R&E-SOURCE https://journal.ph-noe.ac.at
Online Journal for Research and Education
Ausgabe 13, April 2020, ISSN: 2313-1640

Mathematisches Argumentieren im Schulunterricht fördern

Alexander Zimmermann[1]

Zusammenfassung

In diesem Artikel wird die Methode der *structured derivations*, einer in Finnland entwickelten Unterrichtsmethode zur Förderung der Kompetenz im mathematischen Argumentieren, vorgestellt. Sie wurde sowohl in der gymnasialen als auch in der akademischen Lehre, u. a. im Rahmen des EU-Projektes E-Math (2011 – 2013), getestet. Die positiven Ergebnisse der Tests scheinen dafür zu sprechen, diese Methode in den Methodenkorpus der modernen Schulmathematik aufzunehmen. Denn mit ihrer Hilfe könnte u. a. der für viele Studienanfängern und Studienanfängerinnen als schwer bewältigbar empfundene Wechsel von der Schul- zur Universitätsmathematik erleichtert werden. In diesem Artikel wird die Methode der *structured derivations* anhand dreier Beispiele vorgestellt. Eine ausführliche kritische Untersuchung wird in einer eigenen Abhandlung erfolgen.

Promoting Mathematical Reasoning in School Lessons

Abstract

The method of structured derivations, developed in Finland, can be used in teaching mathematics to promote and train competence in mathematical reasoning. This method has been tested in both high-school and academic teaching, as for instance in the EU project E-Math (2011 – 2013), with the result that the method, if adopted in modern schoolteaching methods, could help to mitigate the transition from school to university mathematics, often problematic for new students. By means of three examples, this article presents the method, of which a detailed critical analysis is given in a separate paper.

Schlüsselwörter:
Mathematisches Argumentieren
structured derivations
Mathematische Unterrichtsmethoden

Keywords:
mathematical reasoning
structured derivations
mathematical teaching methods

1 Einleitung

In diesem Artikel wird die Methode der *structured derivations*, einer in Finnland entwickelten Unterrichtsmethode zur Förderung der Kompetenz im mathematischen Argumentieren, vorgestellt. Sie wurde von Ralph-Johan Back und Joakim von Wright vom Institut für Informatik an der Åbo Akademi Turku (Finnland) in enger Zusammenarbeit mit den Mitgliedern des Turku-Centre-for-Computer-Science entwickelt (Back, 2016, S. iii f). Dabei wurde besonders auf die Möglichkeit einer computerunterstützten Anwendung geachtet (Back, 2015, S. 2, und Back & Bos & Eriksson, 2007). Nach ihrer Einführung in die akademische Lehre wurden zwischen August 2001 und Mai 2004 ihre Einsatzmöglichkeiten im gymnasialen Mathematikunterricht getestet (Peltomäki & Salakoski, 2004, S. 118). Die empirischen Evaluationen fielen positiv aus (siehe Back & Mannila & Wallin, 2010, Peltomäki & Back, 2009, und Peltomäki & Salakoski, 2004). Ferner wurde die Methode in einer Vielzahl von Fortbildungskursen für Lehrkräfte präsentiert. Im Rahmen des von 2011 bis 2013 durchgeführten EU-Projektes

[1] Pädagogische Hochschule Burgenland, Thomas-Alva-Edison-Straße 1, 7000 Eisenstadt.
Korrespondierender Autor. E-Mail: alexander.zimmermann@ph-burgenland.at

E-Math wurde sie weiterentwickelt und an mehreren Gymnasien in Finnland, Schweden und Estland erprobt.[2] Einerseits lernten die Schüler und Schülerinnen schnell, wie man das Format der *structured derivations* in eigene Lösungswege integriert, andererseits schätzten sie die zusätzliche Klarheit, die sie durch den Einsatz dieser Methode gewannen. Insgesamt zeigten sich bei Anwendung dieser Methode deutliche Leistungsverbesserungen in Mathematikkursen (Back, 2015, S. 3; siehe auch Back & Peltomäki & Salakoski & von Wright, 2004, S. 115 ff, und Peltomäki & Back, 2009). Anschließend wurde begonnen, eine neue, auf der Methode der *structured derivations* basierende und alle Schulstufen des gymnasialen Mathematikunterrichts umfassende Lehrbuchreihe zu entwickeln (Back, 2015, S. 3).

In Österreich wurde diese Methode 2009 im Rahmen des vom Institut für Softwaretechnologie der Technischen Universität Graz, der Pädagogischen Hochschule Steiermark[3] und dem Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur[4] organisierten Seminars namens „Begründungs-orientierter Mathematik-Unterricht" vorgestellt und diskutiert (Neuper, 2020). Da der Einsatz dieser Methode Schüler und Schülerinnen bei der Entwicklung ihrer mathematischen Argumentationsfähigkeiten zu unterstützen scheint, wodurch u. a. der von vielen Studienanfängern und Studienanfängerinnen als schwer bewältigbar empfundene Wechsel von der Schul- zur Universitätsmathematik erleichtert werden könnte, und da die Methode der *structured derivations* seit 2009 vor allem in Finnland weiterentwickelt wurde, sie in Österreich allerdings noch nicht hinreichend bekannt ist, soll sie in dieser Abhandlung nochmals vorgestellt werden. Eine ausführliche kritische Untersuchung dieser Methode wird in einem eigenen Artikel erfolgen.

2 Motivation

Eine wichtige Aufgabe des Mathematikschulunterrichts ist die Förderung und Schulung im mathematischen Argumentieren. So sieht der aktuelle Lehrplan für Mathematik an den allgemeinbildenden höheren Schulen Österreichs vor, dass

„in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten [durchgeführt werden sollen] [...];
- durch das Benutzen entsprechender Arbeitstechniken, Lernstrategien und heuristischer Methoden Lösungswege und -schritte bei Aufgaben und Problemstellungen [geplant] und in der Durchführung [erprobt werden sollen];" (Lehrplan, 2020)

Ferner seien folgende „mathematische Grundtätigkeiten" zu entwickeln, wofür der Einsatz der Methode der *structured derivations* hilfreich sein könnte:

„Argumentieren und exaktes Arbeiten, insbesondere: präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (Definieren); Arbeiten unter bewusster Verwendung von Regeln;
Begründen (Beweisen); Arbeiten mit logischen Schlussweisen;
Rechtfertigen von Entscheidungen (etwa der Wahl eines Lösungsweges oder einer Darstellungsform)." (Lehrplan, 2020)

Außerdem zeigen empirische Erhebungen, dass die Studienabbrecherquoten im Studienfach Mathematik und in mathematiknahen Studienfächern vergleichsweise hoch sind (Lumpe, 2019, S. 178, und Hetze, 2011, S. 15). Insbesondere scheint der Wechsel von der Schul- zur Universitätsmathematik vielen Studierenden teils erhebliche Schwierigkeiten zu bereiten, wovon nicht nur Studierende des Studienfaches Mathematik, sondern auch jene anderer MINT-Fächer[5] betroffen sind. Beispielsweise schreibt Hetze (2011):

[2] E-Math war ein von der EU im Rahmen des Programms Central Baltic Interreg IV A 2007-2013 finanziertes EU-Projekt mit dem Ziel, die Motivation für und die Kompetenzen in Mathematik zu erhöhen. Das Projekt umfasste sechs Partner: die Städte Turku (federführender Partner), Tallinn, Stockholm und Mariehamn sowie die Åbo Akademi und die Universität Turku. Projektleiter war Ralph-Johan Back (E-Math, 2020, und Hägerstedt & Mannila & Salakoski & Back, 2015, S. 175).
[3] Näherhin deren Institut 6 für Berufspädagogik – Fort- und Weiterbildung.
[4] Näherhin dessen Abt. II/6 LehrerInnen-Aus- und -Weiterbildung für berufsbildende Schulen.
[5] Der Ausdruck >MINT< steht für den Ausdruck >Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik<.

„*Erfolgreiche Absolventen studierten in MINT-Fächern nicht länger als in anderen Studiengängen. Jedoch ist die Abbruchquote hier überdurchschnittlich hoch. Mit 28 Prozent Studienabbrechern eines Studienanfängerjahrganges liegen die MINT-Fächer weit über den Zahlen anderer Fächer. Im Schnitt sind es 20 Prozent, die eine Universität ohne Abschluss verlassen. Der Effekt eines höheren Studienerfolgs wäre groß: Die prognostizierte Fachkräftelücke bis 2020 würde um zwei Drittel geringer ausfallen, falls sich die hohen Abbrecherquoten in den MINT-Fächern halbieren ließen.*

Eine geringere Zahl von Absolventen im Vergleich zur Zahl der Studienanfänger in einem Fach ist nicht nur auf einen Studienabbruch zurückzuführen. Zur sogenannten Schwundbilanz gehören auch diejenigen, die ihr Studienfach nach einigen Semestern wechseln. So gerechnet verlieren die MINT-Fächer auf dem Weg zum Abschluss fast 40 Prozent der Studienanfänger. Bei den rechts-, wirtschafts-, und sozialwissenschaftlichen Fächern sind es nur 25 Prozent, in der Medizin sogar nur zwei Prozent.“ (Hetze, 2011, S. 15)

Lumpe stellt in seiner Untersuchung zum Thema *Studienabbruch* aus dem Jahr 2019 fest, dass über die Hälfte der Studienanfänger und Studienanfängerinnen des Faches Mathematik ihr Studium abbrechen (Lumpe, 2019, S. 178).

„*Der Studienabbruch ist als ein multifaktorieller Prozess anzusehen, bis zu dessen Vollzug es unter Umständen Jahre dauern kann [...]. Bemerkenswert sind jedoch die Ingenieurswissenschaften, denen es gelang, die im Jahre 2010 noch bei 48 % liegende Abbruchquote auf 32 % zu reduzieren, während daneben die Quote in den Naturwissenschaften bei 39 % konstant geblieben ist. In dieser Gruppe rangiert die Mathematik mit 51 % vorn, gefolgt von der Informatik (45 %), der Chemie (42 %) und der Physik (41 %). Den geringen Durchschnittswert verursachen die Biologie mit 22 % und die Geowissenschaften mit 17 %, die ebenfalls zu den Naturwissenschaften gehören.*“ (Lumpe, 2019, S. 178)

Jedenfalls gibt es bereits Universitäten, die spezielle Programme eingeführt haben, um den hohen Abbrecherquoten in den MINT-Studienfächern entgegenzuwirken. Zwei Beispiele hierfür sind die Universität Hamburg mit dem im Jahr 2014 eingeführten Programm *MINTFIT* (MINTFIT, 2020) und die Universität Kassel mit dem zum Studienjahr 2019/20 begonnenen Bachelorstudiengang *plusMINT*, einem MINT-Studium auf Probe (plusMINT, 2020).

Ein Grund, womöglich sogar der Hauptgrund für die vergleichsweise hohen Abbrecherquoten in Mathematik und mathematiknahen Studienfächern ist der Umstand, dass mit dem Wechsel von der Schul- zur Universitätsmathematik das (deduktive) Beweisen in den Vordergrund tritt, während das bloße Rechnen in den Hintergrund rückt. Mithin verlangt die Universitätsmathematik ausreichende Fähigkeiten und Kenntnisse im systematisch-ordnenden und logisch-schließenden Denken. Angesichts der vielfältigen Schwierigkeiten, von denen Studierende bezüglich dieses Wechsels berichten, stellt sich die Frage, ob dieser Art des Denkens im Mathematikschulunterricht auch die notwendige Aufmerksamkeit zuteil wird. Eine Schulung im systematisch-ordnenden und logisch-schließenden Denken würde zudem die Fähigkeit fördern, Algorithmen zu handhaben, was beispielsweise im Bereich der praktischen Informatik wichtig ist (Fuchs & Caba, 2016, S. 6). Jedenfalls zeigen Untersuchungen in Finnland, dass die Methode der *structured derivations* hierfür vielversprechend eingesetzt werden könnte (siehe Back, 2010, Back & Mannila & Wallin 2010, Peltomäki & Back, 2009, Back & Peltomäki & Salakoski & von Wright, 2004, und Gries & Schneider, 1995). Back schreibt:

„*Mathematics is based on proofs. The proof shows the logical reasoning behind a theorem, allows us to understand the meaning of it, its limitations and its consequences. Without a proof, a theorem is like magic; with a proof it is (sometimes more, sometimes less) self evident. But proofs are considered difficult in mathematics education of today, in particular at secondary level, and are therefore often avoided in teaching. When proofs are given, they are often informal and the underlying logic is not explicated.[6]*

The purpose […] is to put forward an alternative method for teaching mathematics at secondary and tertiary level that reintroduces proofs and careful argumentation as the solid basis for mathematics education. The method, structured derivations, is essentially a format for presenting mathematical arguments (calculations, derivations, proofs, etc). The format is designed to show the overall structure of the argument, while at the same time allowing a detailed inspection of each step in the argument. The method does not put any restrictions on the mathematical domain where the argumentation is carried out, nor on the level of detail or

[6] Back meint an dieser Stelle wohl, dass weder die einzelnen Schlussregeln noch die gegebenenfalls benötigten logischen Axiome explizit angegeben werden.

mathematical rigor of the argumentation. Hence, structured derivations can be used in any area of mathematics, and at any level of education.“ (Back, 2015, S. 1)

Es ist die nachfolgend skizzierte Implementierung der Methode der *structured derivations* in das finnische Bildungssystem vorgesehen:

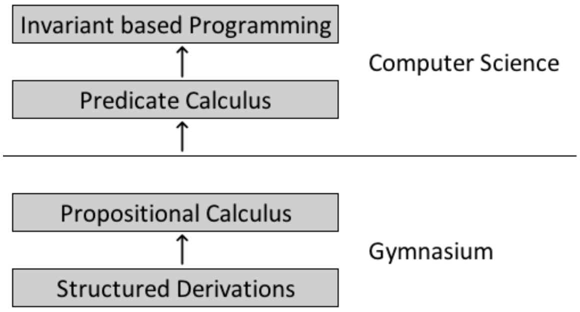

Abbildung 1: Stellung der Methode der *structured derivations*; zitiert nach (Neuper, 2020, S. 4)

Die Schüler und Schülerinnen sollen im gymnasialen Mathematikunterricht zunächst mit der Methode der *structured derivations* vertraut gemacht werden, um anschließend in einer für den gymnasialen Unterricht geeignet aufbereiteten Form eine Einführung in die Aussagenlogik zu erhalten. Für beides würde sich sowohl der Mathematik- als auch der Informatikunterricht anbieten. Wer hernach mit einem Informatikstudium beginnt, erhält sodann die nötige Ausbildung in Prädikatenlogik, welche in die Lehre über das Invariant-based-Programming mündet. Die Umsetzung dieses vierstufigen, sowohl sekundäre als auch tertiäre Bildungseinrichtungen umfassenden Aufbaus nimmt erfahrungsgemäß viele Jahre in Anspruch. Die Methode der *structured derivations* soll deshalb so lange „Gegenstand akademischer Lehre an der Abo Akademi Universität bleiben, bis die finnischen Gymnasi[en] die entsprechende Vorarbeit übernommen haben“ (Neuper, 2020, S. 4).

3 Die Methode der *structured derivations*

Back beschreibt die Methode der *structured derivations*, wobei er auch das Ergebnis einer Anwendung dieser Methode als >*structured derivation*< bezeichnet, wie folgt:

„*Structured derivations are based on a precise format for writing proofs and derivations. The method is a further development of the calculational proof style originally proposed by Edsger W. Dijkstra and his colleagues Wim Feijen, Netty van Gasteren, and Carel Scholten [...]. They present a proof in a fixed format, as a sequence of calculation steps, with an explicit justification for each step. [...] Joakim von Wright and I extended the calculational proof style to structured derivations [...]*

The primary application for structured derivations is for teaching mathematics at all levels, from junior high school to freshman courses at the university. We have tried to make the derivation style easy to read, easy to understand, easy to write and easy to check for errors. Structured derivations can be introduced in class education without much explanations, as the way the teacher prefers to write down and structure his/her own argumentation. The most important contribution of structured derivations (already present in the calculational proof style) is that each derivation step is explicitly justified. This makes it easier to follow and understand the argumentation, compared to the standard way where only selected steps are explicitly justified.“ (Back, 2015, S. 1f)

Die folgenden drei Beispiele veranschaulichen die Methode der *structured derivations*. Ihnen liegen vergleichsweise einfache Rechenaufgaben zugrunde, um die Darstellung nicht zu verkomplizieren. Außerdem wird der Grundgedanke dieser Methode bereits an einfachen Beispielen deutlich. Das erste Beispiel ist ein sehr einfaches, bei dem ausschließlich Rechenanweisungen vorkommen. Hingegen wird beim zweiten auf arithmetische Regeln bzw. Gesetze Bezug genommen. Das dritte schließlich stellt zwei verschiedene Darstellungen ein und desselben Lösungsweges einer Rechenaufgabe gegenüber, nämlich eine herkömmliche und eine unter Verwendung der Methode der *structured derivations*.

Beispiel 1: Angenommen, es sei $3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 4^2$ zu berechnen. Es könnte wie folgt vorgegangen werden: In einem ersten Schritt werden die drei Potenzen 2^3, 3^2 und 4^2 ausgerechnet. Anschließend werden die drei Produkte $3 \cdot 8$, $4 \cdot 9$ und $2 \cdot 16$, sodann die Addition $24 + 36$ und schließlich die Subtraktion $60 - 32$ berechnet (Back, 2015, S. 5f). Also:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 4^2 &= 3 \cdot 8 + 4 \cdot 9 - 2 \cdot 16 \\ &= 24 + 36 - 32 \\ &= 60 - 32 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Im Folgenden eine Formulierung dieser Aufgabe mit Hilfe der Methode der *structured derivations*:

$$\begin{array}{ll} \bullet & 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 4^2 \\ = & \{\text{calculate the powers}\} \\ & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 9 - 2 \cdot 16 \\ = & \{\text{carry out the multiplications}\} \\ & 24 + 36 - 32 \\ = & \{\text{carry out the first addition}\} \\ & 60 - 32 \\ = & \{\text{carry out the subtraction}\} \\ & 28 \\ \square & \end{array}$$

Abbildung 2: Darstellung eines einfachen Beispiels unter Verwendung der Methode der *structured derivations*[7]; zitiert nach (Back, 2015, S. 5)

Back schreibt dazu:

„The solution is the same as above, but now each step is justified explicitly. A justification is written on separate line and is enclosed in curly brackets. The justification explains why equality holds between the expressions on the previous line and the next line [...] The two column format is used throughout in structured derivations. The bullet "●" indicates the start of the calculation, and the square "□" the end of it.“ (Back, 2015, S. 5f)

Die folgende Abbildung 3 zeigt links die allgemeine Syntax zu Beispiel 1 und rechts die konkreten Einsetzungen:

$$\begin{array}{ll@{\qquad\qquad}ll} \bullet & \mathit{expression} & \bullet & 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 4^2 \\ \mathit{rel} & \mathit{justification} & = & \{\text{calculate the powers}\} \\ & \mathit{expression} & & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 9 - 2 \cdot 16 \\ \mathit{rel} & \mathit{justification} & = & \{\text{perform the multiplications}\} \\ & \mathit{expression} & & 24 + 36 - 32 \\ \mathit{rel} & \mathit{justification} & = & \{\text{perform the addition}\} \\ & \mathit{expression} & & 60 - 32 \\ \mathit{rel} & \mathit{justification} & = & \{\text{perform the subtraction}\} \\ & \mathit{expression} & & 28 \\ \square & & \square & \end{array}$$

Abbildung 3: Links: allgemeine Syntax zu Beispiel 1; rechts: die konkreten Einsetzungen; zitiert nach (Back, 2015, S. 12)

[7] Da es in diesem Beispiel keine „zweite Addition“ gibt, stiftet die Anweisung „carry out the first addition“ durchaus Verwirrung und wäre deshalb durch den Ausdruck >carry out the addition< zu ersetzen.

R&E-SOURCE https://journal.ph-noe.ac.at
Online Journal for Research and Education
Ausgabe 13, April 2020, ISSN: 2313-1640

Bei einfachen Aufgabenstellungen ist das Ergebnis einer Anwendung der Methode der *structured derivations* eine endlich lange Abfolge von Zeilen folgender Struktur und Syntax:

(1) Die erste Zeile beginnt stets mit dem Zeichen ●; rechts daneben steht – vereinfachend formuliert – entweder der zu berechnende Ausdruck oder die zu beweisende mathematische Aussage.
(2) Es folgen endlich viele Blöcke, die ihrerseits aus endlich vielen Zeilen bestehen. Unter dem Zeichen ● der ersten Zeile der Abfolge steht in der ersten Zeile eines jeden Blocks stets der Name einer binären Relation (Back, 2015, S. 20). Solche Relationen sind beispielsweise =, ≤ und ≥. Die Abkürzung >*rel*< auf der linken Seite der Abbildung 3 steht also kurz für den Ausdruck >binäre Relation<. Rechts daneben steht eine Begründung, Erklärung oder Anweisung, die mehrere Zeilen in Anspruch nehmen kann. Darunter steht der entsprechende neue mathematische Ausdruck.
(3) Die letzte Zeile besteht aus dem Zeichen □, das für die Wendung >quod erat demonstrandum< steht.

Bei anspruchsvolleren Aufgabenstellungen können Ergebnisse von Anwendungen der Methode der *structured derivations* ungleich komplexer aussehen. So können sie beispielsweise ineinander verschachtelt sein (Back, 2015, S. 50).

Beispiel 2:

$$
\begin{array}{ll}
\bullet & 2^8 + 2^7 \\
= & \{\text{the product rule: } a^m a^n = a^{m+n}\} \\
 & 2^1 \cdot 2^7 + 2^7 \\
= & \{a = 1 \cdot a\} \\
 & 2^1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^7 \\
= & \{\text{the distributive law: } (a+b)c = ac + bc\} \\
 & (2^1 + 1) \cdot 2^7 \\
= & \{\text{power rule: } a^1 = a\} \\
 & (2 + 1) \cdot 2^7 \\
= & \{\text{arithmetics: } 1 + 2 = 3\} \\
 & 3 \cdot 2^7 \\
= & \{\text{arithmetics: } 2^7 = 128\} \\
 & 3 \cdot 128 \\
= & \{\text{arithmetics: } 3 \cdot 128 = 384\} \\
 & 384 \\
\square &
\end{array}
$$

Abbildung 4: Darstellung eines etwas schwierigeren Beispiels unter Verwendung der Methode der *structured derivations*; zitiert nach (Back, 2015, S. 17)

Daran anschließend schreibt Back: „Here every step is justified by an explicit rule. This is a suitable level of detail when the purpose is to illustrate the rules for manipulating arithmetic expressions in a more axiomatic context.“ (Back, 2015, S. 17) Während Beispiel 1 einen Lösungsweg zeigt, im Zuge dessen das Ergebnis Schritt für Schritt ausgerechnet werden kann, wird das Beispiel 2 nicht dadurch gelöst, dass zunächst – vermutlich mit Hilfe eines Taschenrechners – die beiden Potenzen 2^8 und 2^7 und anschließend die entsprechende Addition einfach ausgerechnet werden. Vielmehr wird die Aufgabenstellung unter Verwendung von Rechengesetzen Schritt für Schritt vereinfacht, um zu einer leichter lösbaren Aufgabe zu gelangen.

Die Methode der *structured derivations* sieht vor, dass für jeden einzelnen Übergang von einem Term zum nächsten oder von einer Formel zur nächsten an der entsprechenden Stelle eine Anweisung (vgl. Abbildung 2) oder eine Begründung (vgl. Abbildung 4) angeführt wird. Jeder Übergang von einem Ausdruck zum nächsten ist also mit einer Anweisung, einer Erklärung oder einer Begründung zu versehen. In der Schule werden sich die angeführten Begründungen dem Lehrplan entsprechend auf Rechengesetze, Rechenregeln und dergleichen beschränken, auf universitärem Niveau hingegen werden es Axiome, Definitionen und bereits bewiesene Theoreme sein. Entscheidend ist, dass das Ergebnis eine Rechnung oder ein Beweis ist, bei der bzw. bei dem lückenlos alle Schritte von der Aufgabenstellung bis hin zur Lösung mit angemessenen Anweisungen, Erklärungen oder Begründungen versehen sind, um sich ihrer klar und deutlich bewusst zu werden. Diese werden im Mathematikschulunterricht häufig nicht schriftlich angegeben, sondern bloß mündlich mitgeteilt oder schlicht in Gedanken vollzogen.

Beispiel 3: Das folgende Beispiel stellt eine herkömmliche Darstellungsweise eines Lösungsweges einer Rechenaufgabe einer unter Zuhilfenahme der Methode der *structured derivations* gegenüber. Angenommen, es sei *tan(*17π/3) zu berechnen. Zunächst eine herkömmliche Darstellung:

$$\begin{aligned}\tan\tfrac{17\pi}{3} &= \tan(\tfrac{6\cdot 2\pi+5\pi}{3})\\ &= \tan(2\cdot 2\pi+\tfrac{5\pi}{3})\}\\ &= \tan\tfrac{5\pi}{3}\\ &= \tan(2\pi-\tfrac{\pi}{3})\\ &= -\tan\tfrac{\pi}{3}\\ &= -\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\square$

Abbildung 5: Eine übliche Darstellung eines Lösungsweges; zitiert nach (Back, 2015, S. 8)

Nun eine Darstellung desselben Lösungsweges zur Berechnung des Funktionswertes von *tan(*17π/3) mittels der Methode der *structured derivations*:

$$\begin{aligned}\bullet\ \ & \tan\tfrac{17\pi}{3}\\ =\ \ & \{\text{factor out } 2\pi\}\\ & \tan(\tfrac{6\cdot 2\pi+5\pi}{3})\\ =\ \ & \{\text{write the angle in the form } n\cdot 2\pi+\alpha\}\\ & \tan(2\cdot 2\pi+\tfrac{5\pi}{3})\}\\ =\ \ & \{\text{we can ignore full circles } 2\pi\}\\ & \tan\tfrac{5\pi}{3}\\ =\ \ & \{\text{the angle is in the fourth quadrant, so we can write it in the form } 2\pi-\alpha_0\\ & \text{where } \alpha_0 \text{ is between } 0^\circ \text{ and } 90^\circ\}\\ & \tan(2\pi-\tfrac{\pi}{3})\\ =\ \ & \{\text{ignore full circles, } \tan(-\tfrac{\pi}{3})=-\tan(\tfrac{\pi}{3})\}\\ & -\tan\tfrac{\pi}{3}\\ =\ \ & \{\text{this is a } 30-60-90 \text{ triangle}\}\\ & -\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\square$

Abbildung 6: Eine Darstellung desselben Lösungsweges unter Verwendung der Methode der *structured derivations*; zitiert nach (Back, 2015, S. 8)

Abbildung 5 zeigt eine übliche Darstellung eines Lösungsweges, in der nacheinander die einzelnen Identitätsaussagen notiert werden. Im Gegensatz dazu zeigt Abbildung 6 eine Argumentation, die Schritt für Schritt begründet bzw. mit einer Anweisung versehen ist. Zwar sind sowohl die Ergebnisse der Rechenaufgabe als auch die Rechenwege dieselben, jedoch sind die einzelnen Begründungen bzw. Anweisungen nur in der in Abbildung 6 angeführten Argumentation verschriftlicht, was diese im Vergleich zur in Abbildung 5 gezeigten wesentlich schneller, leichter und auch klarer nachvollziehbar macht. Die Methode der *structured derivations* hilft offensichtlich dabei, das Hauptaugenmerk im Mathematikschulunterricht nicht mehr auf das Ergebnis einer Aufgabe, sondern auf die Entwicklung der Fähigkeit, einsichtige und lückenlose Argumentationen bezüglich einer mathematischen Fragestellung erstellen zu können, zu legen.

4 Kritische Bemerkungen

Aus den Beispielen in Abschnitt 3 ergeben sich u. a. die folgenden kritischen Bemerkungen zur Methode der *structured derivations*. Eine ausführliche kritische Auseinandersetzung wird in einer eigenen Abhandlung erfolgen.

(1) Es wird deutlich, dass Back den Ausdruck >*structured derivations*< doppeldeutig verwendet. Denn mit >*structured derivations*< bezeichnet er einerseits die Methode als solche und andererseits das Ergebnis einer Anwendung dieser Methode, also eine Abfolge von Zeilen von oben beschriebener Struktur und Syntax.

(2) Die Verwendung geschweifter Klammern zur syntaktischen Kenntlichmachung der Anweisungen, Erklärungen und Begründungen erscheint aus didaktischer Sicht etwas unglücklich. Denn diese Klammern werden in der Mathematik üblicherweise zur Bezeichnung von Mengen gebraucht.

(3) Ferner mag die Positionierung der Anweisungen, Erklärungen und Begründungen unmittelbar rechts neben dem Identitätszeichen auf den ersten Blick etwas verwirrend sein. Denn genau genommen müsste sowohl unmittelbar links als auch unmittelbar rechts dieses Zeichens ein mathematischer Term stehen. Wer sich jedoch öfters mit der Methode der *structured derivations* beschäftigt, wird sich an dieser Syntax vermutlich kaum stören. Vielmehr ist die stets mehr oder weniger gleiche optische Gestaltung des Ergebnisses einer Anwendung der Methode der *structured derivations* nach einer gewissen Eingewöhnungszeit für das Auge mitunter sogar hilfreich.

(4) Bei einfachen Beispielen wie dem Beispiel 1 mag es unnütz und ungebührend zeitraubend, vielleicht sogar ablenkend erscheinen, die Begründung eines jeden Schrittes zu identifizieren und darüber hinaus auch zu notieren. Bei einfachen Aufgaben scheint eine Anwendung dieser Methode also schwerfällig und umständlich zu sein. Doch spätestens beim Lösen komplexer oder anspruchsvoller Aufgabenstellungen kann sie ihr volles Potential ausschöpfen. Jedenfalls wird durch die Methode der *structured derivations* das Suchen, Identifizieren und Formulieren von Begründungen gezielt trainiert, zunächst bei einfachen, später bei schwierigeren Aufgabenstellungen.

(5) Diese Methode kann auch das analytische Denken fördern, bei dem eine zu lösende Aufgabe möglichst geschickt in solche Teilaufgaben zergliedert wird, die jeweils einfacher zu lösen sind als die ursprüngliche Aufgabe. Es ist zu beachten, dass die Methode der *structured derivations* weder das mündliche Mitteilen mathematischer Begründungen noch das Vollziehen von Schlüssen oder Rechenschritten in Gedanken künftig ersetzen soll. Vielmehr soll es die Schüler und Schülerinnen im Entwickeln ihrer mathematischen Argumentationsfähigkeiten und ihres analytischen Denkvermögens unterstützen. Mithin ist anhand entsprechender Studien zu prüfen, ob und inwiefern die Aufnahme der Methode der *structured derivations* in den Methodenkorpus der modernen Schulmathematikdidaktik eine Bereicherung wäre. Schließlich zeigen – wie in der Einleitung bereits erwähnt – empirische Evaluationen diesbezüglich positive Ergebnisse.

(6) Genau genommen ist der Satz >Here every step is justified by an explicit rule.<, also der erste Satz des nach der Abbildung 4 angeführten Zitats, nicht richtig. Denn:

- Es wird nicht jeder Rechenschritt expliziert. So fehlt der Schritt von $2^8 + 2^7$ auf $2^{1+7} + 2^7$, um anschließend auf $2^1 \cdot 2^7 + 2^7$ zu schließen. Aber erst dieser Schritt macht die Anwendungsmöglichkeit des Distributivgesetzes augenscheinlich.
- Zwar werden bei diesem Beispiel fast alle Rechenschritte expliziert, jedoch nicht die logischen. Beispielsweise wird die Transitivität der Identitätsrelation mehrmals stillschweigend gebraucht. Es kommen aber noch weitere Voraussetzungen stillschweigend zur Anwendung. So ist nämlich „{arithmetics: 1 + 2 = 3}“ angegeben, benötigt wird aber {arithmetics: 2 + 1 = 3}. Mithin wird die Kommutativität der Additionsfunktion stillschweigend vorausgesetzt. Auch wird die Symmetrie der Identitätsrelation zweimal verwendet, ohne darauf ausdrücklich hinzuweisen. Denn es wird beispielsweise nicht $a^m a^n = a^{m+n}$, sondern $a^{m+n} = a^m a^n$ benötigt; und anstelle von >$(a + b)c = ac + bc$< müsste es >$ac + bc = (a + b)c$< heißen. Der Grad an Begründungsexaktheit ließe sich also

durchaus erhöhen, führte aber zu einem wesentlich mehr Zeilen umfassenden Ergebnis dieser Anwendung der Methode der *structured derivations* als dem in Abbildung 4 gezeigten.

Zwar erweist sich also bei näherer Betrachtung des Beispiels die Behauptung, jeder Schritt werde durch eine explizit angegebene Regel begründet, als falsch, dennoch werden die sich durch eine Anwendung dieser Methode eröffnenden Chancen, nämlich die Schüler und Schülerinnen hinsichtlich ihrer Fähigkeiten im mathematischen Argumentieren zu fördern und zu schulen, deutlich. Es geht also nicht darum, auf möglichst schnellem Wege ein Ergebnis zu erzielen, sondern Schritt für Schritt einen geordneten und begründeten Rechenweg zu entwickeln, zu formulieren und zu verschriftlichen. Abschließend sei betont, dass die Verwendung der Methode der *structured derivations* zum Ausrechnen von $2^8 + 2^7$ obigen Rechenweg nicht aufzwingt. Vielmehr lässt sie auch andere zu.

(7) Die Methode der *structured derivations* fördert also beim Lösen von Aufgaben ein Vorgehen, das als >argumentationsorientiert< bezeichnet werden kann. Mithin unterstützt diese Methode weniger einen ergebnisorientierten als vielmehr einen argumentationsorientierten Mathematikunterricht in der Schule. Dadurch aber hilft sie im Rahmen des Schulunterrichts beim Sichtbarmachen jener strengen Methodik, die seit Euklids *Elementen* die Mathematik auszeichnet, nämlich der axiomatischen. Ein Wissensgebiet wird erst durch eine Axiomatisierung streng hinsichtlich der Grund-Folge-Relation, also im höchsten Maße systematisch geordnet. Die Methode der *structured derivations* fördert also einen Wandel des Mathematikschulunterrichts von einem ergebnisorientierten hin zu einem argumentationsorientierten Unterricht. Die Fähigkeit, lückenlose und plausible, idealerweise sogar logisch schlüssige Argumentationen zu verfassen, ist aber nicht nur für eine Auseinandersetzung mit der Mathematik, sondern für fast alle Lebensbereiche wichtig.

(8) Die Methode der *structured derivations* eröffnet neue Differenzierungsmöglichkeiten im schulischen Mathematikunterricht. Dazu zwei Beispiele:
- Der zu erzielende Grad an Begründungsexaktheit kann dem Leistungsvermögen der Schüler und Schülerinnen angepasst werden, wobei dieser Grad angibt, wie genau eine Argumentation aus mathematischer (und logischer) Sicht ist. Während etwa leistungsschwache Schüler und Schülerinnen bloß in der Lage sein müssen, für ihre Lösung einer Aufgabe einen niedrigen Grad an Begründungsexaktheit anzugeben, haben leistungsstarke einen hohen Grad zu erarbeiten. Beispielsweise müssen letztere von jeder benötigten Relation sämtliche Eigenschaften, die sie in ihrem Lösungsweg verwenden, anführen (wie etwa die Transitivität der Identitätsrelation; vgl. Punkt 6). Leistungsschwachen Schülern und Schülerinnen wird dies nicht abverlangt.
- Eine Klasse bekommt die Aufgabe, anhand der Methode der *structured derivations tan(*17π/3) auszurechnen. Allerdings erhält ein Teil der Klasse als Hilfe zusätzlich einige – womöglich sogar alle – der erforderlichen Rechenanweisungen, Erklärungen und Begründungen; dem anderen Teil der Klasse wird diese Unterstützung verwehrt.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde eine in Finnland entwickelte Unterrichtsmethode zur Förderung der Kompetenz im mathematischen Argumentieren vorgestellt, nämlich die Methode der *structured derivations*. Eine ausführliche kritische Untersuchung dieser Methode wird in einer eigenen Abhandlung erfolgen. Gemäß dieser Methode ist jeder Schritt einer Rechnung oder eines Beweises mit einer Begründung, einer Erklärung oder einer Anweisung zu versehen. Mithin wird jeder Rechen- und Beweisschritt auch sichtbar gemacht. Dadurch wird eine klar strukturierte Vorgehensweise beim Lösen einer Aufgabe eintrainiert. Empirische Evaluationen über den Einsatz dieser Methode im Unterricht weisen auf eine vielversprechende Wirkung hin, insbesondere im Hinblick auf die Entwicklung mathematischer Argumentationsfähigkeiten. Daher sollte der Einsatz der Methode der *structured derivations* auch in Österreich eingehend getestet und (empirisch) evaluiert werden. Unter anderem ist zu prüfen, ob und inwiefern diese Methode die Argumentationsfähigkeiten nicht nur bezüglich mathematischer Fragestellungen, sondern auch darüber hinaus fördert und schult. Ferner gilt es zu untersuchen, ob und inwiefern sie das logisch-schließende und systematisch-ordnende Denken fördert, insbesondere im Zusammenhang zwischen bloßen Schlussfolgerungen und (echten) Begründungen.[8]

[8] Zum Verhältnis von deduktiven Begründungen zu bloßen deduktiven Argumenten siehe (Zimmermann & Kleinknecht & Dorn, 2020).

Literatur

Back, R.-J. (2010). Structured Derivations: a Unified Proof Style for Teaching Mathematics. *Formal Aspects of Computing, 22 (5)*, 629-661.

Back, R.-J. (2015). Structured Derivations: Teaching Mathematical Reasoning in High School. Four Ferries Publishing Turku.

Back, R.-J. (2016). Introduction to Structured Derivations. Four Ferries Publishing Turku.

Back, R.-J., Bos, V. & Eriksson. J. (2007). MathEdit: Tool Support for Structured Calculational Proofs. TUCS Technical Report No. 854, December 2007. Turku Centre for Computer Science Turku

Back, R.J., Mannila, L. & Wallin, S. (2010). "It Takes Me Longer, but I Understand Better" – Student Feedback on Structured Derivations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41 (5)*, 575-593

Back, R.-J., Peltomäki, M., Salakoski, T. & von Wright, J. (2004). Structured derivations supporting high-school mathematics. In A. Laine, J. Lavonen & V. Meisalo (Hrsg.), *Proceedings of the 20th Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association* (S. 104-122). Department of Applied Sciences of Education/University of Helsinki Helsinki.

E-Math (2020). About E-Math. Aufgerufen am 26. Januar 2020 von https://emath.eu/en/about

Fuchs, K.-J. & Caba, H. (2016). Algorithmisches/Lösungsorientiertes Denken – Eine Kernstrategie in der Praktischen Informatik in der Schule. *Schule Aktiv! CODING – Ein Baustein der informatischen Bildung*. Sonderheft des BMB (S. 6-8). CDA-Verlag Arbing.

Gries, D. & Schneider, F. B. (1995). Teaching Math More Effectively, Through Calculational Proofs. *The American Mathematical Monthly, 102 (8)*, 691-697.

Hägerstedt, E., Mannila, L., Salakoski, T. & Back, R.-J. (2015). Teacher's Experience from Using Interactive E-Books in the Classroom. In H. Silfverberg, T. Kärki & M. Hannula (Hrsg.), *Nordic research in mathematics education. Proceedings of NORMA14, Turku, June 3–6, 2014* (S. 173-183). Department of Teacher Education/University of Turku Turku.

Hetze, P. (2011). Nachhaltige Hochschulstrategien für mehr MINT-Absolventen, 2. aktualisierte Auflage. Stifterverband für die Deutsche Wirtschaft Essen.

Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen in Österreich (2020). Aufgerufen am 26. Januar 2020 von https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568

Lumpe, M. (2019). Studienabbruch in den MINT-Fächern. Fallstudien an der Universität Potsdam und mögliche Folgerungen. In W. Schubarth, S. Mauermeister, F. Schulze-Reichelt & A. Seidel (Hrsg.), *Alles auf Anfang! Befunde und Perspektiven zum Studiengang* (S. 177-192). Universitätsverlag Potsdam Potsdam.

MINTFIT (2020). Universität Hamburg. Aufgerufen am 26. Januar 2020 von https://www.mintfit.hamburg/

Neuper, W. (2020). Begründungs-orientierter Mathematik-Unterricht. Institut für Softwaretechnologie/ TU Graz Graz. Aufgerufen am 26. Januar 2020 von https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjj2J3Xy6HnAhWi-wAIHHdadAPEQFjAAegQIARAB&url=http%3A%2F%2Fwww.ist.tu-graz.ac.at%2Fprojects%2Fisac%2Fpubl%2Fback-resume-09.pdf&usg=AOvVaw0k8Mn7CrSQbToZvzNCqkav

Peltomäki, M. & Salakoski, T. (2004). Strict logical notation is not a part of the problem but a part of the solution for teaching high-school mathematics. In A. Korhonen & L. Malmi (Hrsg.) *Proceedings of the Fourth Finnish/Baltic Sea Conference on Computer Science Education* (S. 116-120). Department of Computer Science and Engineering/Helsinki University of Technology Helsinki.

Peltomäki, M. & Back, R.-J. (2009). An Empirical Evaluation of Structured Derivations in High School Mathematics. *19th ICMI Study Conference on Proof and Proving in Mathematics Education*, Taipeh.

plusMINT (2020). Universität Kassel. Aufgerufen am 26. Januar 2020 von https://www.uni-kassel.de/uni/studium/bachelorstudium/plusmint-bachelor/

Zimmermann, A., Kleinknecht, R. & Dorn, G. J. W. (2020). Grounding from a Syntactic Point of View: A Sentential-Logical Approach. *Erkenntnis*, https://doi.org/10.1007/s10670-019-00215-1