

Ein einfacher Zugang zu LEMOINE'S Problem — Gleichseitige Dreiecke als Aufsatzfiguren

Stefan Götz¹

Zusammenfassung

Eine überaus populäre Darstellung des Lehrsatzes von PYTHAGORAS zeigt drei Quadrate, die jeweils auf eine Dreiecksseite aufgesetzt werden. Weniger oft sieht man andere aufgesetzte Figuren, die zueinander ähnlich sind, z. B. gleichseitige Dreiecke. Das ist die Ausgangsfigur für LEMOINE'S Problem (1868), das von LUDWIG KIEPERT gelöst und verallgemeinert worden ist. Zur Beschreibung der dabei entstehenden geometrischen Situationen gehen wir von einer standardisierten Lage eines allgemeinen Dreiecks aus. Mit Methoden der analytischen Geometrie der Ebene gelingt es, Beweise für elementargeometrische Vermutungen zu finden. Auf diese Weise kann das oft sich in Aufgabenplantagen erschöpfende schulmathematische Gebiet der Vektorrechnung mit Sinn erfüllt werden.

Schlüsselwörter:

Dreiecksgeometrie
Analytische Geometrie in der Ebene
Aufsatzfiguren
LEMOINE'S Problem
Satz von NAPOLEON

1 Einleitung

Im Lehrplan der neunten Schulstufe für Mathematik an Gymnasien in Österreich heißt es unter der Überschrift „Vektoren und analytische Geometrie der Ebene“ unter anderem: „Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen und durch Gleichungen, Schneiden von Geraden“. Dies führt zu den einschlägigen Aufgaben, die in jedem Schulbuch der Sekundarstufe (II) zu finden sind, exemplarisch sei auf Götz & Reichel, 2010, S. 255 verwiesen („Aufgabeninseln und Routineaufgaben“ in Tietze, Klika & Wolpers, 2000, S. 100). Sehr oft wird dabei auf die geometrische Entsprechung im Unterricht verzichtet und eine rein algebraische Rechnung durchgeführt. Ein sinnstiftender Zusammenhang zwischen diesen beiden lokalen Konzepten Algebraisierung und Geometrisierung im Anschauungsraum (als Teile einer fundamentalen Idee, vgl. Tietze, Klika & Wolpers, 2000, S. 71) ist auf diese Weise für Schüler und Schülerinnen nur schwer zu erkennen. Ein Motiv, einen solchen Zusammenhang herzustellen, ist das Begründen von geometrischen Sätzen mit Hilfe algebraischer Rechnungen: „Zahlreiche Sachverhalte und Sätze der Elementargeometrie lassen sich vektoriell einfach darstellen bzw. beweisen.“ (Tietze, Klika & Wolpers, 2000, S. 99).

Diese Begründungen können fruchtbringend aus dem Kontext „Dreiecksgeometrie“ gewonnen werden, dabei zeigt sich, dass fast jedes Komplexitätsniveau angesprochen werden kann. Ausgangspunkt ist eine bestimmte standardisierte Lage eines allgemeinen Dreiecks, wie sie schon in Götz & Hofbauer, 2012, vorgestellt worden ist: Abbildung 1, die Eckpunkte ABC des Dreiecks haben die Koordinaten $(u|0)$, $(v|0)$ und $(0|w)$. Dabei ist immer $u < v$ und o. B. d. A. $w > 0$. In Götz & Hofbauer, 2012, werden für dieses Dreieck die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U , des Höhenschnittpunkts H und der Umkreisradius r ausgerechnet. Daraus wird der Satz bewiesen, dass

¹Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, A-1090 Wien.
E-Mail: stefan.goetz@univie.ac.at.

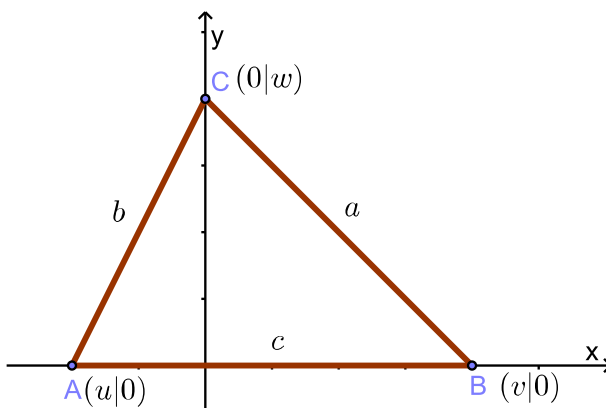


Abbildung 1: Die Basis – ein standardisiertes allgemeines Dreieck

der an den Seiten eines Dreiecks gespiegelte Höhenschnittpunkt drei Punkte definiert, die alle auf dem Umkreis des Dreiecks liegen. Weiterhin wird mit dieser „*uvw*-Sprache“ dort gezeigt, dass einander die Winkelhalbierende durch eine bestimmte Ecke und die Mittelsenkrechte der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite in einem Punkt schneiden, der auf dem Umkreis des Dreiecks liegt. Schließlich wird die Parallelität des Höhenfußpunktdreiecks zum Tangendendreieck an den Umkreis eines Dreiecks nachgewiesen.

Eine jüngere Arbeit (Götz & Süß-Stepancik, 2015) zu diesem Thema fängt ganz elementar an: die Koordinaten des Eckenschwerpunkts S werden berechnet (und damit seine Existenz auf einfache Art und Weise gezeigt!), daraus kann dann leicht die Existenz der EULER'schen Geraden gefolgert werden inklusive der Abstandsverhältnisse der drei besonderen Punkte des Dreiecks U , S und H zueinander.

Insgesamt werden also Geraden geschnitten, Punkte an (Träger-)Geraden gespiegelt, Abstände berechnet, Parallelitäten nachgewiesen, alles Tätigkeiten, die im Mathematikunterricht der Sekundarstufe (II) beim Thema „Vektorrechnung (in der Ebene)“ vorgesehen sind. Zusätzlich kommen in diesem Kontext das Interpretations- und das Begründungsmoment hinzu. In Schwarz & Herrmann, 2015, S. 206, wird zum Themenfeld „Lineare Gleichungssysteme“ und seiner algebraischen Behandlung mittels des GAUSS-Algorithmus bemerkt: „Allgemein bietet sich aus didaktischer Perspektive dafür ein starkes Inbeziehungsetzen des algebraischen Vorgehens mit einer geometrischen Veranschaulichung an, wofür insbesondere Kenntnisse im Bereich der analytischen Geometrie notwendig sind [...]“. Genau dies soll hier an Inhalten der Dreiecksgeometrie exemplifiziert werden.

2 LEMOINE's Problem

2.1 Motivation und Fragestellung

Eine sehr populäre Darstellung der Aussage des Lehrsatzes von PYTHAGORAS zeigt Abbildung 2 links. Daneben sind statt der Quadrate gleichseitige Dreiecke aufgesetzt, auch dann gilt sinngemäß der Lehrsatz des PYTHAGORAS: Abbildung 2 rechts². Unser Augenmerk gilt aber jetzt folgendem Problem (LEMOINE's Problem):

Kennen wir nur die (Koordinaten der) Spitzen E , F und G der auf die Seiten eines *allgemeinen* Dreiecks ABC aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke, wie können dann die ursprünglichen Ecken A , B und C konstruiert, besser: rekonstruiert werden?

²Er gilt, wenn zueinander ähnliche Figuren auf die Dreiecksseiten aufgesetzt werden. Der Witz ist, dass dies bei Quadraten oder gleichseitigen Dreiecken automatisch der Fall ist.

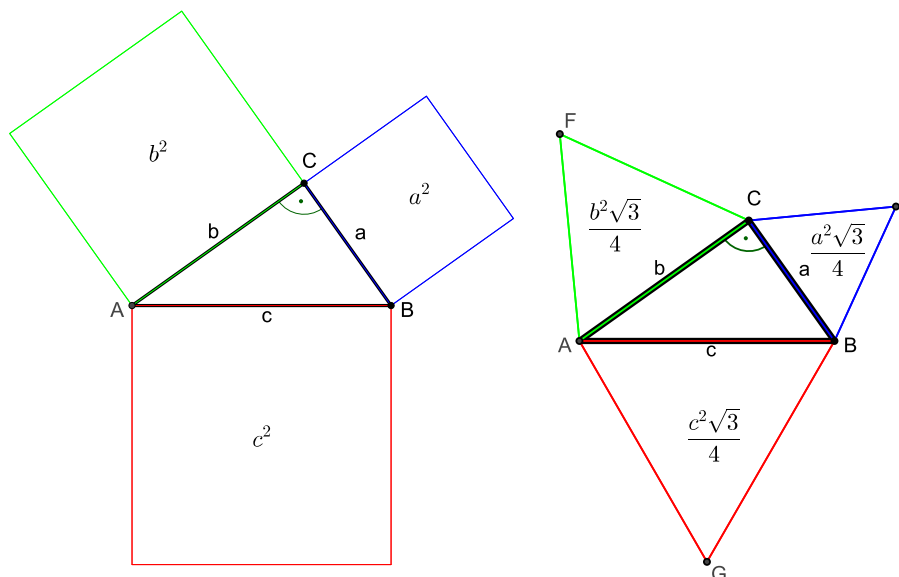


Abbildung 2: Zweimal der Lehrsatz des PYTHAGORAS

Es wurde 1868 vom französischen Mathematiker Émile LEMOINE gestellt. Ludwig KIEPERT, ein deutscher Mathematiker, publizierte ein Jahr später eine Lösung, deren Diskussion und Verallgemeinerung zur KIEPERT-Hyperbel führte (LEMOINE's problem). Sie ist die Spur des Schnittpunkts P der Ecktransversalen AE , BF und CG (das ist der FERMAT-Punkt, Abschnitt 4), wenn die Basiswinkel φ der aufgesetzten Dreiecke von -90° bis 90° variieren. Negative Basiswinkel bedeuten dabei, dass die aufgesetzten Dreiecke „nach innen“ geklappt werden (vgl. Walser, 2012, S. 154 ff.).

2.2 Die Lösung

Der Schlüssel zum Erfolg ist folgende Beobachtung, die man mit einem dynamischen Geometriesystem machen kann: setzt man auf das Spitzendreieck EFG nochmal gleichseitige Dreiecke auf (Spitzen Q , R und S), dann stimmen die neuen Ecktransversalen EQ , FR und GS mit den alten AE , BF und CG überein. Dafür genügt es zu zeigen, dass sie jeweils parallel zueinander liegen: Abbildung 3, die Punkte H_i ($i = 1, 2, 3$) halbieren die Strecken EF , FG bzw. EG .

Wir berechnen zunächst die Koordinaten für die Spitzen E , F und G in der uvw -Sprache, das ist eine Standardaufgabe in der Sekundarstufe II. Für den Punkt E zum Beispiel setzen wir senkrecht auf die Strecke BC — die die Länge $a = \sqrt{v^2 + w^2}$ besitzt — durch deren Mittelpunkt M_{BC} eine Strecke der Länge $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$ auf. Mit $\vec{M}_{BC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$ als ein Normalvektor der Strecke BC (Orientierung beachten!) erhalten wir

$$\vec{E} = \vec{M}_{BC} + \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 + w^2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{v^2 + w^2}$$

und schließlich

$$E \left(\frac{v}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2} \mid \frac{w}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{v}{2} \right).$$

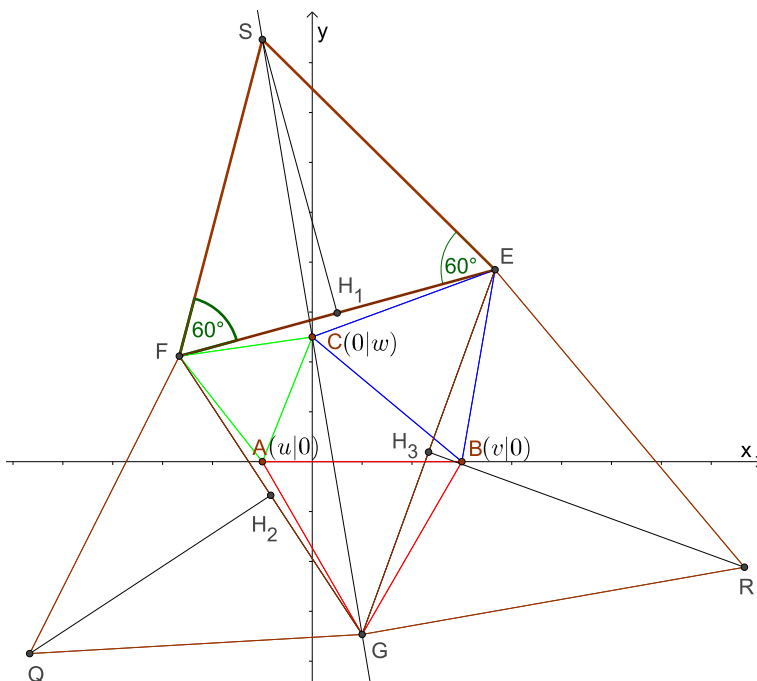


Abbildung 3: Nochmals aufgesetzte gleichseitige Dreiecke EFS , FGQ und EGR

In analoger Weise ergeben sich für

$$F \left(\frac{u}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2} \mid \frac{w}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{u}{2} \right) \quad \text{und für} \quad G \left(\frac{u+v}{2} \mid \sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2} \right).$$

Nun zeigen wir $\vec{SG} \parallel \vec{CG}$. Dazu berechnen wir (ebenfalls eine Standardaufgabe in der Sekundarstufe II!) die Koordinaten von S wie folgt:

$$\vec{S} = \vec{H}_1 + \overline{H_1S} \cdot \vec{n}_{EF}^0 = \frac{1}{2} (\vec{E} + \vec{F}) + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\tan 60^\circ}_{=\sqrt{3}} \cdot |\overline{EF}| \cdot \vec{n}_{EF} \cdot \frac{1}{|\overline{EF}|},$$

dabei ist \vec{n}_{EF} der Normalvektor auf die Dreiecksseite EF der Länge $|\overline{EF}|$ nach „außen“ orientiert. Der Vektor \vec{n}_{EF}^0 ist der zugehörige normierte Vektor. Konkret ergeben sich mit

$$\vec{E} + \vec{F} = \left(\begin{array}{c} \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \\ w + \frac{\sqrt{3}}{2}(v-u) \end{array} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} u+v \\ 2w + \sqrt{3} \cdot (v-u) \end{array} \right)$$

und

$$\overline{EF} = \left(\begin{array}{c} \frac{u}{2} - \frac{v}{2} - \sqrt{3}w \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(u+v) \end{array} \right)$$

die Koordinaten von S , wenn der Normalvektor auf EF richtig orientiert wird: $\vec{n}_{EF} = \left(\begin{array}{c} -\frac{\sqrt{3}}{2}(u+v) \\ \sqrt{3}w + \frac{v}{2} - \frac{u}{2} \end{array} \right)$. Seine zweite Koordinate ist positiv (vgl. Abbildung 3). Es ist dann

$$\vec{S} = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} u+v \\ 2w + \sqrt{3} \cdot (v-u) \end{array} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\begin{array}{c} -\frac{\sqrt{3}}{2}(u+v) \\ \sqrt{3}w + \frac{v-u}{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -\frac{u+v}{2} \\ 2w + \frac{\sqrt{3}}{2}(v-u) \end{array} \right).$$

Damit berechnen wir den Vektor $\vec{SG} = \begin{pmatrix} u+v \\ \sqrt{3} \cdot (u-v) - 2w \end{pmatrix}$.

Ein Vergleich mit dem Vektor $\vec{CG} = \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2} - w \end{pmatrix}$ zeigt ein überraschendes (? , vgl. LEMOINE's problem) Ergebnis: nicht nur, dass die beiden Vektoren parallel zueinander sind, der Eckpunkt C halbiert zusätzlich die Transversale SG . Auf diese Weise kann also der gesuchte Punkt C konstruiert werden.

Analog rechnen wir $\vec{QE} = 2 \cdot \vec{AE}$ und $\vec{RF} = 2 \cdot \vec{BF}$ nach (vgl. Abbildung 3). Damit ist LEMOINE's Problem gelöst (vgl. LEMOINE's problem).

2.3 Die Länge der Ecktransversalstrecken

Abbildung 4 zeigt nochmals die Ausgangssituation, im Vergleich zu Abbildung 2 rechts diesmal für ein allgemeines Dreieck ABC in der standardisierten Lage mit einem Koordinatensystem (Abbildung 1) passend für die uvw -Sprache. Wir beobachten nämlich mittels eines dynamischen Geometriesystems, dass unabhängig vom Ausgangs-

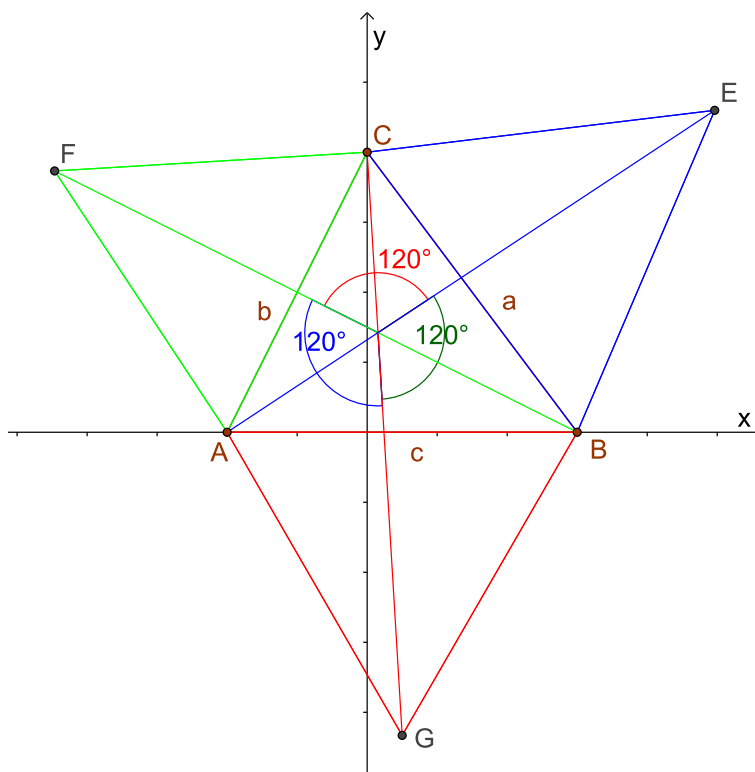


Abbildung 4: Es gilt $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG}$.

dreieck ABC für die Längen der Ecktransversalstrecken AE , BF und CG immer

$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG}$$

gilt. Die daraus resultierende Vermutung können wir leicht nachrechnen (wieder eine Standardrechnung in der Sekundarstufe II) und damit beweisen.

Zuerst berechnen wir die Koordinaten von

$$\vec{AE} = \left(\begin{array}{c} \frac{v}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2} - u \\ \frac{w}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{v}{2} \end{array} \right).$$

Wenn wir nun die Länge des Richtungsvektors \vec{AE} ausrechnen, erhalten wir für ihr Quadrat

$$\begin{aligned} |\vec{AE}|^2 &= \left(\frac{v}{2} + \frac{w}{2}\sqrt{3} - u \right)^2 + \left(\frac{w}{2} + \frac{v}{2}\sqrt{3} \right)^2 = \\ &= u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3} \cdot w(v - u). \end{aligned}$$

Analoge Rechnungen ergeben mit

$$\vec{BF} = \left(\begin{array}{c} \frac{u}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2} - v \\ \frac{w}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{u}{2} \end{array} \right) \quad \text{und} \quad \vec{CG} = \left(\begin{array}{c} \frac{u+v}{2} \\ \sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2} - w \end{array} \right)$$

dasselbe Resultat:

$$|\vec{CG}|^2 = |\vec{BF}|^2 = u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3} \cdot w(v - u).$$

Interessant ist auch die *umgekehrte Fragestellung*: wenn $|\vec{AE}| = |\vec{BF}| = |\vec{CG}|$ gilt, folgt dann daraus $\varphi = 60^\circ$? Das heißt, sind nur im Falle von aufgesetzten gleichseitigen Dreiecken die Ecktransversalstrecken gleich lang? Nun müssen wir den Basiswinkel φ der auf das Dreieck ABC aufgesetzten (gleichschenkeligen) Dreiecke als variabel ansehen. Es sind Werte zwischen -90° und 90° erlaubt (vergleiche die Bemerkung am Ende von Abschnitt 2.1). Wir setzen

$$t := \tan \varphi,$$

das ist die entscheidende Idee für das Folgende! Die Länge der Strecke $M_{BC}E$ ist dann $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \tan \varphi = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t$ (siehe Abbildung 5), die Koordinaten des Eckpunkts E sind daher nun

$$E \left(\frac{v}{2} + t \cdot \frac{w}{2} \mid \frac{w}{2} + t \cdot \frac{v}{2} \right).$$

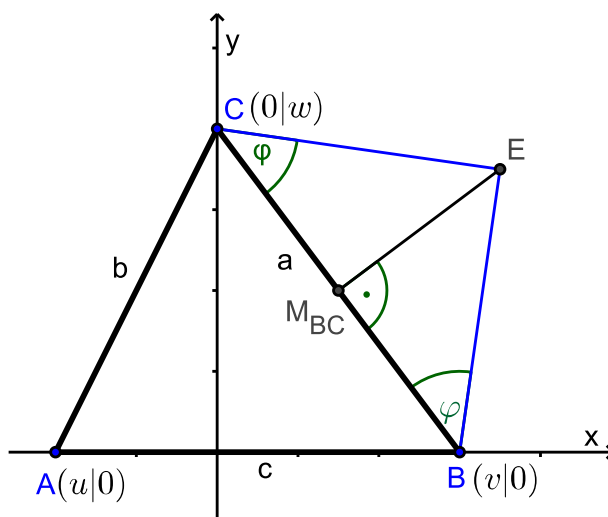


Abbildung 5: Zur Berechnung der Koordinaten für E

Analog ergeben sich

$$F\left(\frac{u}{2} - t \cdot \frac{w}{2} \mid \frac{w}{2} - t \cdot \frac{u}{2}\right) \quad \text{und} \quad G\left(\frac{u+v}{2} \mid t \cdot \frac{u-v}{2}\right).$$

Zur Beantwortung der in Rede stehenden Frage zerlegen wir die Voraussetzung in drei Gleichungen:

1. $|\vec{AE}| = |\vec{BF}|$: nach dem Streichen gleicher algebraischer Terme und Umstellung erhalten wir

$$\frac{3u^2}{4} - \frac{3v^2}{4} = \frac{t^2}{4}(u^2 - v^2).$$

Aus $3(u^2 - v^2) = t^2(u^2 - v^2)$ folgt nach Division durch $u^2 - v^2 \neq 0$ die Gleichung $3 = t^2$ bzw. $t = \pm\sqrt{3}$. Für $t = \sqrt{3}$ folgt das gewünschte Ergebnis $\varphi = 60^\circ$, für $t = -\sqrt{3}$ wäre $\varphi = 120^\circ$ oder größer, was für Basiswinkel von gleichschenkeligen Dreiecken nicht möglich ist. Für $\varphi = -60^\circ$ erhalten wir eingeklappte gleichseitige Dreiecke, vgl. die Bemerkung am Ende von Abschnitt 2.1.

Allerdings bleibt noch der Fall $u^2 = v^2$ zu betrachten. Das hat $u = -v$ und $v > 0$ wegen der Voraussetzung $u < v$ zur Folge, das heißt, das Dreieck ABC ist gleichschenkelig: $a = b$.

2. $|\vec{AE}| = |\vec{CG}|$ liefert

$$\frac{3u^2}{4} - \frac{3w^2}{4} - \frac{3uv}{2} = \frac{t^2}{4} \cdot [(v-u)^2 - w^2 - v^2].$$

Daraus folgt $3(u^2 - w^2 - 2uv) = t^2(v^2 - 2vu + u^2 - w^2 - v^2)$. Division diesmal durch $u^2 - 2uv - w^2 \neq 0$ führt wieder zu $3 = t^2$.

Ist dagegen $u^2 - 2uv - w^2 = 0$, so lässt sich das zu $(v-u)^2 = v^2 + w^2$ bzw. zu $v-u = \sqrt{v^2 + w^2}$ umformen, was $c = a$ bedeutet. Die Seitenlänge c ist dann also gleich der Seitenlänge a .

Mit dem Ergebnis aus 1. ergibt das insgesamt ein gleichseitiges Ausgangsdreieck ABC . Geometrisch ist dann unmittelbar einsichtig, dass die Ecktransversalen auch in diesem Fall aus Symmetriegründen gleich lang sein müssen, unabhängig von der Größe von φ .

3. Für $|\vec{BF}| = |\vec{CG}|$ ergibt sich in analoger Weise $\varphi = \pm 60^\circ$ oder $c = b$. Insgesamt ist auch auf diese Weise $a = b = c$ als zweite Möglichkeit ausgewiesen, drei gleich lange Ecktransversalstrecken zu erhalten.

2.4 Die Winkel zwischen den Ecktransversalen

In Abbildung 4 sind auch die Winkel zwischen den Ecktransversal(streck)en eingezeichnet, sie betragen jeweils 120° . Die Exploration mit einem dynamischen Geometriesystem zeigt, dass sich diese Winkel ebenfalls unabhängig vom Ausgangsdreieck ABC nicht ändern (vgl. Abschnitt 2.3). Die folgende (Standard-)Rechnung (in der Sekundarstufe II) bestätigt diese Beobachtung: Wegen

$$\begin{aligned} & \frac{\vec{AE} \cdot \vec{BF}}{|\vec{AE}| \cdot |\vec{BF}|} = \\ &= \frac{\left(\frac{v}{2} + \frac{w}{2} \cdot \sqrt{3} - u\right) \cdot \left(\frac{u}{2} - v - \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2}\right) + \left(\frac{w}{2} + \frac{v}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{w}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{u}{2}\right)}{u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3}w(v-u)} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3}w(v-u)}{u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3}w(v-u)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

hat der Winkel zwischen den Ecktransversalen AE und BF den Wert 120° bzw. 60° (für den Nenner verwenden wir die Ergebnisse aus Abschnitt 2.3).

Dasselbe Resultat ergibt sich bei

$$\begin{aligned} \frac{\vec{AE} \cdot \vec{CG}}{|\vec{AE}| \cdot |\vec{CG}|} &= \frac{\left(\frac{v}{2} + \frac{w}{2} \cdot \sqrt{3} - u\right) \cdot \frac{u+v}{2} + \left(\frac{w}{2} + \frac{v}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2} - w\right)}{u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3}w(v-u)} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3}w(v-u)}{u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3}w(v-u)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das heißt auch der Winkel zwischen den Ecktransversalen AE und CG beträgt 120° bzw. 60° . Damit muss auch der Winkel zwischen den Geraden BF und CG den Wert 120° annehmen, also 60° reduziert.

3 Der Satz von NAPOLEON

3.1 Der Satz und eine Begründung

Die auf die Dreiecksseiten eines beliebigen Dreiecks ABC aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke haben noch eine weitere Eigenschaft: ihre Umkreismittelpunkte bilden ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck (Satz von NAPOLEON, siehe zum Beispiel Agricola & Friedrich, 2009, S. 106 f.). Wir berechnen dazu die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U_a des gleichseitigen Dreiecks BCE (Abbildung 4). Mit $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -v \\ w \end{pmatrix}$ erhalten wir mittels einer Standardrechnung in der Sekundarstufe II

$$\begin{aligned} \vec{U}_a &= \frac{1}{2} (\vec{B} + \vec{C}) + \vec{n}_{\vec{BC}}^0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |\vec{BC}| = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{w^2 + v^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{w^2 + v^2}} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{v}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot w \\ \frac{w}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Für die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U_b des Dreiecks ACF (Abbildung 4) erhalten wir auf analoge Weise

$$\vec{U}_b = \begin{pmatrix} \frac{u}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot w \\ \frac{w}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot u \end{pmatrix}.$$

Dabei ist wegen $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -u \\ w \end{pmatrix}$ der Normalvektor auf die Seite AC gleich $\vec{n}_{\vec{AC}} = \begin{pmatrix} -w \\ -u \end{pmatrix}$, der „zweite Kandidat“ $\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$ dagegen ist falsch orientiert: vgl. nochmals Abbildung 4.

Schließlich ist für das Dreieck ABG in Abbildung 4

$$\vec{U}_c = \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (u-v) \end{pmatrix}$$

der Ortsvektor seines Umkreismittelpunkts U_c .

Wenn wir nun die (Quadrate der) Längen der Seiten des Dreiecks $U_a U_b U_c$ berechnen, auch das ist eine Standardrechnung der Sekundarstufe II, dann ergibt sich dreimal dasselbe Resultat, wenngleich die Ausgangsterme auf den ersten Blick nicht ident aussehen:

$$\begin{aligned} |\vec{U}_a \vec{U}_b|^2 &= \left(\frac{u}{2} - \frac{v}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} w\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} u - \frac{\sqrt{3}}{6} v\right)^2 = \\ &= \frac{u^2}{3} + \frac{v^2}{3} + \frac{w^2}{3} - \frac{uv}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot w(v-u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{U_a U_c}|^2 &= \left(\frac{u}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} w \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} u - \frac{\sqrt{3}}{3} v - \frac{w}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{u^2}{3} + \frac{v^2}{3} + \frac{w^2}{3} - \frac{uv}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot w(v - u) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{U_b U_c}|^2 &= \left(\frac{v}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} w \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} u - \frac{\sqrt{3}}{6} v - \frac{w}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{u^2}{3} + \frac{v^2}{3} + \frac{w^2}{3} - \frac{uv}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot w(v - u). \end{aligned}$$

Also ist das Dreieck $U_a U_b U_c$ gleichseitig.

4 Der FERMAT-Punkt

4.1 Drei Ecktransversalen und ihr Schnittpunkt

Wenn wir die drei Dreiecksspitzen E , F und G der gleichseitigen aufgesetzten Dreiecke mit den gegenüberliegenden Ecken des ursprünglichen Dreiecks ABC verbinden, so sehen wir mit einem dynamischen Geometriesystem, dass die so entstehenden Ecktransversalen AE , BF und CG einander in einem Punkt P schneiden: Abbildung 6. Das ist der FERMAT-Punkt.

Die Formeln für die Koordinaten der Spitzen E , F und G in Abschnitt 2.2 zeigen deutlich, dass eine Schnittpunktberechnung der Ecktransversalen AE , BF und CG nicht ganz einfach sein wird. (Natürlich kann hier zur Unterstützung ein Computeralgebrasystem eingesetzt werden.) Betrachtet man allerdings die Koordinaten von E und F genauer, dann sieht man, dass durch Vertauschen von u und v und durch Ersetzen von $\sqrt{3}$ durch $-\sqrt{3}$ der Punkt A in den Punkt B übergeht und E in F . Der Eckpunkt C und die Spitze G gehen dabei in sich selbst über. Das werden wir wie folgt ausnützen: wir berechnen den Schnittpunkt P' von AE mit CG . Wenn die Koordinaten von P' invariant gegenüber der eben erwähnten Vertauschung und Ersetzung sind, dann muss P' auch der Schnittpunkt der Geraden BF und CG sein. Insgesamt ist dann bewiesen, dass die Ecktransversalen AE , BF und CG inzidieren, den gemeinsamen Punkt $P = P'$ besitzen. Der Vorteil ist, wir müssen auf diese Weise nur eine (!) Schnittpunktberechnung durchführen.

Die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{v}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2} - u, \frac{w}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{v}{2} \right)$ und $\overrightarrow{CG} = \left(\sqrt{3} \cdot \frac{u+v}{2} - w, \frac{u+v}{2} - w \right)$ aus Abschnitt 2.3 führen zu Parameterformen der Ecktransversalen durch A bzw. C :

$$\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{v}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2} - u \\ \frac{w}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{v}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cdot \frac{u+v}{2} - w \\ \frac{u+v}{2} - w \end{pmatrix}.$$

Das Gleichsetzen der y -Koordinaten liefert die Beziehung

$$\lambda = \frac{2w(1 - \sigma) + \sigma\sqrt{3}(u - v)}{w + \sqrt{3}v}$$

zwischen den Parametern λ und σ für den gesuchten Schnittpunkt P' . Damit kann eine Gleichung für die x -Koordinaten aufgestellt werden, aus der der Parameter

$$\sigma = \frac{2 \cdot (wv - uw + \sqrt{3}uv + \sqrt{3}w^2)}{(u + v) \cdot (w + \sqrt{3}v) - (v + \sqrt{3}w - 2u) \cdot (\sqrt{3}u - \sqrt{3}v - 2w)}$$

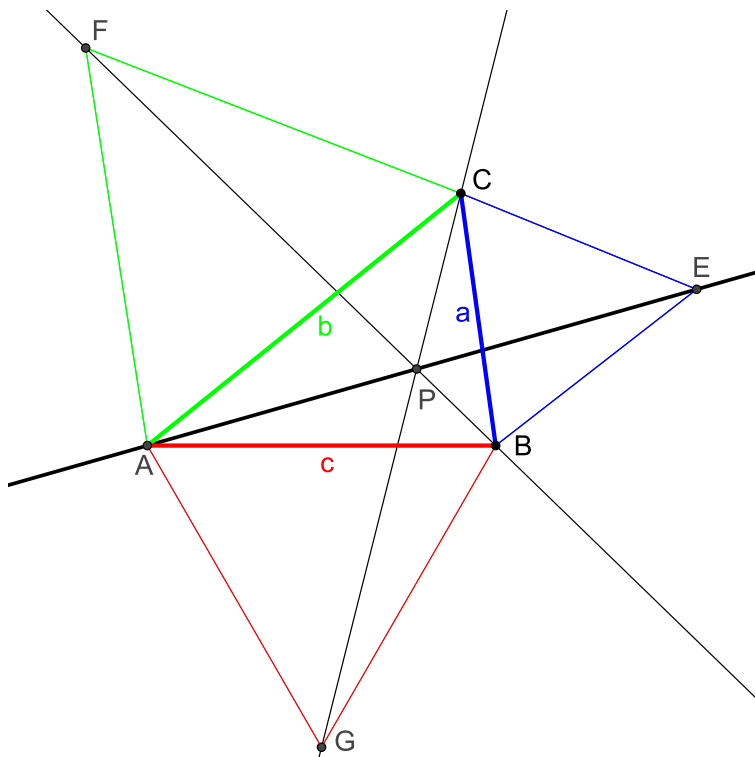


Abbildung 6: Ecktransversalen AE , BF und CG inzidieren

in Abhängigkeit von u , v , und w gewonnen werden kann. Daraus können die Koordinaten des Schnittpunkts P' berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 x_{P'} &= \frac{w(v^2 - u^2) + \sqrt{3} \cdot (u^2v + uv^2 + uw^2 + vw^2)}{6vw - 6uw + 2\sqrt{3} \cdot (u^2 + v^2 + w^2 - uv)} \\
 y_{P'} &= \frac{3uv(u - v) + \sqrt{3}w(v - u)^2 + w^2(v - u)}{6vw - 6uw + 2\sqrt{3} \cdot (u^2 + v^2 + w^2 - uv)}. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Tauscht man nun in $x_{P'}$ bzw. $y_{P'}$ die x -Koordinaten u und v und ersetzt $\sqrt{3}$ durch $-\sqrt{3}$, dann ändern sich die Werte von $x_{P'}$ bzw. $y_{P'}$ nicht. Damit ist die Existenz eines Schnittpunkts P der Ecktransversalen AE , BF und CG mit nur einer — allerdings aufwändigen — Rechnung nachgewiesen. (Das Schneiden der Ecktransversalen AE und BF ist technisch einfacher, zieht aber eine zweite — wieder komplexere — Schnittpunktberechnung nach sich.)

Bemerkung: Der Nenner von $x_{P'}$ und $y_{P'}$ in den Gleichungen 4.1 ist für alle u, v, w positiv. Bei ungleichen Vorzeichen von u und v ist dies wegen $u < v$ und $w > 0$ unmittelbar einsichtig. Ist dagegen $\text{sgn } u = \text{sgn } v$, dann halten wir uns $(u - v)^2 > 0$ vor Augen, woraus $u^2 + v^2 > 2uv > uv$ folgt. Für $v = 0$ ist $u < 0$ und damit der Nenner wieder positiv, für $u = 0$ ist wegen $v > 0$ auch in diesem Fall der Nenner positiv. Insgesamt sind also die Koordinaten des Schnittpunkts P für jedes Dreieck definiert.

Diese Vorgangsweise zum Nachweis eines gemeinsamen Schnittpunkts der Ecktransversalen zeigt eine Stärke der uvw -Sprache. Es geht nicht nur um die algebraische Berechnung, wenn gleich hierbei die in der Sekundarstufe I oftmals intensiv geübten Termumformungen sinnvoll angewendet werden können, sondern immer auch um die geometrische, d. h. dem Kontext folgende Interpretation der im algebraischen Gewand erhaltenen Ergebnisse.

4.2 Ein Korollar

In Abbildung 7 erkennen wir, dass der in Abschnitt 4.1 festgestellte Schnittpunkt P der drei Ecktransversalen AE , BF und CG eines Dreiecks ABC auf dem Umkreis des aufgesetzten Dreiecks BCE liegt.

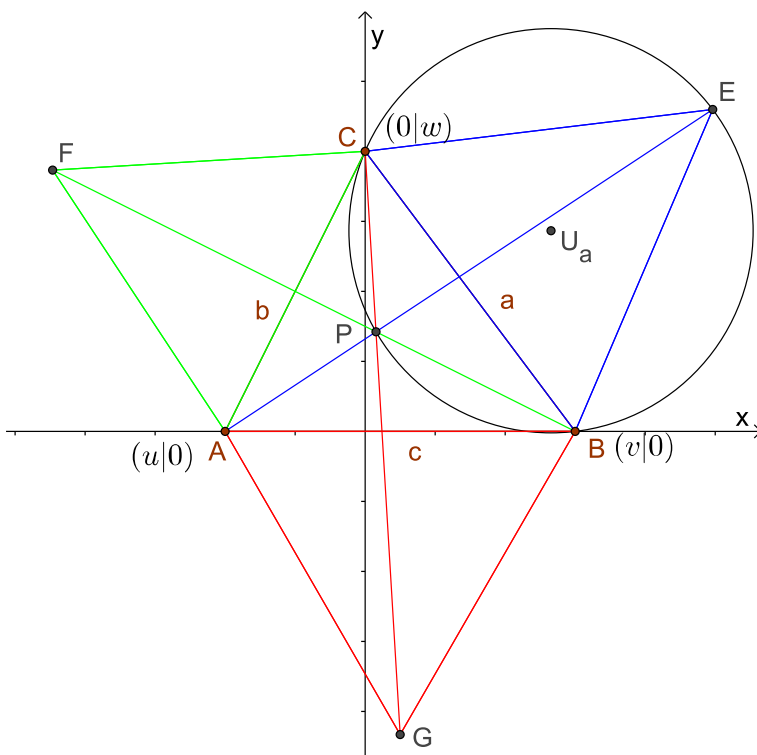


Abbildung 7: P inzidiert mit dem Umkreis des Dreiecks BCE .

Um dies nachzuweisen, berechnen wir erst den Umkreisradius des Dreiecks BCE gemäß der Formel $r = \frac{abc}{4A}$, wobei r der Umkreisradius eines Dreiecks mit den Seitenlängen a , b und c ist, und A sein Flächeninhalt. Damit erhalten wir

$$r = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{v^2 + w^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{v^2 + w^2}{3}} \quad \text{und} \quad r^2 = \frac{v^2 + w^2}{3}.$$

Der Abstand des Umkreismittelpunkts U_a zum Ecktransversalenschnittpunkt P ist mit der uvw -Sprache nur sehr komplex darzustellen. Dazu verwenden wir die in Abschnitt 4.1 berechneten Formeln 4.1 für die Koordinaten des Schnittpunkts P und das Ergebnis 3.1 aus Abschnitt 3.1:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{U_a P}|^2 &= \left(\frac{w(v^2 - u^2) + \sqrt{3}(u^2v + uv^2 + uw^2 + vw^2)}{6vw - 6uw + 2\sqrt{3}(u^2 + v^2 + w^2 - uv)} - \frac{3v + \sqrt{3}w}{6} \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{3uw(u - v) + \sqrt{3}w(v - u)^2 + w^2(v - u)}{6vw - 6uw + 2\sqrt{3}(u^2 + v^2 + w^2 - uv)} - \frac{3w + \sqrt{3}v}{6} \right)^2. \end{aligned}$$

Mathematica liefert mit dem FullSimplify-Befehl tatsächlich $\frac{1}{3}(v^2 + w^2)$ für $|\overrightarrow{U_a P}|^2$. Mit der Hand wäre dieses Ergebnis wohl kaum zu verifizieren. Hier ist also der Einsatz eines Computeralgebrasystems notwendig, wenn man

die *uvw*-Sprache zur Begründung des Korollars benützen möchte. Gleichzeitig wird so eine Grenze der Möglichkeiten dieser Methode an einem elementaren Beispiel deutlich.

Analog kann man zeigen, dass P auf dem Umkreis des aufgesetzten Dreiecks ACF und auf dem Umkreis des ebenfalls aufgesetzten Dreiecks ABG liegt.

Eine alternative, sehr einfache Begründung des Korollars³ fokussiert auf das Viereck $PBEC$ in Abbildung 7: Es hat einen (Innen-)Winkel von 120° beim Eckpunkt P (Abschnitt 2.4) und einen Winkel von 60° bei E nach Konstruktion. Damit ist $PBEC$ ein Sehnenviereck und hat daher einen Umkreis.

Allerdings ändert sich die Situation in Abbildung 7, wenn ein Innenwinkel des Ausgangsdreiecks ABC größer als 120° ist. Für den Grenzfall $\gamma = 120^\circ$ (das ist der Innenwinkel beim Eckpunkt C) liegen die Transversalen AE und BF auf den Seiten CE bzw. CF der aufgesetzten Dreiecke BCE bzw. ACF : Abbildung 8. Das vorhin angesprochene Sehnenviereck $PBEC$ degeneriert zum (gleichseitigen) Aufsatzdreieck BCE , und der FERMAT-Punkt $P = C$ liegt klarerweise auf seinem Umkreis.

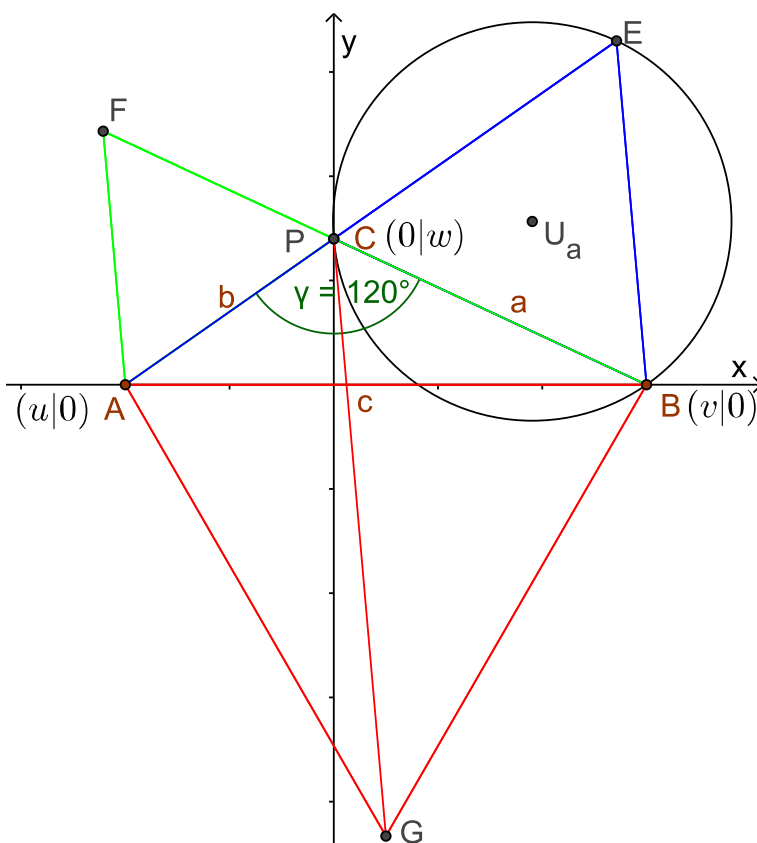


Abbildung 8: Für $\gamma = 120^\circ$ ist $P = C$.

Für $\gamma > 120^\circ$ liegt P außerhalb des Dreiecks ABC : Abbildung 9. Aus dem Viereck $PBEC$ in Abbildung 7 wird das Viereck $PCBE$ in Abbildung 9. Nun argumentieren wir nicht mehr mit dem Sehnenviereck, sondern mit der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes (vgl. Reichel & Humenberger 2012, S. 237 f.). Die Strecke BC wird vom Punkt P aus unter dem Winkel von 60° gesehen (Abschnitt 2.4), ebenso von E aus aufgrund der Konstruktion. Daher liegen sowohl P als auch E auf einem Kreisbogen über der Sehne BC .

³Hinweis in einem Gutachten

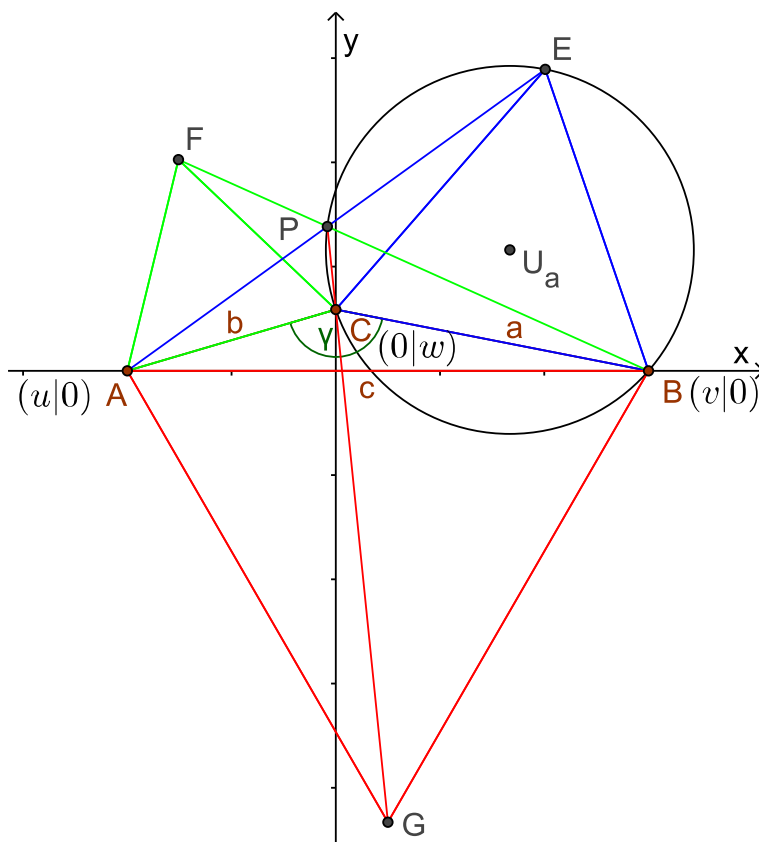


Abbildung 9: Für $\gamma > 120^\circ$ liegt P außerhalb des Dreiecks ABC .

Diese letzten Bemerkungen zeigen sehr schön Stärken und Schwächen der uvw -Sprache. Eine komplexe, nur mit Hilfe eines Computeralgebrasystems zu bewältigende Rechnung deckt drei elementargeometrische Fälle ($\gamma < 120^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, $\gamma > 120^\circ$) ab, die sich doch (stark) voneinander unterscheiden: Abbildungen 7, 8 und 9. Für die Rechnung sind diese verschiedenen geometrischen Situationen jedoch irrelevant. Dieser Einsicht folgend haben wir auch das Ergebnis von Abschnitt 2.4 ohne zusätzliche Überlegung verwendet.

5 Resümee

In den Regeln zur Anleitung des Geistes beschreibt DESCARTES ein Verfahren, von dem er sich erhoffte, dass es eine universelle Methode der Problemlösung darstellen würde. In Pólya, 1966, S. 47, wird es grob umrissen als die Transformation bzw. Reduktion eines beliebigen Problems in ein mathematisches. Dieses wird in ein algebraisches umgewandelt und daraus eine einzige Gleichung generiert, die es schließlich zu lösen gilt. Die uvw -Sprache ist im Allgemeinen keine elegante Methode, Sätze aus der Dreiecksgeometrie zu beweisen, sie bildet aber *cum grano salis* die Universalität einer Begründungsmethode auf eine nicht allzu kleine Anzahl von Problemen der Dreiecksgeometrie ab: vgl. Götz & Hofbauer, 2012, und Götz & Süß-Stepancik, 2015. Ihre Basis ist denkbar einfach: Abbildung 1, die Idee, ein gegebenes (geometrisches) Problem zu koordinatisieren, ist eine fundamentale: „1. Beschreibung von Punkten (im Sinne räumlicher Positionen) durch Koordinaten, verbunden mit ‚koordinatengebundener Anschauung‘ (Vorstellungen bezüglich des Einflusses von Koordinatenwerten auf die Lage von Punkten).“ wird in Henn & Filler, 2015, S. 8, als eine fundamentale Idee genannt, die grundlegend für die analytische Geometrie ist. Eine wei-

tere dazu passende basale Einsicht ist, dass jedes beliebige Dreieck in der Standardlage von Abbildung 1 mit $u < v$ und $w \neq 0$ darstellbar ist.

Mit der Einführung von Koordinaten bzw. der (speziellen) Wahl eines Koordinatensystems wird es möglich, (algebraische) Gleichungen zur Beschreibung von geometrischen Objekten und von Beziehungen zwischen ihnen aufzustellen. Diese Vorgangsweise wird in Henn & Filler, 2015, S. 8, ebenfalls als eine fundamentale Idee der analytischen Geometrie gewürdigt: „2. Beschreibung geometrischer Objekte (Kurven/Flächen mit den Spezialfällen Geraden/Ebenen) durch Gleichungen; Verständnis von Gleichungen als Bedingungen an Punkte bzw. Koordinatentupel, denen jeweils Teilmengen aller Punkte des Raumes genügen (welche die geometrischen Objekte darstellen); Transfer zwischen Gleichungen als algebraisch formulierten Bedingungen und der geometrischen Interpretation ihrer Lösungsmengen als Punktmengen.“

In den Abschnitten 2.2 und 3.1 sind die Rechnungen konsequent mit dem Ortsvektorkonzept angeschrieben worden. Obwohl dieses Konzept immer wieder kritisiert worden ist (vgl. z. B. Henn & Filler, 2015, S. 106 ff.), passt es hier gut aus folgendem Grund: es geht um das Finden von Koordinaten spezieller Punkte, und dazu werden vektorielle „Wege“ konzipiert, die im Ursprung des Koordinatensystems starten. Die spezielle Wahl der Lage des Ausgangsdreiecks ABC in Abbildung 1 wird so betont. Das in der Einleitung erwähnte Begründen geometrischer Sätze mit algebraischen Gleichungen wird durch das Vektorkonzept in dieser Arbeit realisiert, wobei allerdings das Betrachten ihrer Koordinaten zu den eigentlichen Schlüssen führt (im Gegensatz zum koordinatenfreien Arbeiten mit Vektoren, vgl. z. B. Abschnitt 3.2.5 in Henn & Filler, 2015).

Der Witz der *uvw*-Sprache ist es also, Standardaufgaben in der analytischen Geometrie, wie sie in der Sekundarstufe II gestellt werden, zum Begründen von elementargeometrischen Sätzen zu verwenden (vgl. Götz & Süß-Stepancik, 2015, und Götz & Hofbauer, 2012). In dieser Arbeit sind es vor allem die Resultate in den Abschnitten 2 und 3.1, die insbesondere bei Belegung von u , v und w mit konkreten Zahlen mittels solcher Standardaufgaben verifiziert werden können. Aus den in der Schule üblichen — oft bloß mechanischen, kalkülhaften — Berechnungen werden so (Ansätze von) Begründungen, die einer (geometrischen) Interpretation und Reflexion bedürfen. Das Umformen der auftretenden allgemeinen algebraischen Ausdrücke erfolgt nach den Regeln des Kalküls, und zielt zusätzlich auf ein zu zeigendes Ergebnis ab. Zweiteres unterscheidet diese Umformungen von jenen, die in den gängigen Schulbüchern z. B. der achten Schulstufe (siehe etwa Reichel & Humenberger, 2012, Abschnitt C „Elementare Algebra“) zu finden sind. Das rechnerische Kalkül bildet eine Brücke zwischen den algebraischen Gleichungen zu Beginn, die die geometrische Situation beschreiben, und einem algebraischen Ausdruck (das Resultat), der wieder geometrisch deutbar ist. Dieses zielgerichtete Umformen in seiner Gesamtheit kann leider in einem Artikel nicht adäquat dargestellt werden, aus Platzgründen und auch wegen des subjektiven Charakters dieser so grundlegenden mathematischen Tätigkeit. Irrwege, die auf Rechen- oder auch Vorzeichenfehler zurückgehen, oder solche, die zwar formal richtig, aber nicht zum gewünschten Resultat führen, können nur im Zuge des eigenen (Nach-)Rechnens erlebt werden. Der Leser bzw. die Leserin sei also herzlich eingeladen, die in der Arbeit angeführten Rechnungen (oder andere!) selbst durchzuführen!

Der Einsatz eines Computeralgebrasystems ist bei den in dieser Arbeit vorgestellten Problemen nur an einer — nicht zentralen — Stelle wirklich notwendig, nämlich für den Nachweis, dass P auf jedem der Umkreise der aufgesetzten Dreiecke liegt: Abschnitt 4.2. Hier zeigt sich das eingangs erwähnte Grobe der *uvw*-Sprache deutlich, quasi mit der Brechstange wird ein Nachweis erbracht. Allerdings werden so auch die Mächtigkeit und die Funktionalität moderner Computeralgebrasysteme für den Unterricht erschlossen.

Dynamische Geometriesoftware ist essentiell bei der Aufstellung von Vermutungen über geometrische Eigenschaften wie Invarianten in den Abschnitten 2.3 und 2.4, oder für das Finden der entscheidenden Einsicht für die Lösung von LEMOINE's Problem in Abschnitt 2.2. Dabei ist natürlich der Zugmodus das entscheidende Moment. Er liefert das Motiv für das Ansetzen entsprechender Rechnungen in der *uvw*-Sprache, und so wird das Erkunden mittels dynamischer Geometriesoftware zur Quelle für analytische Begründungen — hier in einem engen Themenfeld (auf ein allgemeines Dreieck aufgesetzte gleichseitige Dreiecke) — in einer standardisierten Umgebung.

Literatur

- Agricola, Ilka und Friedrich, Thomas: *Elementargeometrie. Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2009 (2., überarbeitete und erweiterte Auflage).
- Götz, Stefan und Hofbauer, Franz: Immer geradeaus in Dreiecken! Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft. *Praxis der Mathematik in der Schule*, Heft 44 / 54. Jahrgang / April 2012, S. 35–39 (mit einer Online-Ergänzung).
- Götz, Stefan und Reichel, Hans-Christian (Hrsg.): *Mathematik 5* von Robert Müller und Günter Hanisch. öbv, Wien 2010.
- Götz, Stefan und Süss-Stepancik, Evelyn: Die *uvw*-Sprache in der analytischen Geometrie. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Vorträge auf der 49. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 09.02.2015 bis 13.02.2015 in Basel*. Für die GDM herausgegeben von: Franco Caluori, Helmut Linneweber-Lammerskitten und Christine Streit. Band 1. WTM, Münster 2015, S. 312–315.
- Henn, Hans-Wolfgang und Filler, Andreas: *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2015.
- LEMOINE's problem. *Wikipedia, the free encyclopedia*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Lemoine's_problem, 25.6.2015.
- Pólya, Georg: *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. Band I*. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1966.
- Reichel, Hans-Christian und Humenberger, Hans (Hrsg.): *Das ist Mathematik 4. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 4. Klasse der allgemein bildenden höheren Schulen und der Hauptschulen*, von Dieter Litschauer, Herbert Groß, Vera Aue und Erich Neuwirth. öbv, Wien 2012.
- Schwarz, Björn und Herrmann, Philip: Bezüge zwischen Schulmathematik und Linearer Algebra in der hochschulischen Ausbildung angehender Mathematiklehrkräfte – Ergebnisse einer Dokumentenanalyse. *Mathematische Semesterberichte* 62 (2015), S. 195–217.
- Tietze, Uwe-Peter, Klika, Manfred und Wolpers, Hans (Hrsg.): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2. Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra* verfasst von Uwe-Peter Tietze unter Mitarbeit von Peter Schroth und Gerald Wittmann. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2000.
- Walser, Hans: *99 Schnittpunkte. Beispiele – Bilder – Beweise*. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2012 (2., bearbeitete und erweiterte Auflage).