R&E-SOURCE http://journal.ph-noe.ac.at
Open Online Journal for Research and Education
ISSN: 2313-1640

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

Vom Testen zum (kompetenten) Lernen im Mathematikunterricht

Stefan Götz[*], *Evelyn Süss-Stepancik*[†]

Zusammenfassung

In der aktuellen fachdidaktischen Diskussion zeigt sich immer stärker die Notwendigkeit einer Differenzierung zwischen Lern- und Testaufgaben im Mathematikunterricht. Kompetenzorientierte Aufgaben, die als Testaufgaben formuliert sind, können auch den Übungsalltag bereichern, wenn sie entsprechend adaptiert werden. In diesem Beitrag sollen dazu probate Techniken präsentiert und an Beispielen demonstriert werden.

Schlüsselwörter:	*Keywords:*
Testaufgaben	Test Items
Lernaufgaben	Study Tasks
Mathematikunterricht	Mathematics Instruction

1 Einleitung

Dieser Beitrag ist eine Weiterführung des Artikels von George et al. (2016), der sich für den Mathematikunterricht auf die Primarstufe bezieht. Die grundlegende Idee ist, aus Testaufgaben Lernaufgaben zu generieren, um einerseits auch in der Übungsphase des Unterrichts Kontexte von Testungen miteinzubeziehen und andererseits dem oft von außen herangetragenen Druck, im Unterricht ausschließlich oder zumindest vor allem auf bevorstehende Prüfungen vorzubereiten („teaching to the test"), den Wind aus den Segeln zu nehmen. Testaufgaben sind im Allgemeinen nach einem aufwendigen Verfahren entwickelt worden (George et al., 2016, S. 72), sie zeichnen sich durch eine präzise Beschreibung ihrer Funktion in der mathematischen (Aus-)Bildung aus (vgl. Abschnitt 2.1).

Mathematikunterricht besteht aber nicht nur aus Prüfungsvorbereitung. Für das Fach wesentliche Elemente wie Kreativität oder Problemlösung müssen in passenden Lernumgebungen realisiert werden, die sich wesentlich von Prüfungssituationen unterscheiden. Produktive Lernumgebungen tragen zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts in sich. Sie bieten Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten von Schülern und Schülerinnen (Wittmann, 1998, S. 337). Schon die Begriffsbildung mathematischer Konzepte verlangt einerseits eine Hinführung zur Abgrenzung (Definition), andererseits aber ein Studium der Eigenschaften und Konsequenzen, die eine solche Konzeption mit sich bringt (Götz & Ramharter, 2011).

Testaufgaben dagegen enthalten in der Regel genau die benötigten Informationen, die Situation ist klar und verständlich dargestellt, die Fragestellung oder Aufforderung präzise und die Textlänge angemessen (Schoberleitner, 2017, S. 152). Eine Beschränkung auf die Behandlung ausschließlich solcher Aufgaben im Unterricht lässt diesen verarmen, wie schon im Konzept *Bildungsstandards M8* festgestellt wird:

„Gute Aufgaben für die Unterrichtsarbeit im Fach Mathematik zeichnen sich in der Regel dadurch aus, dass sie in geeigneter Weise in den jeweils spezifischen unterrichtlichen Kontext und Prozess eingebettet sind und dass durch sie meist mehrere mathematische (wie auch fachübergreifende) Kompetenzen zugleich und miteinander vernetzt angesprochen werden. Diesem […] Anspruch sind die hier angeführten Aufgaben nicht verpflichtet – und können ihm auch in keiner Weise gerecht werden: […]" (IDM, 2007, S. 15)

[*] Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Oskar Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien.
[†] Pädagogische Hochschule Niederösterreich, Mühlgasse 67, 2500 Baden.
Korrespondierende Autorin. *E-mail:* evelyn.stepancik@ph-noe.ac.at

*„Die im Folgenden angeführten **Aufgaben** sind in der vorliegenden Form also **nicht für** den Einsatz im Rahmen üblicher **Unterrichtsarbeit** gedacht; […]"* (IDM, 2007, S. 16, Hervorhebung im Original)

2 Von Leistungs- zu Lernaufgaben

2.1 Woher kommen die Testitems und was zeichnet sie aus?

Zwei Quellen von Testitems sind für das diesem Artikel zugrundeliegende Vorhaben verwendet worden: erstens informelle Kompetenzmessungen (IKM) für die Sekundarstufe 1 (bifie, o. J.) und zweitens Aufgaben der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik für AHS (SRDP, o. J.) bzw. aus dem zugehörigen Aufgabenpool (BMBWF, o. J.) für die Sekundarstufe 2. Erstere beziehen sich auf genau einen mathematischen Standard aus M8, der durch ein Tripel (Handlungsbereich, Inhaltsbereich, Komplexitätsbereich), kurz: (H, I, K), beschrieben wird (IDM, 2007, S. 10 ff.), zweitere auf eine Grundkompetenz aus dem entsprechenden Katalog (SSRP, 2015, S. 7 ff.). Eine Aufgabe entstammt der Standardüberprüfung 2017 (bifie & BMBWF, 2018).

Sie erfüllen inhaltliche Qualitätskriterien für Testaufgaben: sie sind valide, d. h. sie messen genau jenen Standard bzw. jene Grundkompetenz, dem bzw. der sie jeweils zugeordnet sind, sie sind reliabel, d. h. sie messen zuverlässig und wiederholbar denselben Standard bzw. dieselbe Grundkompetenz und sie sind objektiv, d. h. ihre Lösung ist unabhängig von der Beurteilungsinstanz.

2.2 Strategien der Öffnung

In Büchter & Leuders (2012) finden sich verschiedene Strategien, um Testitems zu Lernaufgaben zu transformieren. Die *Kontextualisierung* meint die Entfaltung eines Items in einem den Lernenden vertrauten Kontext (vgl. George et al., 2016, S. 82 ff.). Für die fünfte Schulstufe hat die IKM z. B. folgende Aufgabe vorgesehen: eine Digitaluhr zeigt 9:12 Uhr, eine analoge daneben zwei Minuten nach viertel zehn. Die eine geht drei Minuten vor, die andere zwei Minuten nach. Wie spät ist es wirklich? Wir klassifizieren diese Aufgabe mit (H3, I1, K3), die Lösung ist 09:14 Uhr. Eine mögliche Kontextualisierung wäre: Simone steht am neuen Hauptbahnhof in Wien und sieht hinauf zur analogen Uhr. Sie zeigt zwei Minuten nach viertel zehn an. Sie blickt auf ihre Uhr mit Digitalanzeige und stellt eine Zeitdifferenz von fünf Minuten fest. Wie spät ist es wirklich, wenn man weiß, dass die eine Uhr vorgeht und die andere nach? Gib deine Antwort auf Minuten genau an. Durch diese Kontextualisierung wurde die Aufgabenstellung zu einer (H1, I1, K3)-Aufgabe transformiert.

Das *Öffnen einer Aufgabe* kann durch *Zielumkehr* geschehen. Abbildung 1 ist ein Testitem für die sechste Schulstufe. Eine durch Zielumkehr modifizierte Aufgabe könnte lauten: Stelle die Gleichung $40 + x = 200 - 2 \cdot x$ grafisch dar.

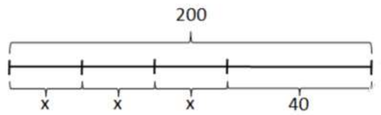

Abbildung 1: Max stellt eine Gleichung graphisch dar. Welche? – Es werden vier mögliche Gleichungen angeboten, nur eine davon ist richtig (Single Choice). Lösung: $3 \cdot x + 40 = 200$

Aus (H3, I2, K2) wird so der neue Standard (H1, I2, K2).

Begründungen einfordern lautet eine weitere Strategie, die folgendermaßen an einer Aufgabe für die siebente Schulstufe illustriert wird: Im Jahr 2012 waren folgende Bubennamen in Österreich am beliebtesten: 743-mal wurde David ausgesucht, 754-mal Luca, 874-mal Lukas, 769-mal Maximilian und 771-mal Tobias. Entscheide, welche Darstellung in Abbildung 2 am wenigsten geeignet ist, diese Statistik grafisch zu präsentieren: (H3, I4, K1). Lösung: rechts unten. Mit der Aufforderung „Begründe deine Entscheidung!" wird daraus eine (H4, I4, K1)-Aufgabe.

Eine aktuelle Aufgabe aus der Standardüberprüfung 2017 (bifie & BMBWF, 2018, S. 85), also für die achte Schulstufe: Dina und Martin haben sich ein spannendes Rennen über 800 m geliefert. Das Diagramm in Abbildung 3 stellt den Zusammenhang zwischen der Zeit (in Minuten) und der zurückgelegten Wegstrecke (in Metern) dar. Welche der folgenden Aussagen ist richtig, welche falsch? Damit wird (H3, I2, K2) angesprochen. *Die ersten 200 m lag Dina in Führung. Martin überholte Dina nach einer Minute. Martin gewann das Rennen. Dina war insgesamt*

R&E-SOURCE http://journal.ph-noe.ac.at
Open Online Journal for Research and Education
ISSN: 2313-1640

länger in Führung. Die ersten drei Aussagen sind richtig, die letzte ist falsch. Aber warum? – Nun ist eine (H4, I2, K2)-Aufgabe entstanden.

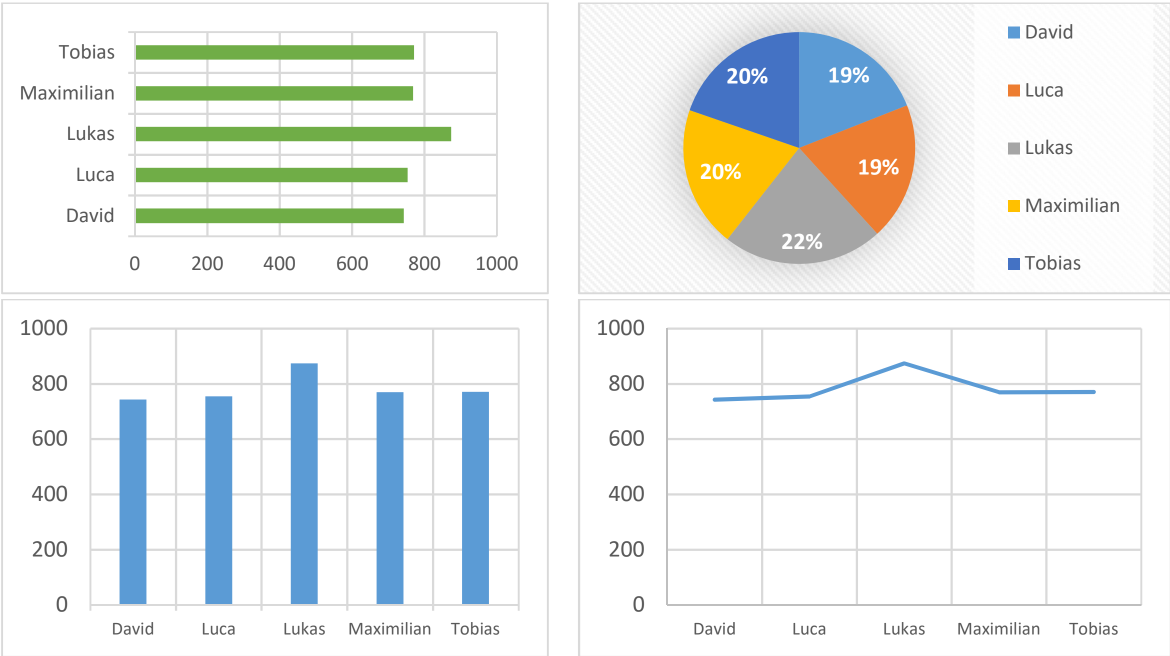

Abbildung 2: Vier statistische Darstellungen eines einfachen Datensatzes

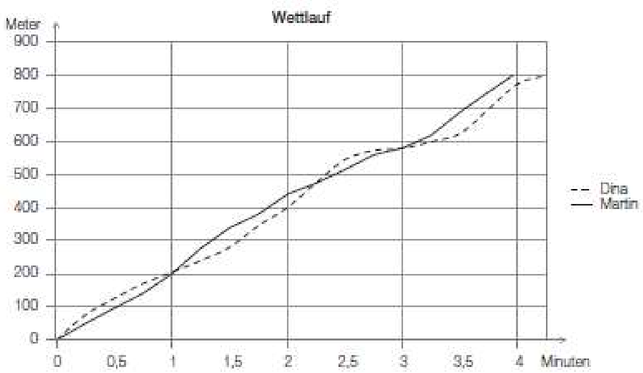

Abbildung 3: Das Weg-Zeit-Diagramm eines Wettlaufes (bifie & BMBWF, 2018, S. 85)

Für manche Vierecke kann man den Flächeninhalt *A* aus der Länge der Diagonalen *e* und *f* wie folgt berechnen: $A = \frac{e \cdot f}{2}$. Welche der folgenden Voraussetzungen muss dafür erfüllt sein? Die Diagonalen müssen … *aufeinander normal stehen, einander halbieren, beide gleich lang sein, aufeinander normal stehen und einander halbieren*. Lösung: die erste Möglichkeit. Bei dieser Aufgabe für die neunte Schulstufe zum Standard (H2, I3, K1) kann die nächste Strategie greifen, nämlich ein *Gegenbeispiel einfordern*: i) Gib ein Viereck an, dessen Flächeninhalt nicht durch $\frac{e \cdot f}{2}$ berechnet werden kann. ii) Begründe: wenn die Diagonalen in einem Viereck senkrecht aufeinander stehen, dann lässt sich sein Flächeninhalt durch $\frac{e \cdot f}{2}$ berechnen. Es gilt sogar: iii) Der Flächeninhalt eines ebenen Vierecks ist genau dann durch $\frac{e \cdot f}{2}$ gegeben, wenn seine Diagonalen mit den Längen *e* und *f* senkrecht aufeinander stehen. Damit wird der Standard (H4, I3, K2) angesprochen. Durch Anwenden der trigonometrischen Flächenformel kann die Umkehrrichtung in der Sekundarstufe 2 begründet werden.

Anwendungsbeispiele erfragen ist eine weitere Strategie, die z. B. bei linearen Funktionen (ebenfalls neunte Schulstufe) zu realisieren ist: im Aufgabenpool (BMBWF, o. J.) sind für die lineare Funktion *f* mit $f(x) = k \cdot x + d$ fünf Aussagen auf ihr Zutreffen zu beurteilen (2 aus 5-Multiple Choice-Format). Gemeint ist die Grundkompetenz FA 2.3 (SSRP, 2015, S. 10). Die folgende Aufforderung erweitert die Testaufgabe zu einer Lernaufgabe: Gib für die zwei richtigen Antwortmöglichkeiten einen Kontext an, in dem lineare Funktionen mit eben diesen Eigenschaften eine Rolle spielen. Lösung: Die Beziehung zwischen zurückgelegtem Weg des Lichts und der dabei verstrichenen Zeit ist ein Beispiel für „Jede lineare Funktion mit $d = 0$ und $k \neq 0$ lässt sich als direktes Verhältnis interpretieren." Die Pulsfrequenz eines Menschen bei gleichmäßigem Lauf ist annähernd konstant. Ihr zeitlicher Verlauf wird daher durch „Der Graph einer linearen Funktion mit $k = 0$ ist stets eine Gerade" approximativ beschrieben.

Wenn sich der Kontostand auf einem Kapitalsparbuch gemäß $K_i = 1{,}03 \cdot K_{i-1} + 5000$ (in Euro, *i* zählt die Jahre) entwickelt, wie das beim Haupttermin 2015/16 der „Zentralmatura" AHS (SRDP, o. J.) der Fall gewesen ist (zwölfte Schulstufe), so kann man nach den *Grenzen dieses (*allgemein: *eines) Modells* fragen, womit die nächste Strategie zum Tragen kommt. Ursprünglich sind wieder zwei richtige aus fünf gegebenen Aussagen zu identifizieren (zur Grundkompetenz AN 1.4 in SSRP, 2015, S. 14). Doch eine Simulation mit einem Tabellenkalkulationsprogramm bringt ein enttäuschendes Ergebnis: auch nach 180 Jahren (!) ist das Kapital auf diese Weise erst auf knapp 35 Mio. Euro angewachsen, ein Betrag, der wohl noch keiner Bank wirklich Sorgen bereiten würde.

Eine quadratische Gleichung der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit reellen Koeffizienten und $a \neq 0$ musste im zweiten Nebentermin 2016/17 (SRDP, o. J.) dahin gehend untersucht werden, wie sich die Vorzeichen von *a* und *c* auf die Anzahl der Lösungen auswirkt (neunte Schulstufe, AG 2.3 in SSRP, 2015, S. 7). Die Lösung, dass nämlich für $a > 0$ und $c < 0$ jedenfalls zwei verschiedene reelle Lösungen existieren, führt ob des gegebenen Antwortformats „Lückentext" zur letzten Strategie, nämlich zu einer *Aussage, die begründet* werden kann. Dies kann geometrisch anhand des zugehörigen Funktionsgraphen passieren oder algebraisch mithilfe der Diskriminante der großen Lösungsformel.

Es zeigt sich, dass Aufgaben mit geschlossenen Antwortformaten (SSRP, 2015, S. 26 ff.) für die in Rede stehende Transformation von Testitems zu Lernaufgaben besonders geeignet sind. So entstehen Aufgaben, an denen die Lernenden ihre Fähigkeiten und Kompetenzen anwenden und weiterentwickeln können.

Literatur

bifie (o. J.). *IKM auf der Sekundarstufe 1*. https://www.bifie.at/ikm-auf-der-sekundarstufe-1/ (Zugriff am 06.02.2018)

bifie & BMBWF (2018). *Standardüberprüfung 2017 Mathematik, 8. Schulstufe – Bundesergebnisbericht.* https://www.bifie.at/wp-content/uploads/2018/02/BiSt_UE_M8_2017_Bundesergebnisbericht.pdf (Zugriff am 05.03.2018)

BMBWF (o. J.). *Übungsklausuraufgaben für die SRP in Mathematik*. https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/ (Zugriff am 07.02.2018)

Büchter, A. & Leuders, T. (2012). Leistungen verstehensorientiert überprüfen – Gute Aufgaben für Klassenarbeiten entwickeln. Bruder, R., Leuders, T. & Büchter, A.: *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten.* Cornelsen Berlin (2. Aufl.), 155–184.

George, A. C., Süss-Stepancik, E., Illetschko, M. & Wiesner, C. (2016). Entwicklung wirkungsvoller Lernaufgaben für den Unterricht aus Testitems der Bildungsstandardüberprüfung. *Visible Didactics – Fachdidaktische Forschung trifft Praxis. transfer Forschung ↔ Schule*, Heft 2, 67–87.

Götz, S. & Ramharter, E. (2011). Begriffsbildung in der Mathematik. Amphibium zwischen Zwang und Freiheit. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen der ÖMG*, Heft 43, 50–74. http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2010%20Band%2043/VortragGoetzRamharter.pdf (Zugriff am 06.02.2018)

IDM (Institut für Didaktik der Mathematik) (2007, Hrsg.). *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe*. Version 4/07. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt. https://www.aau.at/didaktik-der-mathematik/publikationen/bildungsstandards-zentralmatura/materialien-berichte/ (Zugriff am 06.02.2018)

Schoberleitner, F. (2017). Die Rolle von Text und Kontext in Stochastik-Aufgaben. *Mathematik im Unterricht*, Ausgabe 8 (Hrsg.: G. Maresch et al.), 143–153.

SRDP (o. J.). *Standardisierte Reife- und Diplomprüfung*. https://www.srdp.at/ (Zugriff am 06.02.2018)

SSRP (2015). *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen* (Stand: Oktober 2015). https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/07_MAT/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf (Zugriff am 07.02.2018)

Wittmann, E. Ch. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung* 16 (3), 329–342. https://www.pedocs.de/volltexte/2017/13385/pdf/BZL_1998_3_329_342.pdf (Zugriff am 06.02.2018)