

GeoGebra - Bücher

Chancen für eigenverantwortliches Arbeiten im Mathematikunterricht

Hubert Pöchtrager*

Zusammenfassung

Die besonderen Herausforderungen durch die wachsende Heterogenität in den Klassenzimmern und die Kompetenzorientierung erfordern eine Neuorientierung im Hinblick auf die Unterrichtskonzepte. GeoGebra-Bücher ermöglichen in digitalen Arbeitsblättern eigenverantwortliches Erarbeiten von neuem Lehrstoff und eigenständige Entdeckungen. In vielfältiger multimedialer Form wird so Zugang zu neuen Lerninhalten geschaffen. In einem jahrelangen Entwicklungsprozess, begleitet durch Unterrichtsbeobachtungen im Mathematikunterricht der eigenen Klassen, sind eine Vielzahl von didaktisch aufbereiteten digitalen Arbeitsbüchern entstanden, die auf der GeoGebra-Materialienplattform öffentlich zur Verfügung stehen und im folgenden Beitrag kurz vorgestellt werden.

Schlüsselwörter:

Heterogenität
 Eigenverantwortliches Lernen
 Unterrichtsmaterialien

1 Einleitung

„Dieser unserer Didaktik Hauptplan sei folgender: Eine Anweisung zu suchen und zu finden, wie die Lehrenden weniger lehren, die Lernenden aber mehr lernen; Schulen weniger Lärm, Widerwillen und vergebliche Arbeit, aber mehr Muße, Vergnügen und tüchtigen Fortschritt zeigen...“ (Comenius, 1657, zitiert nach Faulstich, 2003, S.1)

Die geänderten Rahmenbedingungen des Unterrichts zwingen uns dazu, die von Johann Amos Comenius in seiner „Magna Didactica“ vor mehr als 350 Jahren verschriftlichen Gedanken, durch Veränderung der Unterrichtsgestaltung umzusetzen. Schülerinnen und Schüler unterscheiden sich nicht nur hinsichtlich ihrer Begabungen und des Leistungsniveaus, sondern auch hinsichtlich Motivation, Lerntempo, Konzentrationsvermögen, Selbstkonzept, Organisiertheit und Arbeitshaltung. Daneben gibt es auch noch schulexterne Heterogenitätsaspekte wie sozialer Hintergrund und sprachliche Voraussetzungen (vgl. Leuders & Prediger, 2016, S. 24). Aber neben der Heterogenität gilt es auch noch andere Faktoren bei der Gestaltung von erfolgreichem Mathematikunterricht zu berücksichtigen:

- Kinder denken anders, als Erwachsene es von ihnen erwarten. Auf Grund von Erfahrungen mit wöchentlichen Denksportaufgaben kann festgehalten werden, dass Lösungsansätze von Schülerinnen und Schülern sich wesentlich von den eigenen unterscheiden.
- Kompetenzentwicklung wird gefördert, wenn Lernwege (z. B. Konstruktionsgänge oder Herleitung von Lehrsätzen) mit Anleitungen beliebig oft wiederholt werden können.
- Schnelles Feedback ist nicht nur wichtig um Fehlvorstellungen zu korrigieren, sondern auch ein wesentlicher Aspekt zur Aufrechterhaltung der Lernmotivation. Bruder (2014, S. 144f) hebt in diesem Zusammenhang die Bedeutung von individuellem Kompetenzerleben (Heureka – ich hab’s gefunden) hervor, das wiederum zum Weiterlernen motiviert. Feedback zählt auch in der Studie von Hattie zu jenen Merkmalen des Unterrichts, die als besonders lernwirksam betrachtet werden (vgl. Lotz & Lipowsky, 2015, S. 103)
- Die Lernumgebung selbst soll motivierend sein.

* Pädagogische Hochschule Oberösterreich, Huemerstraße 3-5, 4020 Linz.

Korrespondierender Autor. E-mail: hubert.poechtrager@ph-ooe.ac.at

- Die kognitive Aktivierung der Lernenden gilt als wesentlicher Aspekt von erfolgreichem Unterricht (vgl. Lotz & Lipowsky, 2015, S. 105)

Der nächste Abschnitt beleuchtet die pädagogische Bedeutung von eigenverantwortlichem Arbeiten.

2 Eigenverantwortliches Lernen

Lernen wird heute als individueller Prozess verstanden, der in das Spannungsfeld zwischen Instruktion der Lernenden durch die Lehrenden und der Konstruktion eigenen Wissens eingebettet ist. Das bedeutet aber auch für die Schülerinnen und Schüler die Übernahme von Verantwortung für den eigenen Wissenserwerb und die Bereitschaft zu konstruktiver Selbsttätigkeit, um die gesteckten Ziele zu erreichen. Von Jean Jaques Rousseau über Reformpädagogen wie John Dewey, Georg Kerschensteiner und Johannes Kühnel haben sich viele Pädagogen mit der Bedeutung der Selbsttätigkeit im Lernprozess beschäftigt (vgl. Weigand & Weth, 2002, S. 33).

„Beibringen, darbieten, übermitteln sind [...] Begriffe der Unterrichtskunst vergangener Tage. [...] Wohl soll der Schüler auch künftig Kenntnisse und Fertigkeiten gewinnen – wir hoffen sogar: noch mehr als früher – aber wir wollen sie ihm nicht beibringen, sondern er soll sie sich erwerben.“ (Kühnel 1916, zitiert nach Krauthausen & Scherer 2007, S. 114)

Lernen ist eine individuelle Konstruktionsleistung jedes Lernenden (vgl. Jank & Meyer 2002, S. 286) und Lernen passiert nur in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler. Gelernt wird nicht durch Konsum, sondern durch Interaktion (vgl. Röll, 2003, S. 155). Langfristiges Lernen kann ohne Erwerb von Einsichten nicht erfolgreich sein. Leuders und Prediger (2016, S. 10) betonen die Bedeutung von inhaltlichem Verstehen, weil Verständnisdefizite individuelle Lernchancen verbauen und das Weiterlernen erschweren. Die Reproduktion von angelernten „Rechenrezepten“ führt nur zu kurzfristigen Scheinleistungen. Selbständiges Erarbeiten ist immer gekoppelt mit Einbindung bzw. Umstrukturierung von eigenem Wissen. Wegen der emotionalen Beteiligung der Lernenden darf davon ausgegangen werden, dass die erarbeiteten Inhalte länger verfügbar sind (vgl. Winter, 1989, S. 1). Lernszenarien, die nach didaktischen Grundsätzen aufgebaut sind, ermöglichen angeleitetes eigenverantwortliches Lernen im eigenen Arbeitstempo mit Feedback nach jedem Lernschritt.

„Ein Lernpfad ist eine internetbasierte Lernumgebung, die mit einer Sequenz von aufeinander abgestimmten Arbeitsaufträgen strukturierte Pfade durch interaktive Materialien (z. B. Applets) anbietet, auf denen Lernende handlungsorientiert, selbsttätig und eigenverantwortlich auf ein Ziel hin arbeiten.“ (Roth, J. et al., 2015, S. 8)

Qualitätskriterien für Lernpfade sind (vgl. Roth, 2015, S. 13) die Orientierung an die Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler, das Ausmaß der kognitiven Aktivierung der Lernenden, die korrekte fachliche Strukturierung und die Benutzerfreundlichkeit. Der Medieneinsatz soll zieladäquat sein (wo liegt der didaktische Mehrwert?). Lernpfade sollen auch Angebote für Lehrkräfte sein, sie im eigenen Unterricht zu verwenden.

3 Lernen mit GeoGebra-Büchern

3.1 Was sind GeoGebra-Bücher?

GeoGebra Bücher sind Sammlungen von interaktiven Arbeitsblättern auf der Materialienplattform von GeoGebra (<https://geogebra.org/materials>). Nach dem Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen (Wittmann, 1981, S. 91) wird Wissen leichter behalten, wenn es in verschiedenen Darstellungsformen (enaktiv durch konkretes Handeln, ikonisch, symbolisch) erworben wird. Konkret gehandelt wird durch Verändern von Objekten mit der Maus, mit dem Finger am Touchscreen von Tablets und Smartphones (vgl. Kimeswenger & Hohenwarter, 201, S. 176f), aber auch durch Videoanleitungen, wie z. B. zum Falten von Vierecken. Auf diese Weise können durch Verändern, Verschieben, Drehen oder Spiegeln von Objekten neue Erkenntnisse gewonnen werden. Die bildhafte Darstellung wird durch die Geometrie App realisiert, die symbolische Darstellung in der Algebra App. Die Bücher können mit einem einfachen Autorensystem online erstellt werden. Derzeit können in die Bücher GeoGebra-Arbeitsblätter, Texte, Webinhalte (z.B. interaktive Übungen auf der Webseite

<http://learningapps.org>), Videos, Bilder, pdf-Dateien und Fragen (Multiple Choice und Wortantwort) als Lernerfolgskontrolle eingebunden werden.

Das Vorstrukturieren eines Lernweges ist auf diese Weise möglich. Interaktive Arbeitsblätter leiten zum Erforschen und Entdecken an, helfen beim Begriffslernen, bieten Konstruktionsanleitungen an oder ermöglichen einfach das Üben mit Selbstkontrolle.

3.2 Bücher für eigenverantwortliches Arbeiten

In den folgenden Unterkapiteln werden einige GeoGebra-Bücher kurz vorgestellt.

3.2.1 Dreiecke

In diesem Buch (<https://www.geogebra.org/m/xw4njYUy>) für die 6. Schulstufe werden die Schülerinnen und Schüler angeleitet, Grundlegendes zu den Dreiecken (Bezeichnung, Arten, Eigenschaften, Winkelsumme im Dreieck) zu erforschen. In weiteren Kapiteln werden Anleitungen zum Konstruieren der Dreiecke nach den Kongruenzsätzen angeboten. Die Lernenden können so, angepasst an das eigene Lerntempo, Konstruktionen schrittweise nachvollziehen und auf Papier durchführen. Das schrittweise Entwickeln des Konstruktionsgangs ist dabei beliebig oft durchführbar. Zusätzliche Dreiecke können aus den Angaben auf Papier konstruiert werden, aber für den Fall, dass der Konstruktionsgang nicht klar ist, kann auch hier wieder die Konstruktion schrittweise interaktiv durchgeführt werden. Im letzten Kapitel konstruieren die Lernenden direkt in der Geometrie App mit der Möglichkeit, die eigene Konstruktion durch Einblenden der Lösung zu überprüfen.

3.2.2 Die Welt der Drei- und Vierecke

Dieses Arbeitsbuch (<https://www.geogebra.org/m/RzsgsgR7>) bietet eine Entdeckungsreise zur Berechnung des Flächeninhalts von Drei- und Vierecken (Parallelogramm, Trapez, Deltoid bzw. Raute und Quadrat). In den ersten Abschnitten kann das notwendige Vorwissen zu den Eigenschaften der Drei- und Vierecke wiederholt oder aufgefrischt werden. Der Lernweg zum „Nachtdecken“ von Flächenformeln ist bei allen Figuren in gleicher Weise aufgebaut. Zunächst wird ein Lebensbezug hergestellt (Wo sieht man dieses Viereck?) verbunden mit der Aufforderung enaktiv bzw. anknüpfend an vorhandenes Wissen eigene Überlegungen anzustellen, wie die Flächeninhalte berechnet werden könnten. Im nächsten Schritt wird in einem Video zum Falten eines Drei- oder Vierecks angeleitet verbunden mit Fragestellungen, ehe ein weiterer Weg zum Nachtdecken angeboten wird. Die gewonnenen Erkenntnisse werden in einer kurzen Lernerfolgskontrolle überprüft, bevor die erarbeitete Formel zur Berechnung des Flächeninhalts von einer durch Zufallszahlen erzeugten Fläche verwendet wird. Zur Überprüfung der neu erworbenen Fertigkeiten kann eine pdf-Datei zu dieser Flächenform ausgedruckt werden. Die zur Berechnung des Flächeninhalts relevanten Längen müssen dabei selbst eingezeichnet und abgemessen werden.

3.2.3 Lehrsatz des Pythagoras

In diesem GeoGebra-Buch (<https://www.geogebra.org/m/xaAVwK4T>) werden Schülerinnen und Schüler zum Nachtdecken des Lehrsatzes des Pythagoras im Sinne von Hans Freudenthal angeleitet.

„Nacherfundene Kenntnisse und Fähigkeiten werden besser verstanden und schärfer eingepägt als solche, die weniger aktiv erworben wurden...“ (Freudenthal, 1973, S. 114)

Ausgehend vom 12-Knotenseil wird erforscht, welche Dreiecke entstehen können, wenn in jedem Eckpunkt ein Knoten liegen muss. Warum sind aber manche Dreiecke rechtwinklig? Durch Erforschen der Abhängigkeit der Flächeninhalte der Quadratflächen über den Dreiecksseiten wird eine Hypothesenbildung möglich. In einem einfachen Arbeitsblatt (Abbildung 1) kann durch die Aufforderung zum Verschieben des Punktes C ein „Heureka-Effekt“ (vgl. Bruder, 2015, S. 144f) erreicht werden. In weiteren Arbeitsblättern kann die Hypothese gestützt werden. In zwei geometrischen Beweisen (u.a. im Beweis von Perigal) kann durch Verschieben der Teilflächen der Kathetenquadrate in das Hypotenusenquadrat die Aussage des pythagoreischen Lehrsatzes be-„greifbar“ gemacht werden.

Bewege den Punkt C!

Berechne die Summe der
Quadratflächen über den Katheten!

Wiederhole diesen Vorgang einige Male!

Die Summe der Flächeninhalte der beiden
Kathetenquadrate beträgt immer cm^2 .

Abbildung 1: Satz des Pythagoras

Wähle das Werkzeug "Verschiebe um Vektor"
und verschiebe die Flächenteile in das Hypotenusenquadrat!

Klicke dann auf das Symbol
"Zurücksetzen" (rechts oben)!

Bewege den Punkt C und
verschiebe die Flächenteile erneut!

Abbildung 2: Interaktives Arbeitsblatt zum Beweis von Perigal

3.2.4 Weitere Bücher

Für die 5. Schulstufe wurden bereits weitere Arbeitsbücher zur Begriffsbildung zu den Lerninhalten „Gerade – Strecke – Strahl“ (<https://www.geogebra.org/m/XddTfrk4>), „Parallele, Normale und Normalabstand“ (<https://www.geogebra.org/m/ktu9P7Ub>) und „Achsensymmetrie“ (<https://www.geogebra.org/m/e6g4adXp>) ausgearbeitet. Zusätzliche Bücher gibt es zum „Satz des Thales“ (<https://www.geogebra.org/m/Vv6Psytn>) und zur „Einführung des Funktionsbegriffs“ (<https://www.geogebra.org/m/eGKyTUHk>).

Literatur

- Bruder, R. (2014). Erforschen, Explorieren, Problemlösen. In: Linneweber-Lammerskitten, H. (Hrsg.): *Mathematik Fachdidaktik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (S. 141-158). Kallmeyer/Klett, Seelze.
- Faulstich, P. (2003). "Selbstbestimmtes Lernen" - vermittelt durch Professionalität der Lehrenden. http://www.die-bonn.de/esprid/dokumente/doc-2002/faulstich02_02.pdf (zuletzt besucht 2018-04-14)
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Klett, Stuttgart.
- Jank, W. & Meyer H. (2002). *Didaktische Modelle* (5. Aufl.). Cornelsen, Berlin.
- Kimeswenger, B. & Hohenwarter M. (2015). Interaktion von Darstellungsformen und GeoGebraBooks für Tablets. In: Roth, J., Süß-Stepancik, E. & Wiesner, H. (Hrsg.): *Medienvielfalt im Mathematikunterricht, Lernpfade als Weg zum Ziel*. Springer Spektrum, Wiesbaden.
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- Leuders, T. & Prediger, S. (2016). *Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht*. Cornelsen, Berlin.
- Lotz, M. & Lipowsky, F. (2015). Die Hattie-Studie und ihre Bedeutung für den Unterricht – Ein Blick auf ausgewählte Aspekte der Lehrer-Schüler-Interaktion. In Mehlhorn, G., Schulz F. & Schöppe K. (Hrsg.): *Begabungen entwickeln & Kreativität fördern* (S. 97–136). kopaed, München.
- Roth, J. (2015). Lernpfade – Definition, Gestaltungskriterien und Unterrichtseinsatz. In: Roth, J., Süß-Stepancik, E. & Wiesner, H. (Hrsg.): *Medienvielfalt im Mathematikunterricht, Lernpfade als Weg zum Ziel*. Springer Spektrum, Wiesbaden.
- Röll, F. J. (2003). *Pädagogik der Navigation, Selbstgesteuertes Lernen durch Neue Medien*. Kopaed, München
- Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002) *Computer im Mathematikunterricht*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblick in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Vieweg, Braunschweig.
- Wittmann, E. C. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg, Braunschweig.