

Negative Zahlen in der 6. Schulstufe

Eine aktive Erarbeitung neuer Grundvorstellungen

Andrea Karner¹, Lisa Meyer², Gabriele Sickl³

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1431>

Zusammenfassung

Der neue Lehrplan sieht vor, dass negative Zahlen bereits in der 6. Schulstufe erarbeitet werden. Neben dem Interpretieren, Darstellen und Vergleichen ganzer Zahlen sollen auch Summen und Differenzen der Form „ganze Zahl $\pm$ natürliche Zahl“ gebildet werden. In diesem Beitrag wird ein didaktisch-methodischer Ansatz vorgestellt, der auf die aktive Erarbeitung von Grundvorstellungen setzt. Ein Temperaturmodell bildet die Grundlage, um den Zahlenraum mit verschiedenen Sinnen zu erfassen. Durch gezielte Vorstellungsübungen und Aktivitäten entwickeln die Schüler*innen tragfähige Grundvorstellungen, die ihnen helfen, Rechenoperationen als Bewegung auf der Zahlengeraden zu visualisieren und sicher durchzuführen.

Stichwörter: Negative Zahlen, Temperaturmodell, Zahlengerade

1. Einleitung

Viele Lehrpersonen bestätigen, dass die Einführung in das Thema der negativen Zahlen anfänglich oft auf positive Resonanz stößt. Doch die Leichtigkeit, die zu Beginn durch Alltagsbezüge wie Temperaturangaben, Stockwerke oder Meereshöhe entsteht, verliert sich schnell, sobald die Komplexität des Themas zunimmt. Dies wird spätestens bei der Einführung der Multiplikation von negativen Zahlen deutlich, da zu den Rechenregeln nur schwer Alltagsbezüge hergestellt werden können (Malle, 2007, S. 57). Verwirrungen treten häufig auf, wenn die Regel „Minus mal Minus ergibt Plus“ für Multiplikationen, nicht jedoch für Addition oder Subtraktion, bzw. nur lediglich im Kontext der Klammerauflösung angewendet werden kann. Um zu verstehen, dass eine Addition wie $(-1) + (-2)$ nicht zu einem positiven Ergebnis führt, müssen tragfähige Grundvorstellungen entwickelt werden, die es den Schüler*innen ermöglichen, sich sicher im Themenfeld zu bewegen.

¹ Pädagogische Hochschule Steiermark, Hasnerplatz 12, 8010 Graz.

E-Mail: andrea.karner@phst.at

² Praxismittelschule der Pädagogischen Hochschule Steiermark, Hasnerplatz 12, 8010 Graz.

³ Praxismittelschule der Pädagogischen Hochschule Steiermark, Hasnerplatz 12, 8010 Graz.

Hier setzt die Lehrplanänderung an. Die nun frühere Einführung negativer Zahlen soll den Schüler*innen helfen, negative Zahlen zu interpretieren, darzustellen sowie zu vergleichen und sie auf das Rechnen mit diesen vorbereiten. Ein besonderer Schwerpunkt liegt dabei auf der Darstellung von Additionen und Subtraktionen der Form „ganze Zahl $\pm$ natürliche Zahl“ als Bewegungen auf der Zahlengeraden. Ziel ist es, nicht nur die Rechenoperationen zu üben, sondern auch grundlegende mathematische Vorstellungen zu entwickeln.

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit der didaktischen Vermittlung des Themas und dem gezielten Einsatz von praktischen Beispielen und Modellen zur Unterstützung des Lernprozesses.

2. Negative Zahlen im Lehrplan der 6. Schulstufe

Der neue Lehrplan für die Sekundarstufe 1 wurde zu Beginn des Jahres 2023 verabschiedet und trat mit dem Schuljahr 2023/24 in Kraft. Im Fach Mathematik wurden darin inhaltliche Anpassungen vorgenommen, die unter anderem das Themenfeld der ganzen Zahlen betreffen. Während im bisherigen Lehrplan die negativen Zahlen erst in der 7. Schulstufe behandelt wurden, ist ihre Einführung nun für die 2. Klasse der Sekundarstufe 1 vorgesehen (BMBWF, 2023).

Das Ziel in der 6. Schulstufe ist es, den Schüler*innen das Interpretieren, Darstellen und Vergleichen negativer Zahlen zu vermitteln sowie sie auf das Rechnen mit negativen Zahlen vorzubereiten. Dies erfolgt durch das Bilden von Summen und Differenzen in der Form „ganze Zahl $\pm$ natürliche Zahl“, wobei die Operationen als Bewegungen auf der Zahlengeraden verstanden werden sollen. Die Schüler*innen sollen diese Berechnungen nicht nur durchführen, sondern auch deren Bedeutung begreifen. Ein praktisches Beispiel für die Anwendung stellt das Verschieben von Figuren im Koordinatensystem dar (BMBWF, 2023).

Die zeitlich vorverlegte Einführung des Inhalts beruht auf der Annahme, dass Schüler*innen bereits früh Vorkenntnisse zu diesem Thema haben und ein Alltagsverständnis entwickeln. Dieses Verständnis soll in der 6. Schulstufe genutzt werden, um „tragfähige flexible mentale Modelle“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 3) zu schaffen, und die Grundlage für die Objektivierung negativer Zahlen zu bilden (Malle, 2007, S. 52 f.). Durch den frühzeitigen Aufbau dieser Grundlagen wird eine stabile Basis für die 7. Schulstufe geschaffen, die ein nahtloses Weiterarbeiten ermöglicht. Dadurch werden auch fehlerhafte Überlagerungen von Vorstellungen über die Bewegung auf der Zahlengeraden bei der Addition und Subtraktion und anderen Rechenregeln für ganze Zahlen vermieden.

3. Die Entstehung negativer Zahlen nach Malle (2007)

Malle (2007, S. 52 f.) beschreibt in einem vierstufigen Modell die Entstehung negativer Zahlen (siehe Abbildung 1). Zu Beginn werden negative Zahlen noch nicht als eigenständige Denkobjekte betrachtet, sondern als spezielle Interpretation natürlicher Zahlen verstanden. Erst durch das Durchlaufen aller vier Stadien wird eine Objektivierung erreicht, die negative Zahlen als eigenständige Denkobjekte in die mathematischen Prozesse integriert.



Abbildung 1: Die vier Entwicklungsstadien negativer Zahlen nach Malle (2007, S. 52 f.)

Im Folgenden werden die vier Entwicklungsstadien nach Malle (2007) beschrieben und zugehörige Herausforderungen aufgezeigt.

3.1 Vorkenntnisse und Alltagsverständnis negativer Zahlen

Kinder entwickeln frühzeitig ein Alltagsverständnis für negative Zahlen (Malle, 2007, S. 52). Dies geschieht beispielsweise, wenn sie ein Thermometer mit Minusgraden betrachten oder der Lift im 2. Untergeschoss stehen bleibt. Sie sind auch sehr früh in der Lage, die entsprechenden Werte zu interpretieren und in einigen Fällen einfache Rechenoperationen wie „Ausgangszustand + Veränderung = Endzustand“ durchzuführen (Malle, 2007, S. 52).

Obwohl es den Anschein hat, dass Kinder die Komplexität der negativen Zahlen erfasst haben, denken sie zunächst in den ihnen vertrauten natürlichen Zahlen und nehmen Interpretationen vor, die ihrem Alltagsverständnis entsprechen. Ein Beispiel dafür ist „ein Stockwerk über und ein Stockwerk unter dem Erdgeschoss“. Dazu ist nicht einmal ein Vorzeichen erforderlich.

Malle (2007, S. 54) leitet aus eigenen empirischen Daten ab, dass Kinder anfangs abstrakte Schemata zur Lösung von Aufgaben mit negativen Zahlen entwickeln. Dazu zählen primär Richtungsschemata aus ihren Alltagserfahrungen (z.B. „Wenn die Temperatur von 3°C um 4°C sinkt, dann ist sie unter Null.“). Diese Richtungsschemata führen jedoch nicht automatisch zu den Eigenschaften ganzer Zahlen, die die Grundlage für die Addition und Subtraktion in diesem Zahlbereich bilden.

Trotz des vorhandenen Vorwissens und Alltagsverständnisses darf fälschlicherweise nicht davon ausgegangen werden, dass mit der Verwendung eines Thermometers auch automatisch der Bezug zur Zahlengerade hergestellt und Temperaturveränderungen dargestellt werden können.

So zeigt auch das Beispiel von Malle (2007, S. 53), dass die Schüler*innen im Allgemeinen Aufgaben zu Temperaturveränderungen „zwar sofort lösen konnten, aber die größten Schwierigkeiten hatten, ihre Lösung auf einer Zahlengeraden darzustellen“. Zum Beispiel stellten sie die Anfangs- und Endtemperatur auf zwei verschiedenen Thermometern dar. Manchmal versuchten sie sogar, die Temperaturveränderung auf einem dritten Thermometer einzutragen. Dieses Beispiel zeigt, dass ein bewusstes Erarbeiten der Zahlengeraden und damit eine Hinführung zur Entwicklungsstufe 2 notwendig ist.

3.2 Erster Anstoß zur Objektivierung der negativen Zahlen (Ordnung)

Die zweite Entwicklungsstufe nach Malle (2007) stellt die Ordnung der ganzen Zahlen in den Mittelpunkt. Während es bei den natürlichen Zahlen eine klare Wertvorstellung von „links – kleiner“ und „rechts – größer“ gibt, ist diese bei den ganzen Zahlen nicht mehr gegeben. Zudem ist ein verändertes Verständnis von mehr und weniger erforderlich (Ulovec, 2007, S. 16), da im Bereich der negativen Zahlen andere Wertigkeiten vorliegen. Dies wird besonders beim Vergleich ganzer Zahlen deutlich (Malle, 2007, S. 54). Die Frage, welche Zahl kleiner ist – „-6 oder -3?“ –, lässt sich mit dem Alltagsverständnis beantworten, indem darauf hingewiesen wird, dass -6°C kälter ist als -3°C . Beim Vergleich der Zahlenwerte auf der Zahlengeraden kann es jedoch zu Irritationen kommen, da im gewohnten System der natürlichen Zahlen eine andere Ordnung herrscht als im Bereich der negativen Zahlen, die spiegelbildlich verläuft.

Geht es um die Ordnung ganzer Zahlen, so spielt der Umgang mit der Zahlengeraden eine entscheidende Rolle. Ein Beispiel hierfür ist das *divided number line model*, das bei vielen Schüler*innen zu Verständnisschwierigkeiten führt (Peled et al., 1989, S. 108).

Bei diesem Modell wird die Zahlengerade in zwei Bereiche unterteilt – links und rechts der Null (siehe Abbildung 2). Bei der Verwendung dieser Sichtweise neigen Schüler*innen dazu, die Zahlen anhand ihres Abstands zur Null zu interpretieren bzw. zu vergleichen (Peled et al., 1989, S. 108). Diese Fokussierung auf die Null kann jedoch dazu führen, dass die Zahlengerade dauerhaft als zweigeteilt wahrgenommen wird. Dies schränkt die Flexibilität im Umgang mit der Zahlengeraden ein.

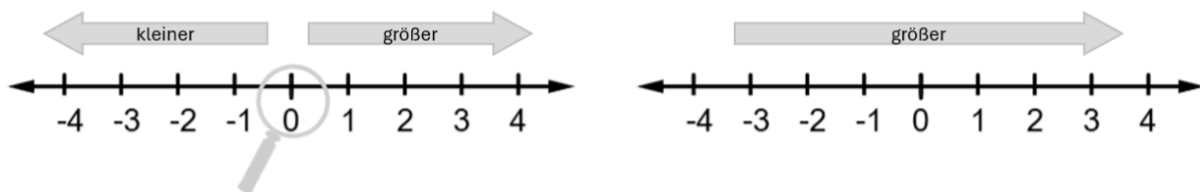


Abbildung 2: *divided number line* & *continuous number line model* nach Peled et al. (1989, S. 108)

„Erst die Vorstellung, das Vorwärtszählen durchgehend von unten/links nach oben/rechts zu betreiben, bringt es wieder mit der Ordnung in Einklang“ (Winter, 1989, S. 23). Daher sollte das *continuous number line model* (siehe Abbildung 2) angestrebt werden (Peled et al., 1989, S. 108), bei dem die Schüler*innen die Zahlengerade als durchgehende Einheit begreifen und kontinuierlich von links nach rechts zählen. Dies vereinfacht den Größenvergleich (Dögnitz, 2022, S. 279).

Grundsätzlich fördert diese Vorstellung die Entwicklung tragfähiger und flexibler mentaler Modelle für mathematische Konzepte, die den Schüler*innen in ihrem weiteren Lernen zugutekommen (Padberg & Wartha, 2017, S. 3).

3.3 Addition und Subtraktion negativer Zahlen

Während im zweiten Stadium negative Zahlen als Größen und Zählzahlen verstanden werden, werden sie im dritten Stadium als Operatoren interpretiert (Dögnitz, 2022, S. 280). Mit der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen wird auch die Unterscheidung zwischen Rechenzeichen und Vorzeichen relevant. Diese Differenzierung wird durch die Einführung von Klammerausdrücken verdeutlicht.

Bei der Unterscheidung von Rechenzeichen und Vorzeichen können Darstellungen oder Bewegungen auf der Zahlengerade hilfreich sein. Schließlich zeigt die Bewegung, die in die entgegengesetzte Richtung durchgeführt wird, dass die Subtraktion einer ganzen Zahl auf die Addition der Gegenzahl zurückgeführt werden kann (Malle, 2007, S. 55).

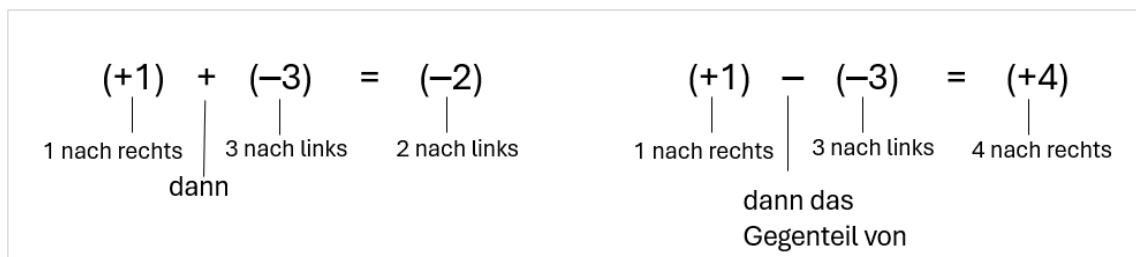


Abbildung 3: Additionen ganzer Zahlen mit Bewegungshinweisen (Malle, 2007, S. 55)

Laut Malle (2007, S. 54) wird häufig die einfachere Schreibweise ohne Klammern bevorzugt, da mit dieser noch in den „alten Zahlen“ (natürlichen Zahlen mit Interpretation) gedacht werden kann. Diese Vorgehensweise ist jedoch mathematisch nicht korrekt, denn die Summe von 3 und -7 kann nicht mit $3 - 7$ dargestellt werden, weil dieser Ausdruck eine Subtraktion beschreibt.

Wenn die zugehörigen Grundvorstellungen fehlen, kann es bei der Bearbeitung der Aufgaben zu falschen Lösungen kommen. Dies wird in Abbildung 4 deutlich, in der $(-5) + (-3)$ nicht Minus, sondern Plus 8 ergibt. Hier kann davon ausgegangen werden, dass die Rechenregel aus der Multiplikation „Minus mal Minus ergibt Plus“ angewendet wurde. Darüber hinaus können undifferenzierte Vorgehensweisen im Umgang mit Rechenoperationen und Vorzeichen die Folge sein (siehe Abbildung 4 links).

$$(-5) + (-3) = +8$$

$$(-5) + (-3) =$$

$$+5 - 3 = \underline{+2}$$

Abbildung 4: Addition ganzer Zahlen – fehlerhafte Lösungen

3.4 Der endgültige Anstoß zur Objektivierung (Multiplikation)

Während bei der Ordnung sowie der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen negative Zahlen noch als eigenständige Denköbjekte vermieden werden können, trifft dies bei der Multiplikation ganzer Zahlen nicht mehr zu. In diesem Bereich sind die Vorzeichenregeln (z. B. Minus mal Minus ergibt Plus) mit der Auffassung von negativen Zahlen als „alte Zahlen mit einer zusätzlichen Interpretation“ nicht mehr vereinbar. Dies führt zu einem entscheidenden Schritt hin zur Objektivierung der negativen Zahlen (Malle, 2007, S. 57). Da nach Malle keine Alltagsbezüge mehr hergestellt werden können, müssten die Vorzeichenregeln der Multiplikation per Definition festgelegt werden.

Für das „Zauberkessel“-Temperaturmodell ist dies jedoch möglich, weil sich die Multiplikation als wiederholtes Hinzufügen oder Wegnehmen von Wärme- und Kältesteinchen veranschaulichen lässt. Da sich dieser Beitrag auf die 6. Schulstufe des österreichischen Lehrplans konzentriert, wird dieser Aspekt hier nicht weiter behandelt. Im Folgenden wird eine unterrichtspraktische Reihe mit dem „Zauberkessel“-Temperaturmodell vorgestellt.

4. Das „Zauberkessel“-Temperaturmodell

Mit dem „Zauberkessel“-Temperaturmodell bietet sich eine Möglichkeit, die Schüler*innen bei ihren Vorstellungen abzuholen und zu der Ordnung ganzer Zahlen hinzuführen. Temperaturen lassen sich über ein Thermometer ablesen, welches dann als Zahlengerade interpretiert werden kann. Temperaturen „im Minus“ bedeuten Werte unter dem Gefrierpunkt (z. B. unter 0°C) und werden als negative Zahlen betrachtet. Temperaturen „im Plus“ liegen über dem Gefrierpunkt und werden als positive Zahlen aufgefasst.

Es ist wichtig zu betonen, dass dieser Ansatz eine vereinfachte (teilweise unzulässige) Darstellung der physikalischen Gesetze erfordert. Beispielsweise könnte für das Element Wasser der Zahlenbereich von -100°C bis +100°C verwendet werden. Bicker und Schütte-Seitz (2020, 16 f.) schlagen in ihrem Unterrichtsentwurf „Der Zauberkessel“ vor, eine Fantasiewelt zu nutzen, um den physikalischen Gesetzen zu entkommen.

Allgemeingültige Temperaturmodelle können in vielen Fällen jedoch nur für den Einstieg in die Thematik verwendet werden, da sie nicht universell bzw. international einsetzbar sind. So

weist Schindler (2014, S. 103) in Bezug auf die Untersuchungen von Borba (1995, S. 229) darauf hin, dass es nicht auf allen Breitengraden der Erde Minusgrade gibt und es daher nicht für alle Kinder möglich ist, Alltagsbezüge zu Minusgraden herzustellen.

Bei Auseinandersetzung mit negativen Zahlen können die Schüler*innen auf verschiedene Zahlaspekte (kardinal und/oder ordinal) oder auch Darstellungsformen (kontextuell und/oder formal-symbolisch) fokussieren, die – wie die Pfeile in Abbildung 5 zeigen – miteinander in Zusammenhang stehen (Schindler, 2014, S. 85 f.).

In Bezug auf die Dimension der Darstellungsformen nimmt das Thermometer eine wichtige kontextuelle Rolle ein. Formal-symbolisch lernen die Schüler*innen, dass die negativen Zahlen mit Klammern zu versehen sind. Die Klammerschreibweise kommt vor allem dann zum Tragen, wenn Addition und Subtraktion vom Bereich der natürlichen Zahlen auf die ganzen Zahlen ausgeweitet werden (Malle, 2007, S. 54).

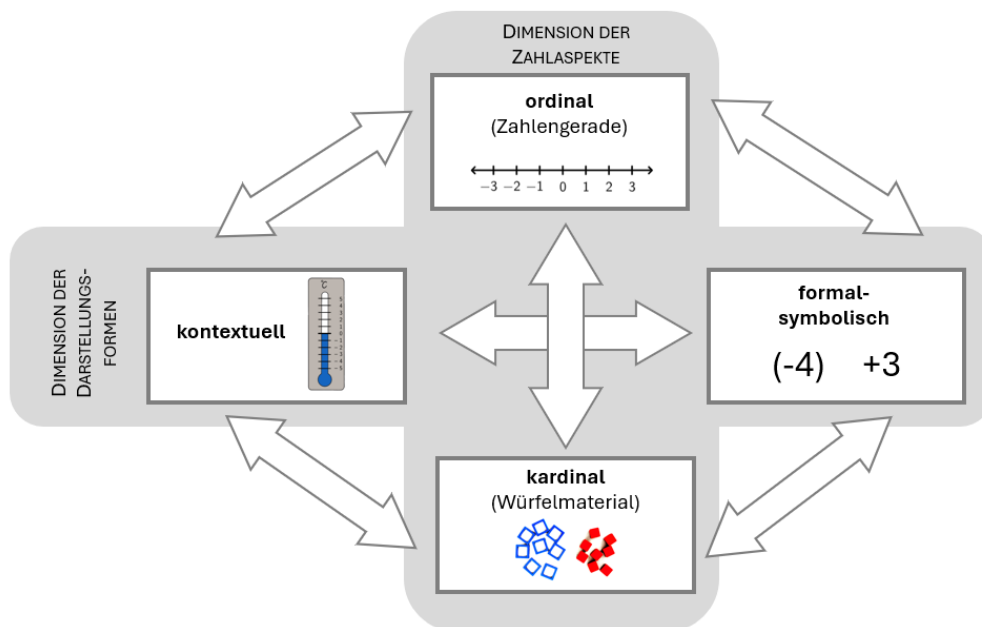


Abbildung 5: Fokussierungsebenen – Temperatur in Anlehnung an Schindler (2014, S. 93)

Auch wenn die negativen Zahlen aufgrund des Thermometers meist ordinal, d.h. nach ihrer Reihenfolge, interpretiert werden, gibt es die Möglichkeit, diesen Zahlenbereich kardinal, also mit der Darstellung von Mengen, zu betrachten.

Wittmann (2024, S. 68) greift zum Beispiel den Kardinalzahlaspekt auf, indem er ganze Zahlen mit schwarzen und roten Plättchen repräsentiert. In Anlehnung daran gibt es ein Würfelmaterial, bei dem die positiven Zahlen mit Würfeln und die negativen Zahlen mit Rahmen dargestellt werden. In Abbildung 5 werden diese Formen entsprechend der Farbco-dierung der Temperaturen mit rot und blau präsentiert.

5. Eine unterrichtspraktische Reihe zum „Zauberessel“-Temperaturmodell

Im folgenden Abschnitt wird eine unterrichtspraktische Reihe vorgestellt, die auf den Arbeiten von Bicker und Schütte-Seitz (2020) basiert. In ihrem Beitrag „Was hast du dir vorgestellt?“ präsentieren die Autorinnen Vorstellungsübungen, die sich gut als Einstieg für die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen eignen. Elemente dieser Übungen werden in Abschnitt 5.3 aufgegriffen. Die Weiterentwicklung des Konzepts umfasst Unterrichtsabschnitte, die sich auf das Interpretieren, Darstellen und Vergleichen negativer Zahlen konzentrieren, um so die Schüler*innen auf das Rechnen mit negativen Zahlen vorzubereiten. Auf die Multiplikation, dargestellt durch das wiederholte Hinzufügen und Wegnehmen von Wärme- und Kältesteinen, wird verzichtet, da es sich um einen Inhalt der 7. Schulstufe handelt.

5.1 Alltagsbezüge zu Temperaturen mit Wärme- und Kältesteinen

Wird der Fokus auf einzelne Temperaturwerte gelegt, können diese in einem handlungsorientierten Unterricht anhand von Wärme- und Kältesteinen repräsentiert werden (siehe Abbildung 6). Sie lassen sich mit verschiedenen Sinneswahrnehmungen verbinden. So kann nicht nur zwischen blau und rot unterschieden werden, sondern es können auch Assoziationen wie blau – kalt – negativ und niedrige Temperatur sowie rot – warm – positiv und höhere Temperatur hergestellt werden.

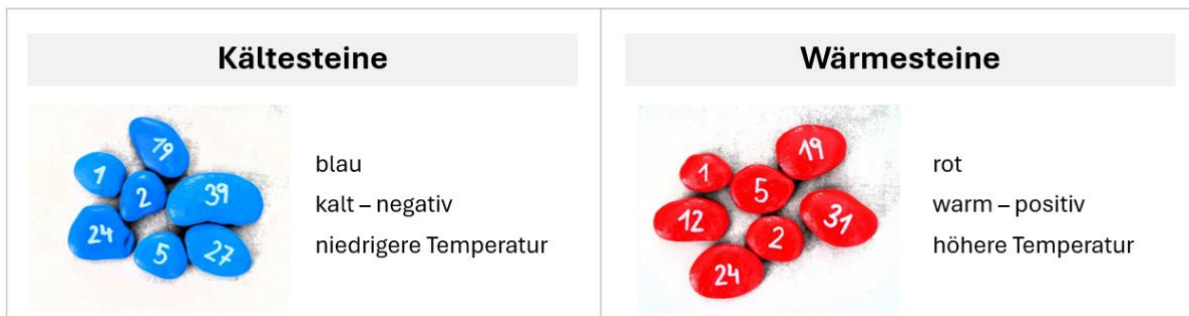


Abbildung 6: Kälte- und Wärmesteine

Zu Beginn der Unterrichtsreihe lernen die Schüler*innen die Wärme- und Kältesteine kennen. Sie erfahren, dass die roten Steine warm und die blauen Steine kalt sind. Die Zahlen auf den Steinen geben den Temperaturwert an und zeigen, wie warm oder kalt jeder Stein ist.

Um die Aktivierung der Sinne und den Bezug zu Alltagserfahrungen zu fördern, kann bei der Einführung ein Stein schauspielerisch fallengelassen werden, um zu verdeutlichen, dass er besonders warm oder sogar heiß ist.

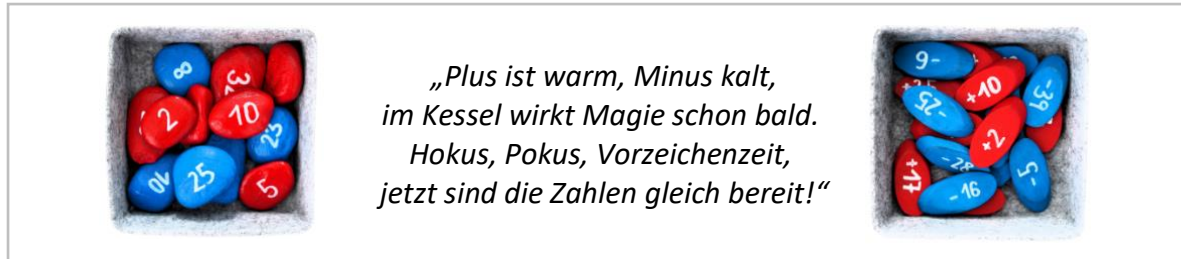


Abbildung 7: Wärme- und Kältesteine mit und ohne Vorzeichen

Auch wenn dies nicht dem Entwicklungsmodell von Malle (2007) entspricht, können bereits am Beginn der Unterrichtsreihe die Vorzeichen eingeführt werden. Mit einem Zauber, der durch einen passenden Spruch begleitet wird, erhalten die Steine ihre Vorzeichen. Dazu werden zwei verschiedene Sets an Steinen vorbereitet (siehe Abbildung 7).

5.2 Aufbau der Ordnung mit Wärme- und Kältesteinen

Im „Zauberkessel“-Temperaturmodell wird die Ordnung ganzer Zahlen durch die Aneinanderreihung von Wärme- und Kältesteinen repräsentiert. Durch diese Darstellung, die der Zahlengeraden ähnelt, können Schüler*innen negative Zahlen in einer kontinuierlichen, linearen Anordnung begreifen und erkennen, „dass die Ordnung ganzer Zahlen eine Definition ist“ (Malle, 2007, S. 54). Die Grundlage der Erkenntnis bildet der Vergleich von Wärme- und Kältesteinen und der Aufbau der Zahlengeraden.

5.2.1 Wärmer oder kälter? – Ganze Zahlen vergleichen

Zu Beginn wird eine Impulsfrage gestellt, um ganze Zahlen miteinander zu vergleichen: „Welche Steine sind angenehm kühl, welche sind eiskalt?“ Dies dient als Vorübung für den Aufbau der Zahlengeraden.



Abbildung 8: Vergleich von Kältesteinen

Verschiedene weitere Fragen regen die Schüler*innen an, die Steine hinsichtlich ihrer Eigenschaften zu vergleichen und zu beschreiben. Zunächst werden nur rote oder nur blaue Steine miteinander verglichen. Im nächsten Schritt erfolgt der Vergleich zwischen roten und blauen Steinen.

5.2.2 Von der Anordnung von Wärme- und Kältesteinen zur Zahlengeraden

Alle Schüler*innen erhalten einen Wärme- bzw. einen Kältestein und werden aufgefordert, zunächst die roten Steine entsprechend ihres Wertes der Reihe nach auf dem Boden

aufzulegen. Im zweiten Durchgang kommen die blauen Steine dazu und der Zahlenstrahl wird zu einer Zahlengeraden erweitert. Dadurch wird den Schüler*innen der gespiegelte Aufbau der Werte auf der Geraden veranschaulicht.

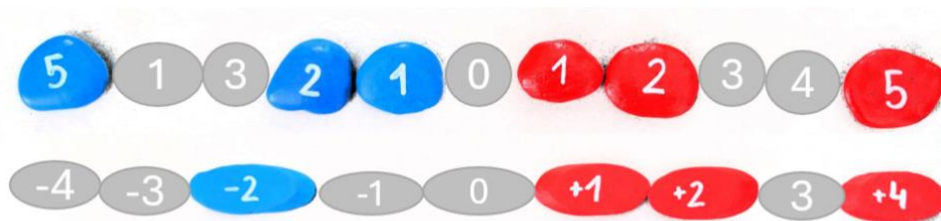


Abbildung 9: „Auffüllen“ der Zahlengerade mit Wärme- und Kältesteinen mit und ohne Vorzeichen

Da unterschiedliche Steine zur Verfügung stehen, muss die Zahlengerade „aufgefüllt“ werden (siehe Abbildung 9). Dies ist „ein erster Schritt zu einer tragfähigen ordinalen Zahlvorstellung“ (Schulz & Wartha, 2021, S. 30).

Ein weiterer Legedurchgang, bei dem auf die fortlaufende Struktur und Anordnung der ganzen Zahlen geachtet wird, hilft den Schüler*innen, die Zahlengerade als kontinuierliches System (*continuous number line model*) zu verstehen (Peled et al., 1989, S. 108).

Im Anschluss folgt der Übergang zur Definition und Objektivierung des Gelernten. Auf der Tafel wird die 0 festgelegt und daraufhin die Zahl +1 auf der Zahlengeraden eingezeichnet. Auf der gegenüberliegenden Seite wird die Gegenzahl –1 gekennzeichnet. Diese Schritte werden dann in das Heft übertragen, sodass die Schüler*innen die Zahlengerade mit den definierten Zahlen und deren Beziehungen nachvollziehen können.

Zur Festigung eignen sich verschiedene Vergleichs- und Ordnungsübungen, wie zum Beispiel der Gegenüberstellung von Wärme- und Kältesteinen, wobei der Fokus auf die Zahlwerte gelegt wird. Eine weitere Übung ist „Wärmer oder Kälter“ – ein Rechenspiel von Bicker und Schütte-Seitz (2020). Zudem können Arbeitskärtchen mit unterschiedlichen Aufgabenstellungen zum Thema Zahlengerade eingesetzt werden.

5.3 Addition und Subtraktion mit dem Zauberkessel: Wärme- und Kältesteine hinzufügen oder wegnehmen

Der Unterrichtsabschnitt zur Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen baut auf der Vorstellungsübung von Bicker und Schütte-Seitz (2020) auf. Dabei ist die Verbindung mit der Bewegung auf der Zahlengeraden ein zentrales Element im vorliegenden Unterrichtsvorschlag.

5.3.1 Ganze Zahlen mit dem „Zauberkessel“-Temperaturmodell addieren und subtrahieren

Um das Addieren und Subtrahieren ganzer Zahlen mit dem „Zauberkessel“-Temperaturmodell darstellen zu können, sind in Anlehnung an den Unterrichtsentwurf von Bicker und Schütte-Seitz (2020) Kälte- und Wärmesteine sowie ein Kessel in Form einer Schale erforderlich. Im Fokus steht die Temperatur im Zauberkessel, die einen bestimmten Ausgangswert annimmt.

Eine Veränderung der Temperatur erfolgt durch das Hinzufügen oder Wegnehmen eines Wärmesteins (oder Kältesteins in der 7. Schulstufe). Das Ergebnis wird durch den Endzustand beschrieben, also die endgültige Temperatur im Zauberkessel.

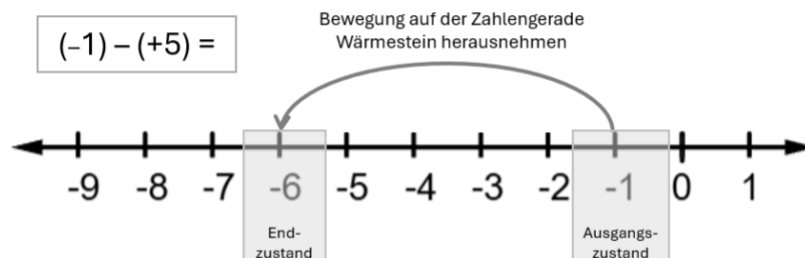


Abbildung 10: Subtraktion ganzer Zahlen – Zauberkessel in Verbindung mit der Zahlengeraden

Diese Zustandsänderungen können gleichzeitig auf der Zahlengerade abgebildet werden, wobei das Hinzufügen oder Wegnehmen eines Steins einer Bewegung auf der Zahlengerade entspricht. Wie aus der Darstellung in Abbildung 10 hervorgeht, wird bei der Entnahme eines Wärmesteins die Temperatur im Zauberkessel noch niedriger.

5.3.2 Wärme- und Kältesteine und die Temperatur im Zauberkessel

Im Rahmen einer Vorstellungsübung reisen die Kinder in einen Wald, in dem sich ein Zauberkessel mit Temperaturanzeige befindet. Sie beobachten einen Zauberer, der aus dem Zauberkessel Wärme- und Kältesteine entnimmt oder ihm hinzufügt.

Nach der Vorstellungsübung folgt eine Reflexionsphase, in der die Schüler*innen im Heft folgendes festhalten: „Was passiert, wenn ich einen roten oder blauen Stein in den Zauberkessel hineingebe oder aus ihm herausnehme?“ Ebenso notieren sie ihre Erkenntnisse im Heft und haben auch die Möglichkeit, einen Zauberkessel zu zeichnen (siehe Abbildung 11).

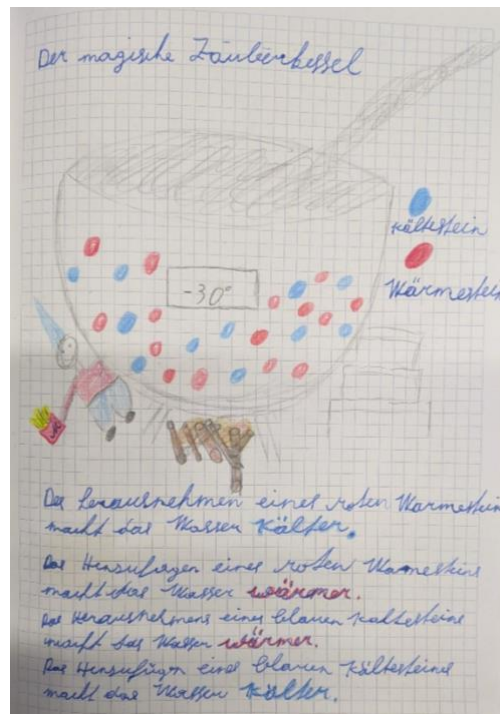


Abbildung 11: Hefteintrag

In der 6. Schulstufe werden einer Ausgangstemperatur im Bereich der ganzen Zahlen nur Wärmesteine hinzugefügt oder weggenommen, da laut Lehrplan in dieser Stufe nur Additionen und Subtraktionen der Form „ganze Zahl $\pm$ natürliche Zahl“ vorgesehen sind. Leistungsstärkere Schüler*innen können selbstverständlich zum Weiterdenken angeregt werden und alle möglichen Fälle (siehe Abbildung 12) durchspielen.

Schulstufe	Veränderung
6.	$+$ (+) + Wärmestein hinzufügen $\rightarrow$ Ausgangstemperatur wird höher
	$-$ (+) - Wärmestein wegnehmen $\rightarrow$ Ausgangstemperatur wird niedriger
7.	$+$ (-) - Kältestein hinzufügen $\rightarrow$ Ausgangstemperatur wird niedriger
	$-$ (-) + Kältestein wegnehmen $\rightarrow$ Ausgangstemperatur wird höher

Abbildung 12: Zustandsveränderungen im Zauberkessel

5.3.3 Von den Wärme- und Kältesteinen zur Bewegung auf der Zahlengerade

Im nächsten Unterrichtsabschnitt werden ausgehend von den Bewegungen der Wärme- und Kältesteine Additionen und Subtraktionen als Bewegungen auf der Zahlengerade dargestellt.

Dazu wird eine (Zahlen)gerade mit Klebeband auf dem Gang markiert. Die Schüler*innen versammeln sich um diese, während die Lehrperson neben dem Zauberkessel steht und die Vorgehensweise erklärt: Die Ausgangstemperatur liegt beispielsweise bei -2°C . Die Lehrperson begibt sich auf diese Position auf der Zahlengerade. Ein Wärmestein, zum Beispiel $+3$, wird nun „weggenommen“, und die Lehrperson bewegt sich drei Abschnitte nach links, sodass sie bei -5 steht. Danach sind die Schüler*innen an der Reihe. Sie erhalten Aufträge bzw. Auftragskarten und führen die Additionen und Subtraktionen eigenständig auf der Zahlengerade durch. Als zusätzliches Spiel können die Schüler*innen die Bewegungen auf einer ausgedruckten Zahlengeraden ausführen, die auf dem Tisch liegt. Dabei werden Spielkegel entsprechend der gewürfelten Augenzahl bewegt.

Eine besondere Beachtung sollen dabei „Übergänge über die 0“ finden, damit die Schüler*innen die Zahlengerade als durchgehende Einheit begreifen.

Resümee

Mit dem neuen Lehrplan ist das Thema der negativen Zahlen nun in der 6. Schulstufe fest verankert. Die Schüler*innen sollen negative Zahlen darstellen, interpretieren sowie vergleichen und grundlegende Vorstellungen entwickeln, um erste Additionen und Subtraktionen als Bewegungen auf der Zahlengeraden durchzuführen. Der Übergang von Alltagsvorstellungen zu mathematischen Definitionen spielt in dieser Stufe eine entscheidende Rolle und unterstützt das Weiterlernen im 7. Schuljahr.

Allerdings stoßen die Schüler*innen auch bei der Einführung der ganzen Zahlen auf Verständnisschwierigkeiten. Trotz vorhandenem Alltagswissen verstehen Kinder die Komplexität der negativen Zahlen zunächst nicht, was sich im Umgang mit der Zahlengerade oder der Anwendung von Rechenregeln zeigt.

Das „Zauberkessel“-Temperaturmodell stellt eine didaktisch-methodische Unterrichtsreihe dar, die die Schüler*innen an diesem Punkt abholt. Es entspricht dem Alltagsverständnis der Schüler*innen und unterstützt den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen. Wärme- und Kältesteine mit unterschiedlichen Temperaturwerten sprechen verschiedene Sinne an und können für den Aufbau der Ordnung ganzer Zahlen auf der Zahlengeraden verwendet werden. Durch Übungen wie das korrekte Anordnen der Steine auf der Zahlengeraden, das Vergleichen von Steinen hinsichtlich ihrer Eigenschaften, das Verändern der Ausgangstemperatur im Zauberkessel durch Hinzufügen oder Wegnehmen von Wärmesteinen sowie dazu passende Bewegungen auf der Zahlengeraden können Schüler*innen nachhaltige Grundvorstellungen für die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen aufbauen.

Literatur

- Bicker, U., & Schütte-Seiz, D. (2020). Was hast du dir vorgestellt? Mit einer mathematischen Vorstellungsübung zu den negativen Zahlen, *Mathematik 5-10*, 51, 15–19.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) (2023). *Lehrplan Mathematik Sekundarstufe 1*.
<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850>
- Borba, R. E. (1995). Understanding and Operating with Integers: Difficulties and Obstacles. In L. Meira & D. Carraher (Hrsg.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (226–231).
- Dögnitz, S. (2022). *Diagnostik von besonderen Rechenschwierigkeiten in der Sekundarstufe I*. Springer Spektrum.
- Malle, G. (2007). Die Entstehung negativer Zahlen. Der Weg vom ersten Kennenlernen bis zu eigenständigen Denksobjekten, *Mathematik lehren*, 142, 52–57.
- Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer.
- Peled, I., Mukhopadhyay, S., & Resnick, L. B. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Hrsg.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (106–110).
- Schindler, M. (2014). *Auf dem Weg zum Begriff der negativen Zahl: Empirische Studie zur Ordnungsrelation für ganze Zahlen aus inferentieller Perspektive*. Springer.
- Schulz, A., & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/ Sekundarstufe: Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Springer Spektrum.
- Ulovec, A. (2007). Wenn sich Vorstellungen wandeln. Ebenen der Zahlbereichserweiterungen, *Mathematik lehren*, 142, 14–16.
- Winter, H. (1989). Da ist weniger mehr. Die verdrehte Welt der negativen Zahlen, *Mathematik lehren*, 35, 22–25.