichen Konstruktionen zu verstehen und anschließend das Gesamtsystem dadurch zu verändern, dass in Interaktion mit dem Kind neues Wissen konstruiert und vertieft, aber nicht instruiert wird (vgl. Käpnick, 2016, S. 127; Käpnick, 2018, S. 84f.).

5 Untersuchungen intuitiver kindlicher Begriffskonstruktionen zu „unendlich“

Im Folgenden wird eine Studie vorgestellt, bei der intuitive Begriffskonstruktionen mathematisch begabter Kinder zum Konstrukt „Unendlichkeit“ untersucht wurden. Die Begriffsverständnisse der Kinder wurden anhand der offenen Fragestellung „Gibt es eine größte Zahl? Schreibe oder male.“ erhoben. Das Arbeitsblatt, welches den Kindern zur Beantwortung der Fragestellung zur Verfügung gestellt wurde, war bis auf die Abbildung der Frage lediglich weiß, sodass sich die Kinder in ihren Ausführungen frei entfalten konnten. Anschließend wurden die Eigenproduktionen und Aussagen der Kinder auf Grundlage eines Kategoriensystems nach Dötschel (2011, S. 208) ausgewertet, das verschiedene Vorstellungen des Unendlichkeitsbegriffs unterscheidet. Ferner wurden die Begriffsverständnisse mathematisch begabter Grundschüler/innen (N=10) mit denen der Kinder einer Regelklasse (N=34) verglichen. Alle Kinder befanden sich zum Erhebungszeitpunkt im dritten Schuljahr.

Dötschel (2011, S. 208) unterscheidet zwischen den Vorstellungen der Iteration („Hört nie auf.“), des Ziffernaspektes („Eine 1 mit ewig vielen Nullen.“), der Größenvorstellung („Unvorstellbar groß.“) sowie metaphysischen („Das Universum ist unendlich.“) und formalsymbolischen („Das Symbol ∞.“) Vorstellungen. Zu den Kategorien nach Dötschel (2011, S. 208) zeigen sich in unserer Studie weitere Vorstellungen des Unendlichkeitsbegriffs. Zum einen eine aus Erwachsenenperspektive vermeintliche „Fehlvorstellung“, die sich dadurch zeigte, dass Kinder die Frage, ob es eine größte Zahl gäbe, bejahten. Zum anderen traten begründungslose Antworten

(„Nein.“) auf, welche als weitere Kategorie hinzugefügt wurde. Die Ergebnisse der Untersuchung sind in der Tabelle 1 dargestellt.

Beispiel aus der Studie	**Vorstellung**	**Mathematisch begabte und interessierte Kinder**	**Kinder einer Regelschulklasse**
„Nein, es gibt keine größte Zahl, weil es immer weiter geht.“	Iteration	1	8
„Du kannst auch jemanden unendlich doll liebhaben.“	Metaphysisch	-	-
„1, 10, 100, 1000, 100000, …, 1000000000000000000000000000.“	Ziffernaspekt	1	-
„∞“	Formalsymbolisch	4	-
„Nein, weil es gibt nur die Zahl unendlich und das ist keine richtige Zahl.“	Größenvorstellung	1	-
„Nein.“	Begründungslos	3	11
„Ja. Diese Zahl heißt 999999999999999999.“	Fehlvorstellung	-	15

Tabelle 1: Intuitive kindliche Begriffskonstruktionen zu „unendlich“ im Vergleich

In der Studie zeigt sich, dass die Frage nach einer größten Zahl für die Kinder eine Relevanz in ihrer Lebenswelt hat und dass die Kinder intuitive Begriffskonstruktionen zur „Unendlichkeit“ aufweisen. Auffällig ist, dass die Vorstellungen mathematisch begabter Kinder durchaus vielfältiger als die der Kinder der Regelklasse sind. Mathematisch begabte Kinder begründen ihre Begriffskonstruktionen zudem meist eigenständig und nachvollziehbar und sie unterliegen hier keinen Fehlvorstellungen. Diese zeigen sich allerdings in der Regelschulklasse bei einem beachtlichen Anteil der Kinder. Wichtig ist nun, dass die Lehrkraft diese Begriffskonstruktionen versteht und wertschätzt, um in Interaktion mit dem Kind Veränderungen der Vorstellungen konstruieren zu können.
Im Rahmen unseres Workshops am „Tag der Mathematik“ an der PH Niederösterreich haben wir zudem die intuitiven Begriffskonstruktionen der Teilnehmenden (Lehrpersonen, Studierende, Dozierende) zu der „Unendlichkeit“ erfragt (N=10). Interessant ist, dass sich diese ebenfalls dem Kategoriensystem zuordnen lassen. So zeigten sich metaphysische („Unendlich wie das Weltall.“) und formalsymbolische („∞“) Vorstellungen sowie eine begründungslose Antwort („Nein.“). Vorstellungen der Iteration, des Ziffernaspektes, der Größenvorstellung sowie Fehlvorstellungen zeigten sich bei den Teilnehmenden nicht.

In Hinblick auf eine tiefere Ergründung der intuitiven kindlichen Begriffskonstruktionen zu „unendlich“ sowie zur Revision des Kategoriensystems soll die Stichprobe in weiterführenden Untersuchungen sowohl vergrößert als auch auf weitere Altersklassen ausgeweitet werden. Ferner wäre es interessant zu erheben, ob sich geschlechtsspezifische Unterschiede bzgl. der Begriffskonstruktionen zeigen.

6 Praxisbeispiel

Das Thematisieren der Frage nach der Unendlichkeit von Zahlen vollzieht sich im „Mathe für kleine Asse“-Projekt sowohl spontan, als „Ausdruck eines ehrlichen Interesses oder einer intellektuellen Neugier des Kindes“ (Fuchs & Käpnick, 2004, S. 15), als auch in bewusst initiierten thematischen Problemdiskussionen. Möglichkeiten mathematische Lerngelegenheiten mit Kindern zum Thema „unendlich“ gezielt durchzuführen, bieten sich im Rahmen von offenen, mathematischen Spiel- und Lernfeldern (Fuchs, 2015, S. 72ff) sowie offenen, substanziellen Problemaufgaben (Käpnick, 2014, S. 125) an. Um Kinder in ihrem mathematischen Tun zu unterstützen, wurden zur Auseinandersetzung mit dem Unendlichkeitsbegriff verschiedene substanzielle Problemaufgaben entwickelt und erprobt. Folgende Aufgaben sind dabei entstanden: Möbiusband, Käferexperiment, Kochsche Schneeflocke, Spiegelexperiment, Wasser teilen (Die Materialien und die Literatur können bei den Autorinnen angefragt werden.).

7 Fazit und Ausblick

Die theoriegeleitete, empirische Erhebung zu intuitiven kindlichen Begriffskonstruktionen zu „unendlich“ verdeutlicht, dass jüngere Kinder die Frage „Gibt es eine größte Zahl?“ beschäftigt, sie diese aber nicht spontan fundiert beantworten können, denn: Eine Antwort auf die Frage ist sehr vielschichtig. Demgemäß gibt es nicht die eine „richtige“ Antwort. Dass sich ein Vertiefen in diese Frage aber als äußerst lohnenswert erweisen kann, zeigen die ersten Studienergebnisse. In weiteren Untersuchungen gilt es nun die Stichprobe auszuweiten, um fundiertere Erkenntnisse hinsichtlich intuitiver kindlicher Begriffskonstruktionen zu „unendlich“ zu erlagen. Als praxeologische Konsequenz lässt sich daraus primär ableiten, dass Kinder neugierig auf große Fragen sind und dabei kompetente Lernbegleiter benötigen. In diesem Zusammenhang bilden offene Spiel- und Lernfelder bzw. offene, substanzielle Problemaufgaben eine Möglichkeit, alle Kinder gemäß ihren individuellen Potenzialen und Bedarfen zu fördern. In diesem Sinne ist es entscheidend für die Wissenschaft und pädagogische Arbeit in Kindergarten und Schule, neugierig und erkundungsfreudig zu bleiben, wenn mit Kindern überlegt wird, ob es eine größte Zahl gibt. Diese Suche kann bisweilen unendlich lang sein.

Literatur

Brüning, A.-K. (2018). *Das Lehr-Lern-Labor „Mathe für kleine Asse“. Untersuchungen zu Effekten der Teilnahme auf die professionellen Kompetenzen der Studierenden.* Münster: WTM.

Behrends, E. (2013). *Fünf Minuten Mathematik. 100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung DIE WELT.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Benölken, R.; Gorski, H.-J. & Müller-Philipp, S. (2017). Leitfaden Arithmetik. Für Studierende der Lehrämter (7. Auflage). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Beutelspacher, A. (2015). *Wie man in eine Seifenblase schlüpft. Die Welt der Mathematik in 100 Experimenten*. München: Verlag C. H. Beck.

Beutelspacher, A. (2016). *Kleines Mathematikum. Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik* (4. Auflage). München: Verlag C. H. Beck.

Dötschel, D. (2011). Zum Verständnis der Unendlichkeit im Mathematikunterricht. In: R. Haug & L. Holzapfel (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 207-210). Münster: WTM.

Fuchs, M. (2015). *Alle Kinder sind Matheforscher. Frühkindliche Begabungsförderung in heterogenen Gruppen*. Seelze: Klett Kallmeyer.

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2004). *Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 1. und 2. Schuljahr*. Berlin: Cornelsen.

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2009). *Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr*. Band 2. Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder.* Frankfurt: Peter Lang.

Käpnick, F. (2014). *Mathematiklernen in der Grundschule*. Heidelberg: Springer.

Käpnick, F. (2016). Intuitive Theoriekonstrukte als stetige Begleiterscheinung des individuell konstruktiven Lernens von Kindern. In: R. Benölken & F. Käpnick (Hrsg.): *Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion* (S. 114-130). Münster: WTM.

Käpnick, F. (2018). Formatives Assessment – ein wertvolles didaktisches Mittel zum Erkennen und Fördern mathematisch begabter Kinder. In: ÖZBF (Hrsg.): *Wege in der Begabungsförderung in Mathematik* (S. 80-87). Salzburg: ÖZBF.

Käpnick, F. & Fuchs, M. (2006). „Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter“. In: Fuchs, M. (2006). *Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen*. Dissertation. Berlin: LIT.

Meyer, K. (2015). *Mathematisch begabte Kinder im Vorschulalter.* Münster: WTM.

Modler, F. & Kreh, M. (2014). Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1 (3. Auflage). Berlin, Heidelberg: Springer.

Sjuts, B. (2017).*Mathematisch begabte Fünft- und Sechstklässler*. Münster: WTM.

Sodian, B. (2002). Entwicklung begrifflichen Denkens. In: R. Oerter & L. Montada (Hrsg.): *Entwicklungspsychologie* (5. Aufl., S. 443-468). Weinheim: Beltz.