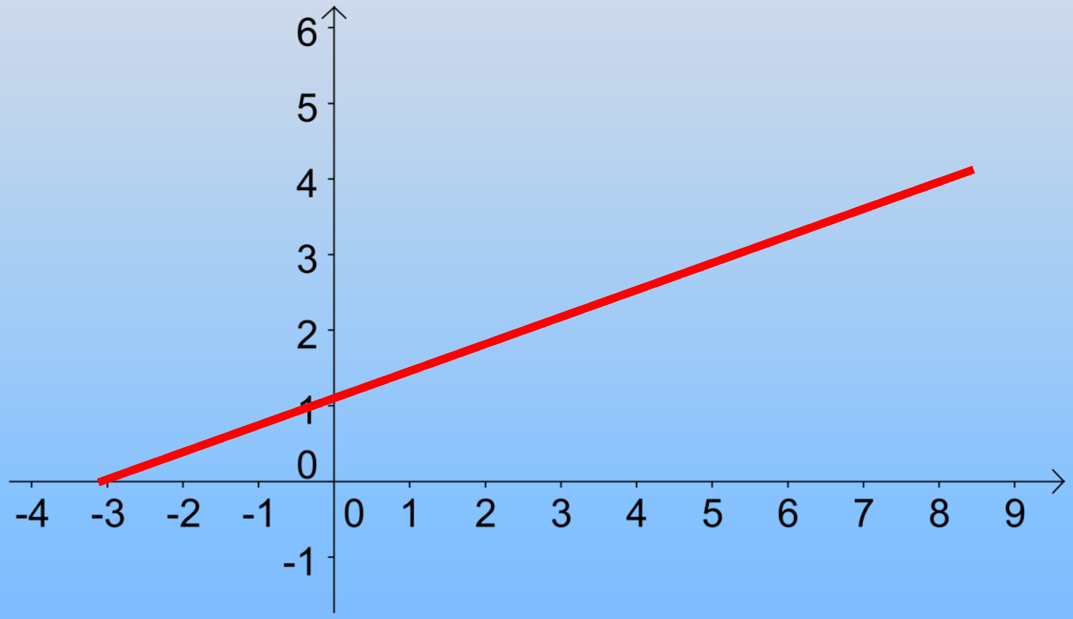
Funktionen
– immer gut für eine Überraschung



Wilfried Herget

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Bitte,
liebe Kollegin, lieber Kollege

– diese Datei ist
für Ihren persönlichen Gebrauch
und nicht zur Weitergabe.

Danke.

Der Computer rechnet vor allem damit, dass der Mensch denkt.

Helmut Heugl

Die beste Methode
ist die Methodenvielfalt.

Helmut Heugl

Wilfried Herget

Staunen ist, wie wir seit Aristoteles wissen, nicht das Ende, sondern der Anfang vieler tieferreichender Bemühungen.

Hans Schupp:
Allgemeinbildender Stochastikunterricht.
In: Stochastik in der Schule 24 (2004) 3, 4–13

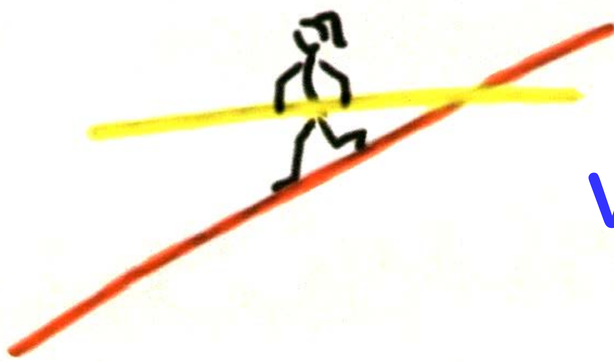
Welche Schuhgröße ...?

... in Berlin
während der Fußball-WM 2006

Foto: Heiner Juen

Herget/Jahnke/Kroll:
Produktive Aufgaben
für den
Mathematikunterricht

Rezepte
Regeln
Rechnen



Vom Staunen
zum Verstehen:

neugierig fragen und forschen

Wissen reflektieren und festigen

Analogien nutzen, Muster erkennen, ...

Wilfried Herget

- Verschieben, Stauchen, Strecken
- … umgekehrt: Koosy gesucht!
- … exponentiell überraschend
- … mit dem Rechner

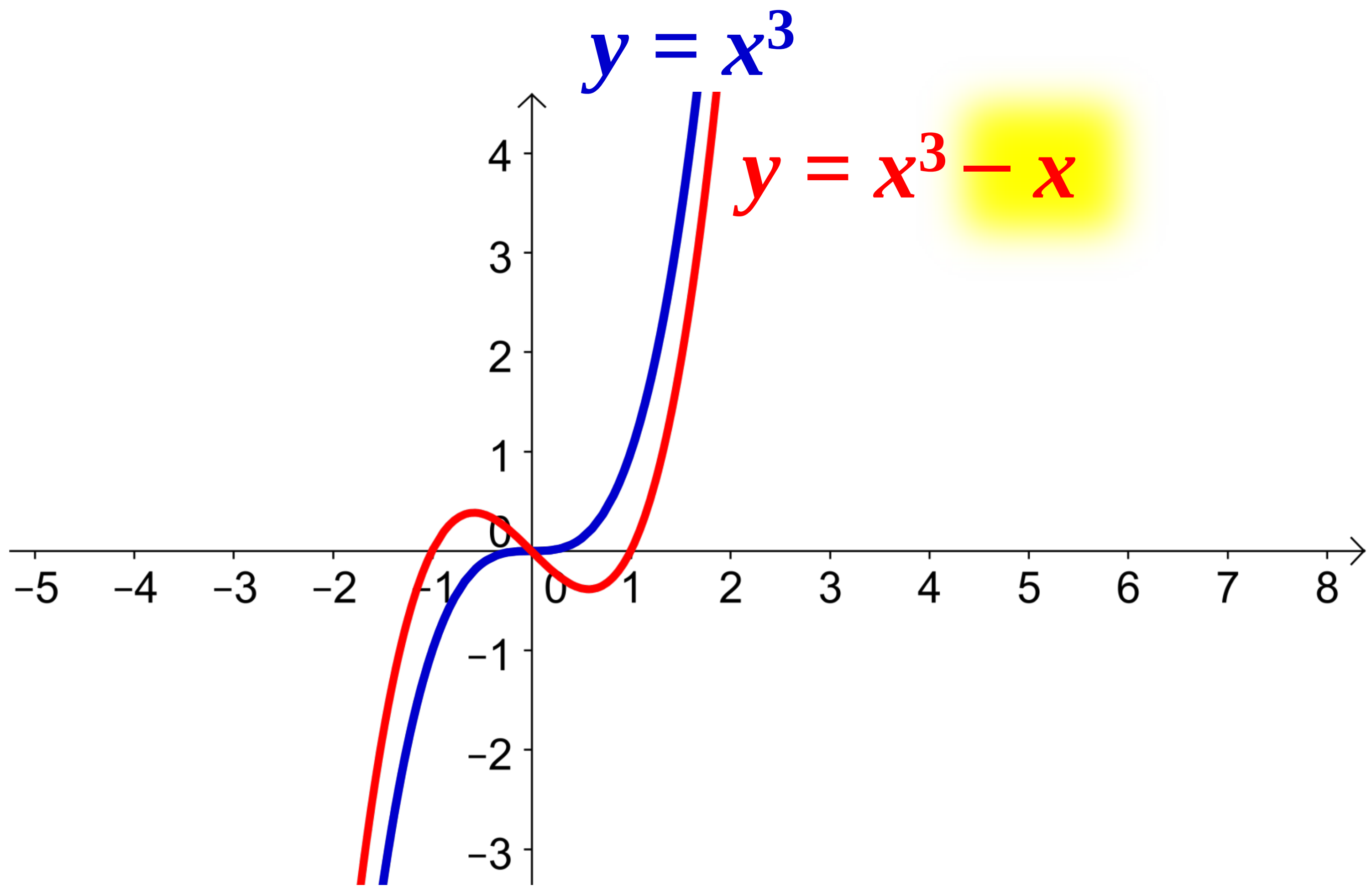
Verschiebung in *x*- und in *y*-Richtung
– ein merkwürdiger Unterschied

Verschiebt man den Graphen zu $y = f(x) = x^2$
um 3 Einheiten in *y*-Richtung, also nach oben, dann lautet die neue Funktionsvorschrift $y = f(x) = x^2 \underline{+ 3}$.

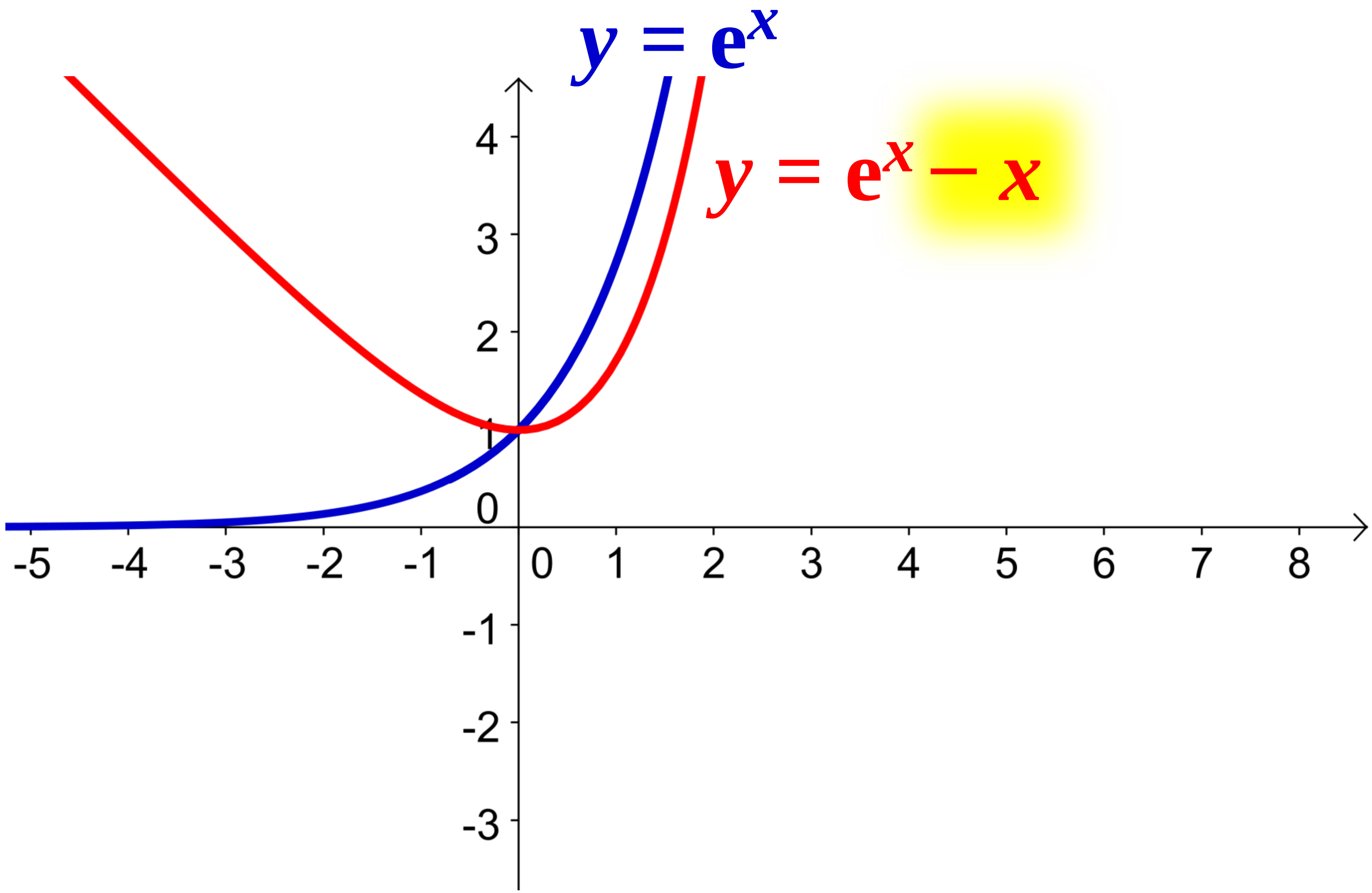
Verschiebt man den Graphen zu $y = f(x) = x^2$ aber
um 3 Einheiten in *x*-Richtung, also nach rechts, dann lautet die neue Funktionsvorschrift $y = f(x) = (x \underline{- 3})^2$.

- Wieso in dem ersten Fall „+ 3“, aber im zweiten Fall „– 3“?

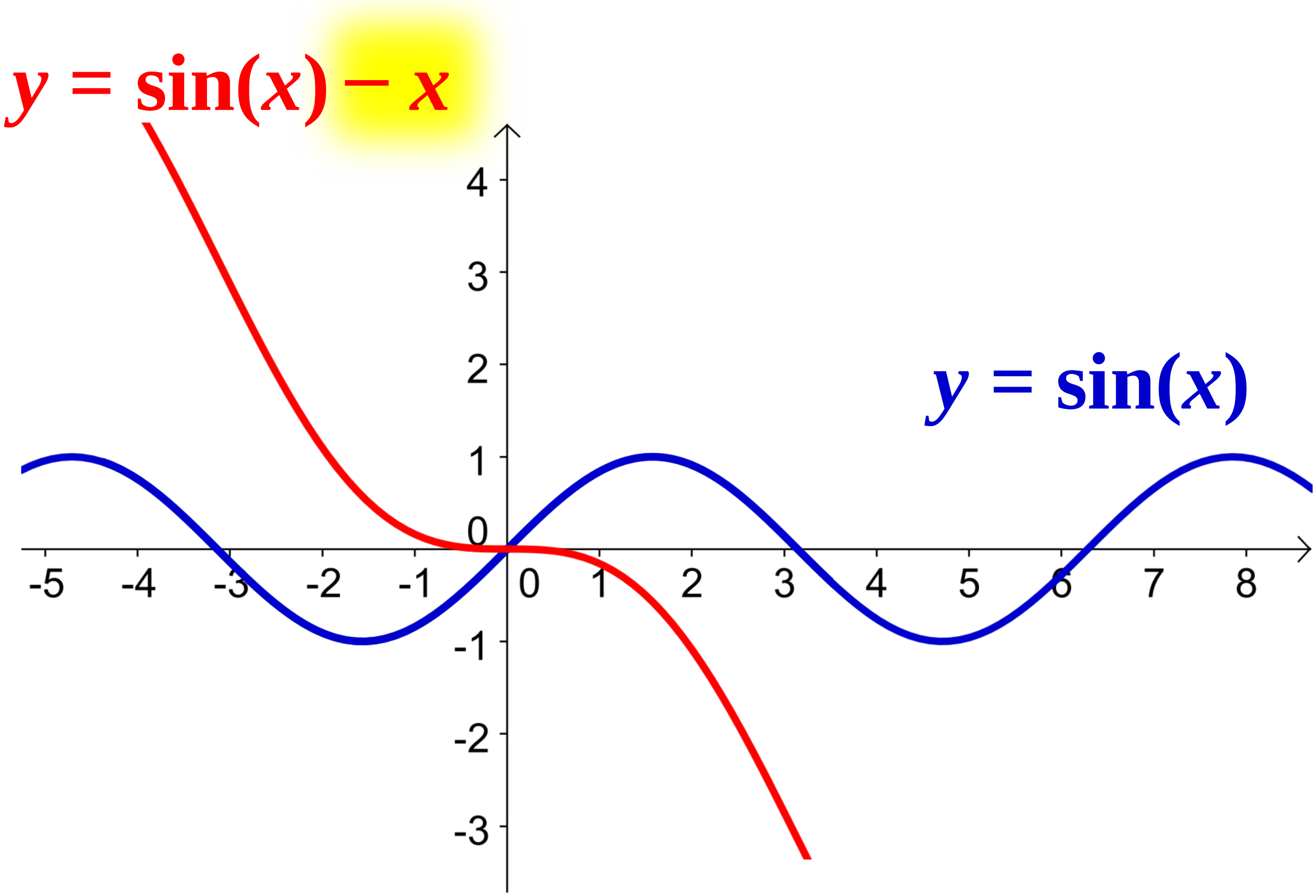
Herget, Wilfried (2013): Funktionen – immer gut für eine Überraschung



Wilfried Herget

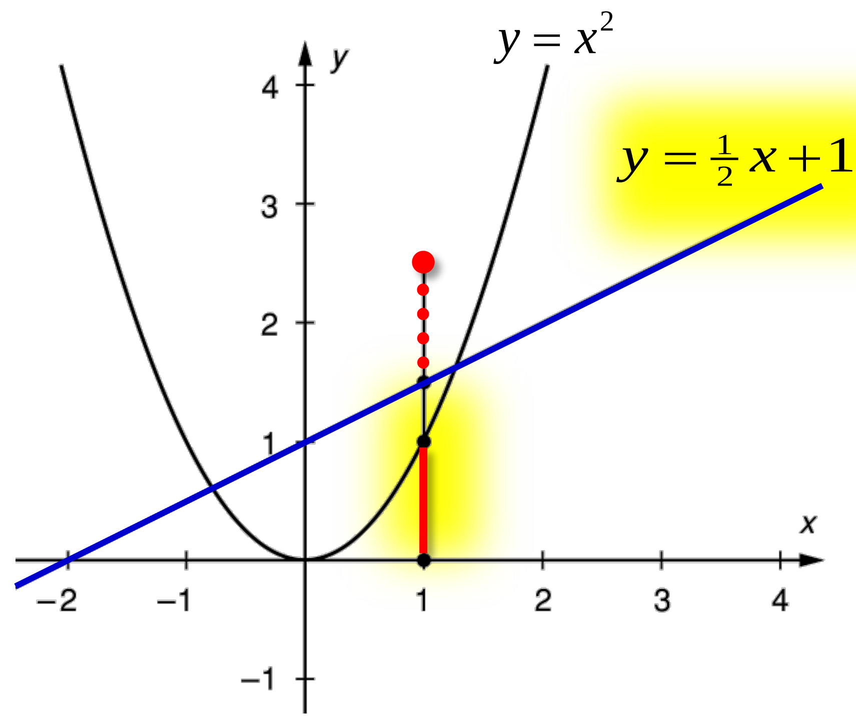


Wilfried Herget



Wilfried Herget

Alles ganz normal?

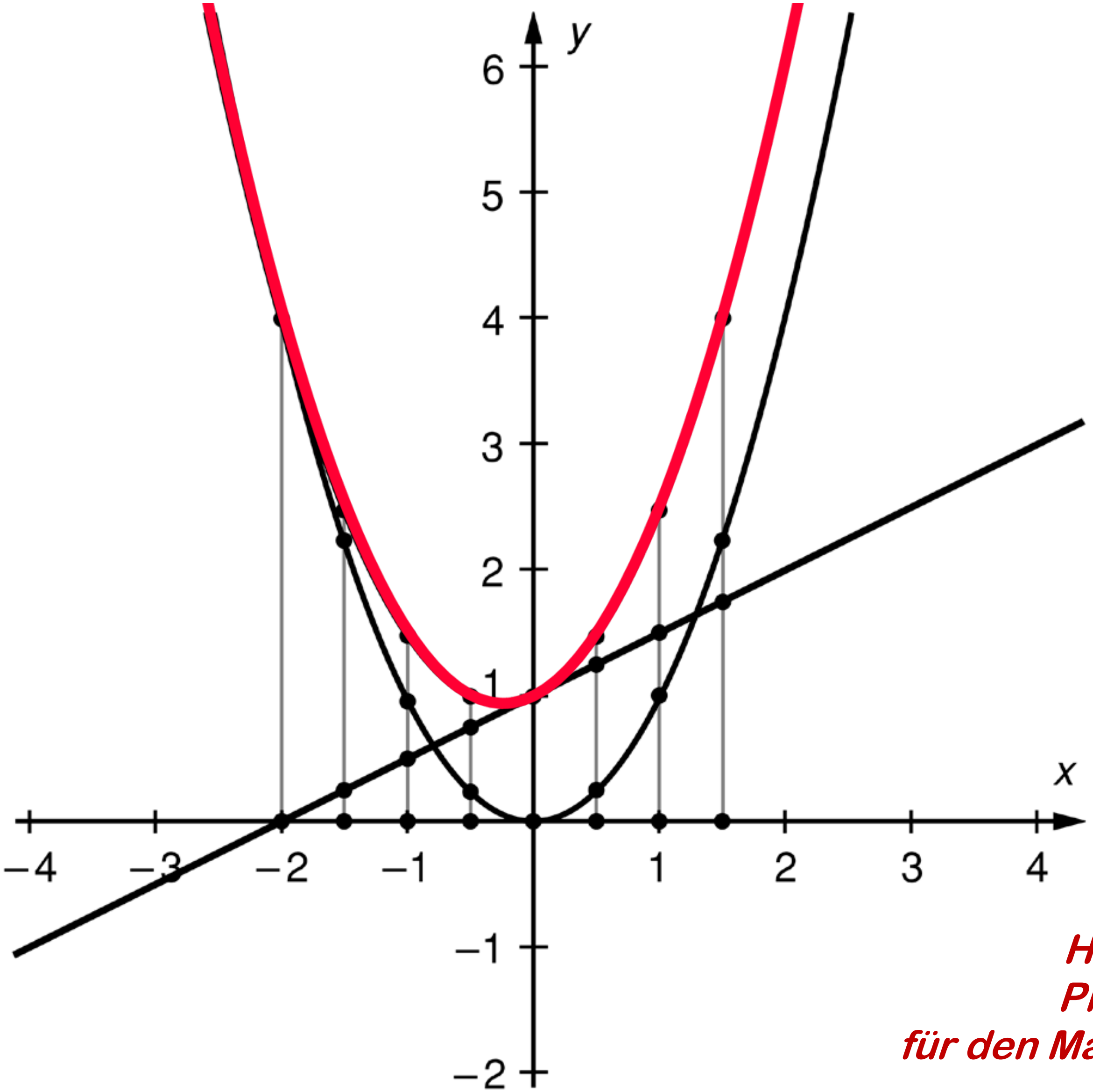


Die Abbildung zeigt die Normalparabel zu $y = x^2$ und die Gerade zu $y = \frac{1}{2}x + 1$.
An der Stelle $x = 1$ sind die *y*-Werte der Geraden und der Parabel addiert.

- Mache das Gleiche an anderen Stellen.
- Was für eine Kurve entsteht?
  Beschreibe sie.
  Wie lautet ihre Gleichung?
- Und wenn man die Gerade von der Parabel *abzieht*,
  was entsteht dann für eine Kurve?
- Und was passiert, wenn man zu einer Parabel eine andere *Parabel* addiert?
  Oder von ihr subtrahiert?

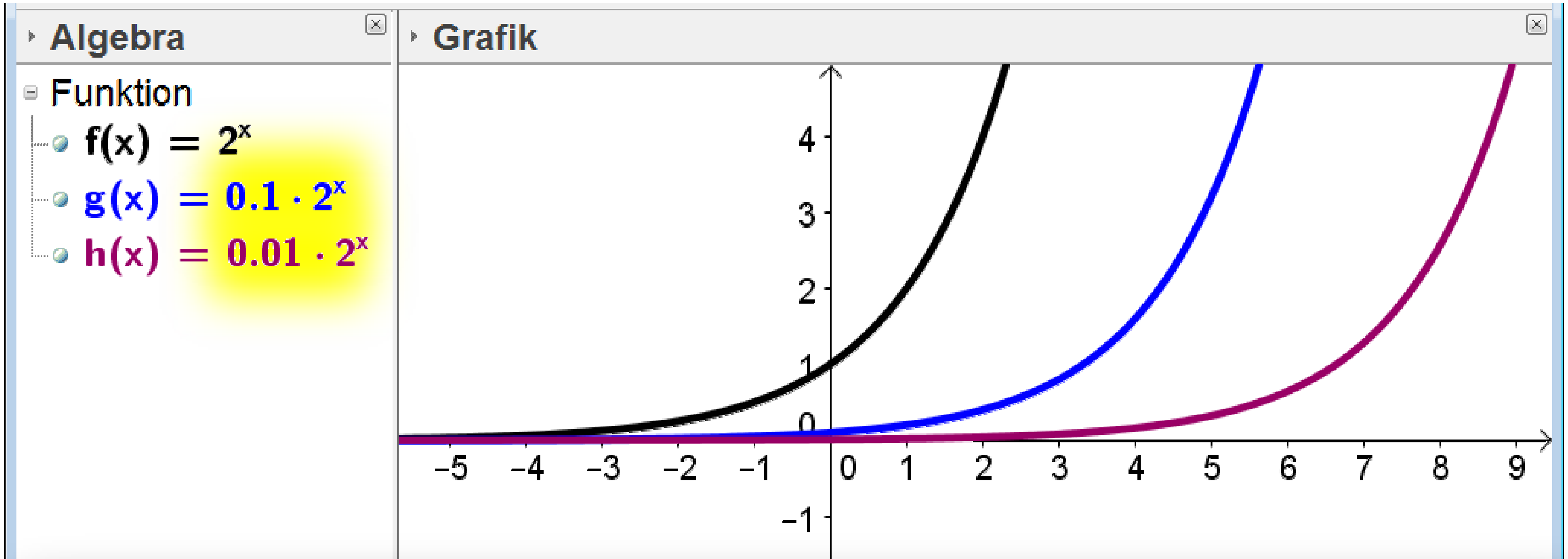
Herget/Jahnke/Kroll:
Produktive Aufgaben
für den Mathematikunterricht
in der Sek I
Cornelsen 2001, S. 98

Alles ganz normal?



Herget/Jahnke/Kroll:
Produktive Aufgaben
für den Mathematikunterricht
in der Sek I
Cornelsen 2001, S. 98

Alles normal? … verschoben, gestaucht, gestreckt?



Augenscheinlich entstehen die Graphen jeweils durch Verschieben in *x*-Richtung – andererseits bedeuten die Termveränderungen jeweils eine Streckung bzw. Stauchung.

Wie können Sie sich das erklären?

Nach: Rudolf vom Hofe: Funktionen erkunden – mit dem Computer. mathematik lehren 105 / 2001, S. 54–58.

- Verschieben, Stauchen, Strecken
- … umgekehrt: Koosy gesucht!
- … exponentiell überraschend
- … mit dem Rechner

Koosy gesucht!

Auf ein leeres, unliniertes Blatt Papier ist irgendeine Gerade gezeichnet.

Die Gerade soll die Gleichung

$$y = 2x + 3$$

besitzen.

WANTED

Zeichne dazu ein passendes Koordinatensystem!

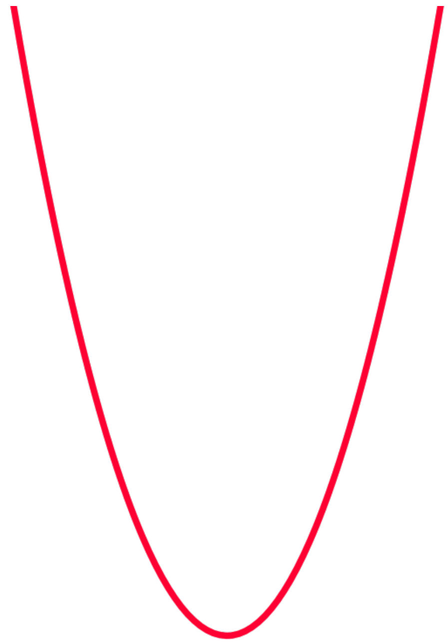
Idee: Hans-Karl Eder

Herget / Strick: Die etwas andere Aufgabe 2
Mathe mit Pfiff. – Friedrich Verlag, 2012

WANTED

Koosy gesucht!

$$y = x^2 + 3x + 4$$



Zeichne dazu ein passendes Koordinatensystem.

Herget / Strick: Die etwas andere Aufgabe 2
Mathe mit Pfiff. – Friedrich Verlag, 2012

- Verschieben, Stauchen, Strecken
- … umgekehrt: Koosy gesucht!
- … exponentiell überraschend
- … mit dem Rechner

Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen

Untersucht die Potenzfunktion mit $\boldsymbol{y = x^{10}}$
und die Exponentialfunktion mit $\boldsymbol{y = e^{x}}$.

- Für welche Werte von x verläuft der Graph von $\boldsymbol{y = x^{10}}$ oberhalb des Graphen von $\boldsymbol{y = e^{x}}$?

Untersucht Potenzfunktionen mit $\boldsymbol{y = x^{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ und Exponentialfunktionen mit $\boldsymbol{y = a^{x}}$ $(a > 1)$.

Findet ihr eine Potenzfunktion und eine Exponentialfunktion, so dass diese Potenzfunktion <u>nicht</u> von dieser Exponentialfunktion „überholt“ wird?

Herget, Wilfried (2013): Funktionen – immer gut für eine Überraschung

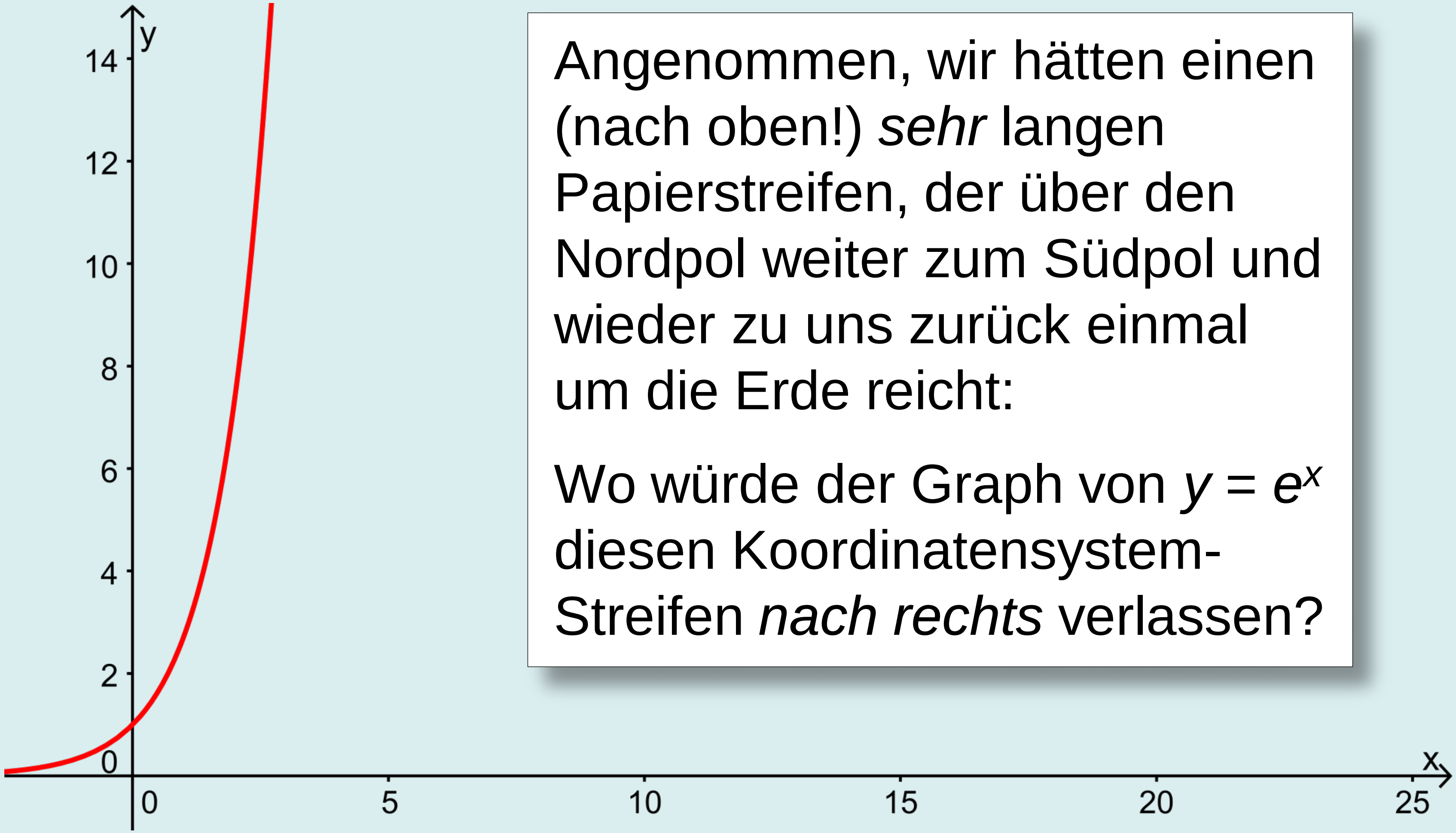
Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen

Jede (noch so schwach wachsende) Exponentialfunktion mit $\boldsymbol{y = a^x}$ ($a > 1$) „überholt“ schließlich jede (noch so schnell wachsende) Potenzfunktion mit $\boldsymbol{y = x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Herget, Wilfried (2013): Funktionen – immer gut für eine Überraschung

Der Graph von $y = e^x$

auf dem wiederholten Weg über beide Pole um die Erde …



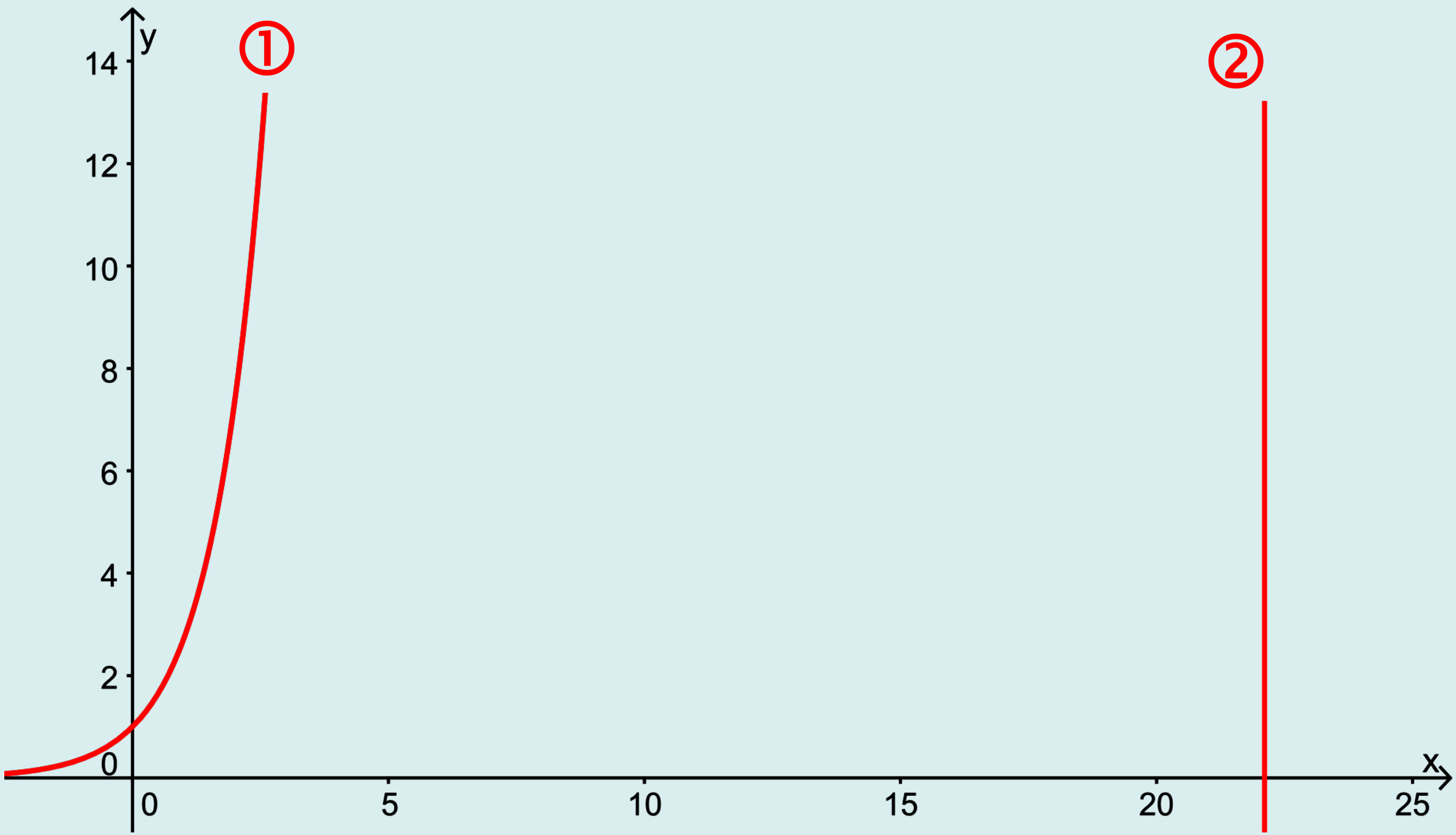
Angenommen, wir hätten einen (nach oben!) *sehr* langen Papierstreifen, der über den Nordpol weiter zum Südpol und wieder zu uns zurück einmal um die Erde reicht:

Wo würde der Graph von $y = e^x$ diesen Koordinatensystem-Streifen *nach rechts* verlassen?

Herget, Wilfried (2013): Funktionen – immer gut für eine Überraschung

Der Graph von $y = e^x$

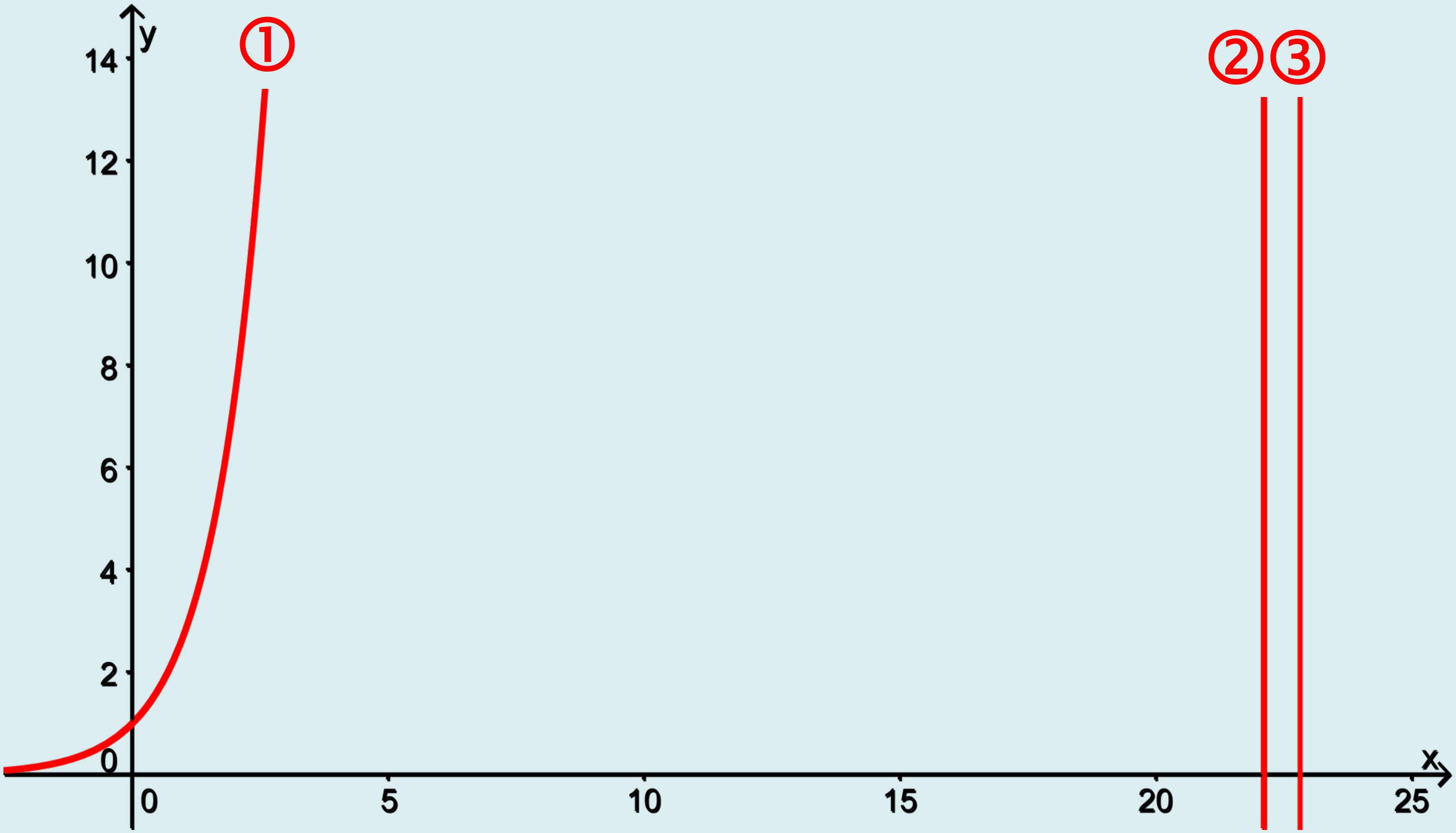
auf dem wiederholten Weg über beide Pole um die Erde ...



Herget, Wilfried (2013): Funktionen – immer gut für eine Überraschung

Der Graph von $y = e^x$

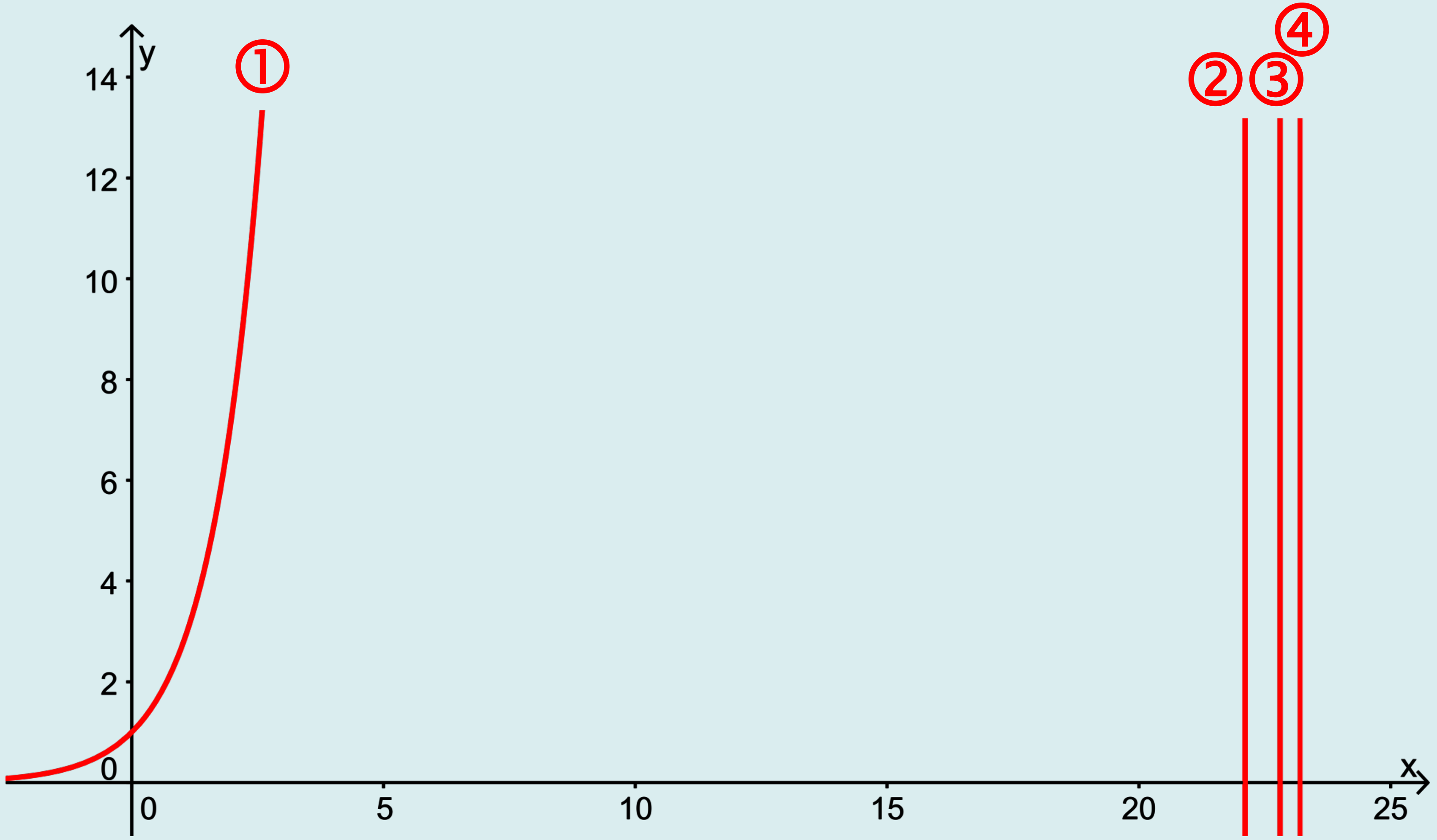
auf dem wiederholten Weg über beide Pole um die Erde …



Herget, Wilfried (2013): Funktionen – immer gut für eine Überraschung

Der Graph von $y = e^x$

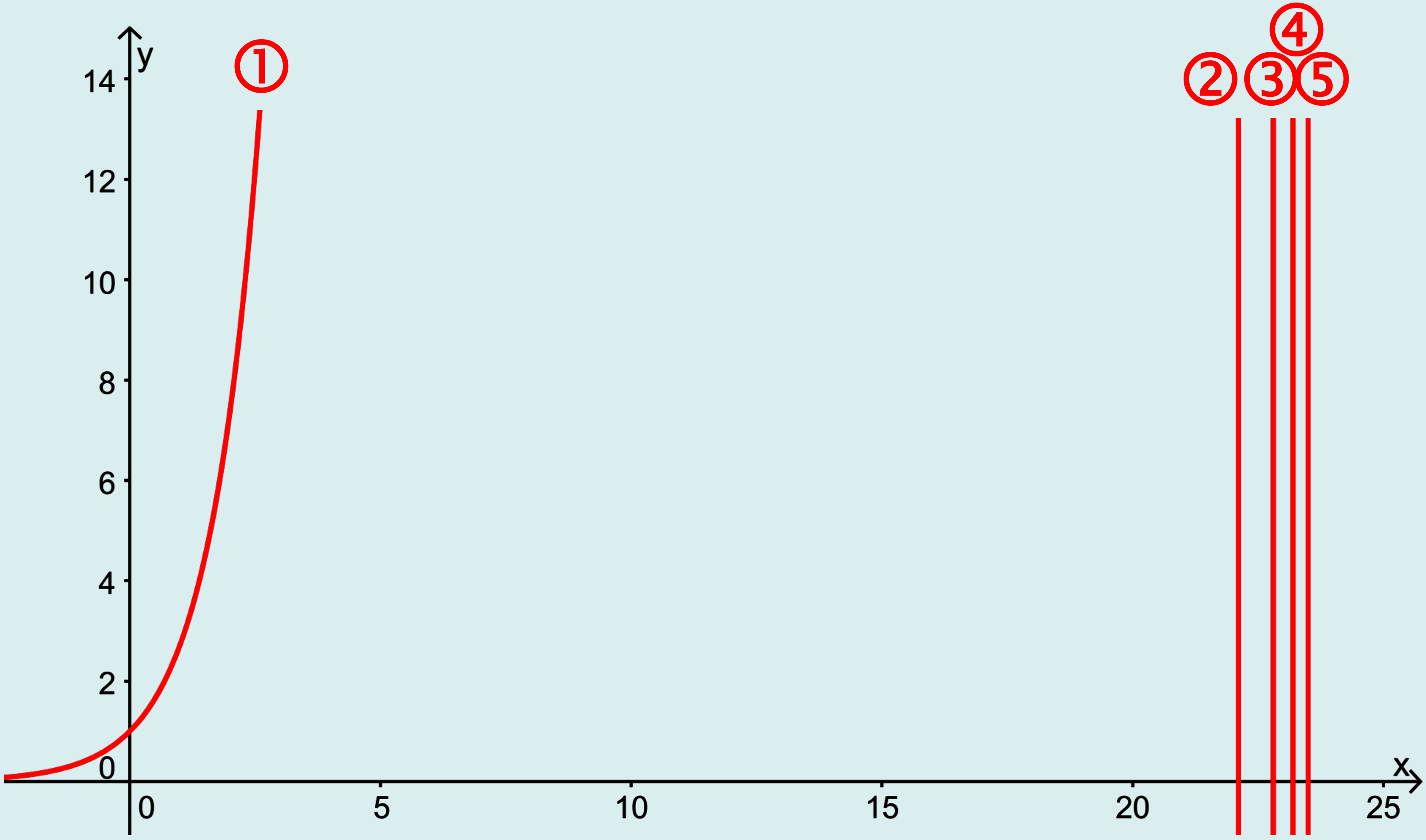
auf dem wiederholten Weg über beide Pole um die Erde …



Herget, Wilfried (2013): Funktionen – immer gut für eine Überraschung

Der Graph von $y = e^x$

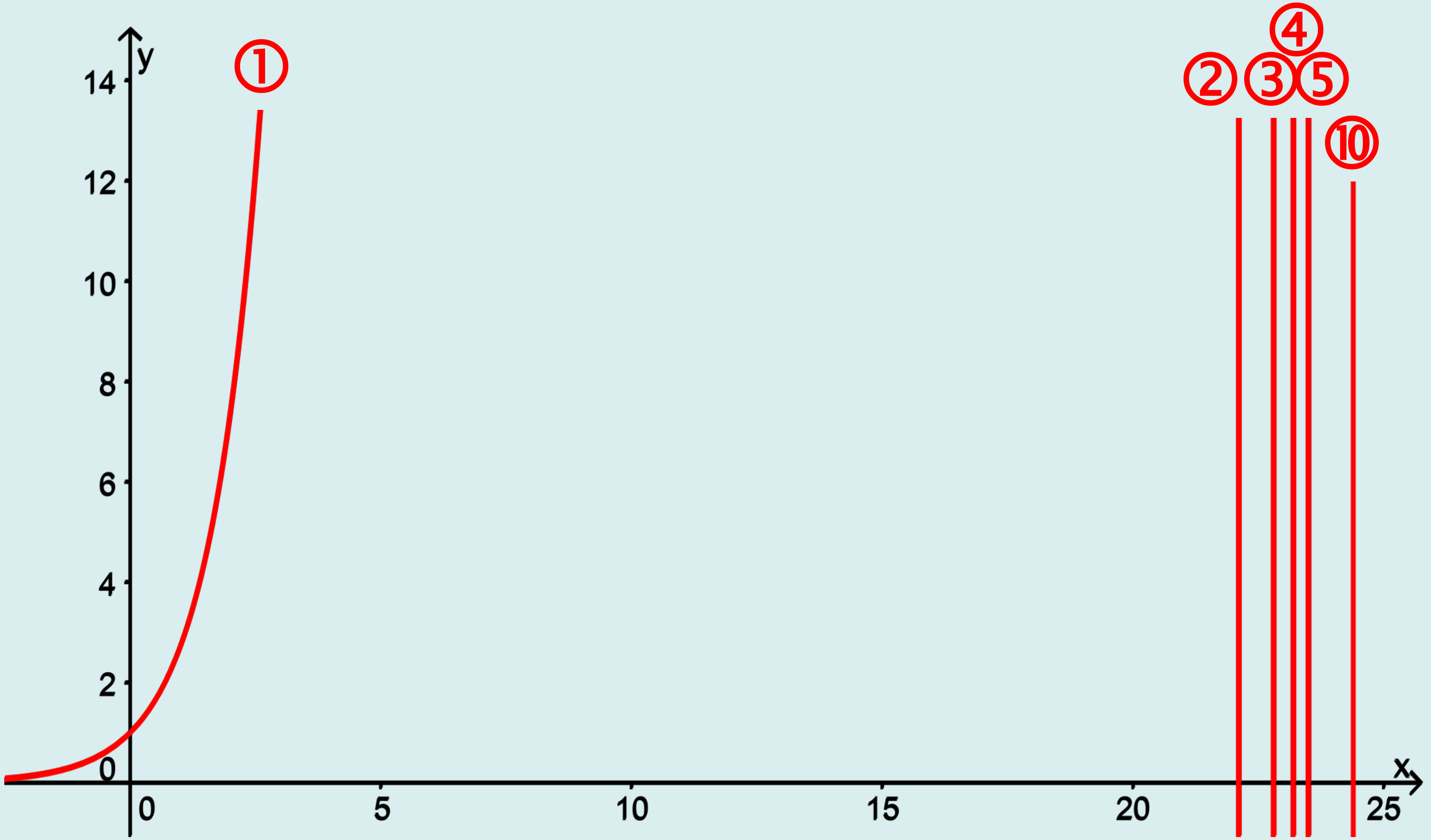
auf dem wiederholten Weg über beide Pole um die Erde …



Herget, Wilfried (2013): Funktionen – immer gut für eine Überraschung

Der Graph von $y = e^x$

auf dem wiederholten Weg über beide Pole um die Erde …



Herget, Wilfried (2013): Funktionen – immer gut für eine Überraschung

Die unschlagbar langsam wachsende Logarithmusfunktion

Die Werte der ln-Funktion sind also beliebig groß, wenn nur ihre Argumente hinreichend groß sind. Dabei wächst sie allerdings unschlagbar langsam. Ein Beispiel soll dies illustrieren:

Auf ein DIN-A4-Blatt im Hochformat zeichnen wir in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm den Graphen der ln-Funktion. Am rechten Blattrand bei $x = 20$ liegt er wegen $\ln 20 = 3{,}0$ auch 3 cm über der x-Achse. Nun denken wir uns die x-Achse um die Erde herumgewickelt. Nach jeweils 40 000 km überdeckt sie dann wieder den Ursprung. Auch den Graphen zeichnen wir in Gedanken entsprechend weiter. Preisfrage: Wo schneidet der Graph nach einer Erdumrundung die y-Achse (Bild 160)?

Den Schnittpunkt auf der y-Achse bringen wir noch leicht auf unserem Blatt unter, denn wegen $\ln 4\,000\,000\,000 = 22{,}1$ liegt er nur 22 cm über der x-Achse.

Nach der zweiten Erdumrundung verläuft der Graph dann durch den Punkt $(0|22{,}8)$ (in Worten: Zweiundzwanzigkommaacht). Schon nach der ersten Erdumschlingung ist der Graph so gut wie waagrecht. (Bild 161)

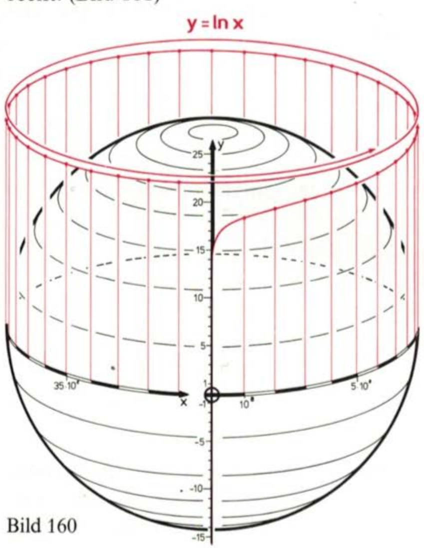


Bild 160

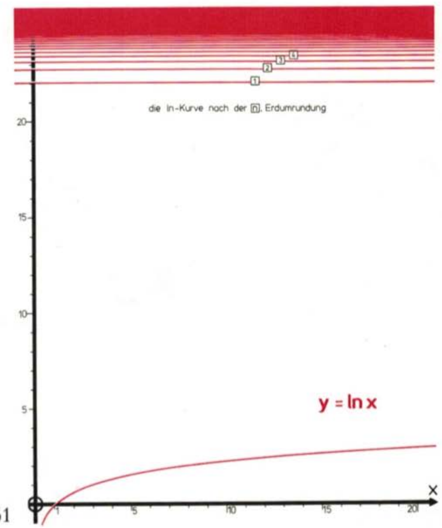


Bild 161

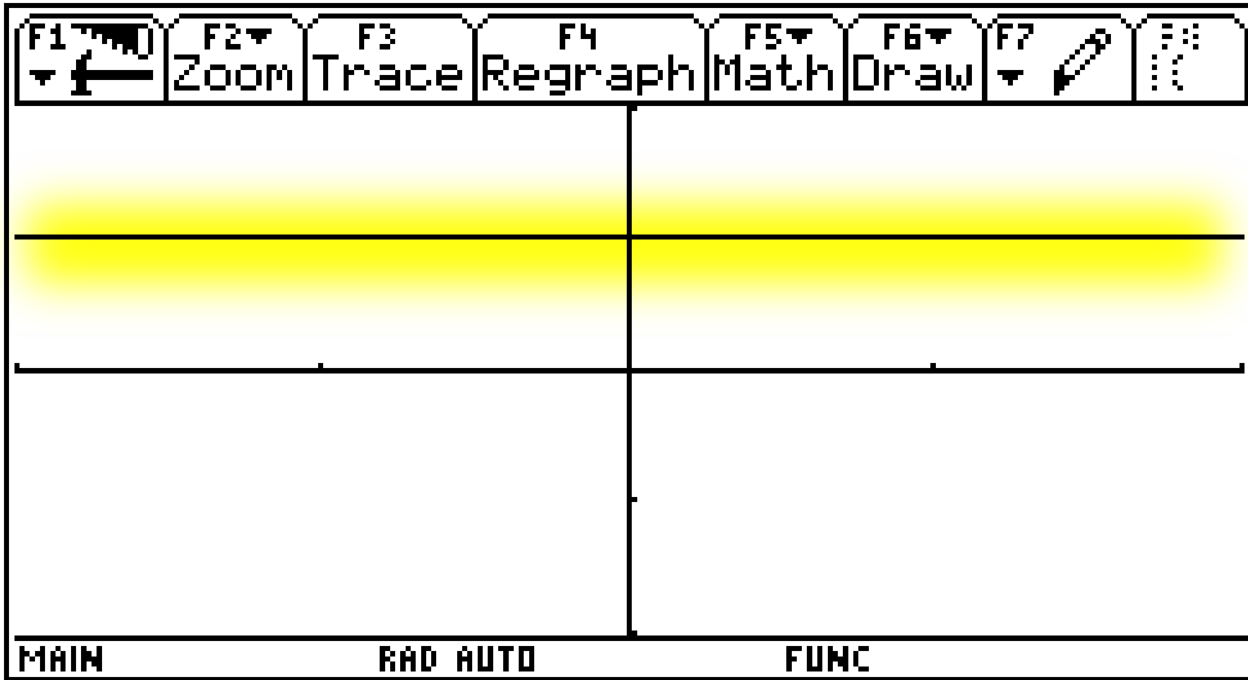
Baierlein/Barth/Greifenegger/Krumbacher (1981): Anschauliche Analysis 2. München: Ehrenwirth, S. 129

- Verschieben, Stauchen, Strecken
- … umgekehrt: Koosy gesucht!
- … exponentiell überraschend
- … mit dem Rechner

Faule Funktionen ...

Herget, Wilfried; Malitte, Elvira; Richter, Karin (2001):
Dem ersten Eindruck trauen?
In: Herget, Wilfried; Lehmann, Eberhard (Hrsg.):
Neue Materialien für den Mathematikunterricht.
Lineare Funktionen in der Sekundarstufe 1 mit dem TI 83/ 89/-92.
Hannover: Schroedel, S. 27–34.

Herget, Wilfried; Malitte, Elvira (2002):
Sinus-Schwächen und Rechner-Grenzen.
In: Herget, Wilfried; Lehmann, Eberhard (Hrsg.):
Neue Materialien für den Mathematikunterricht.
Exponential- und Winkel-Funktionen in der Sek. 1 mit dem TI 83/ 89/ 92.
Hannover: Schroedel, S. 57–64.

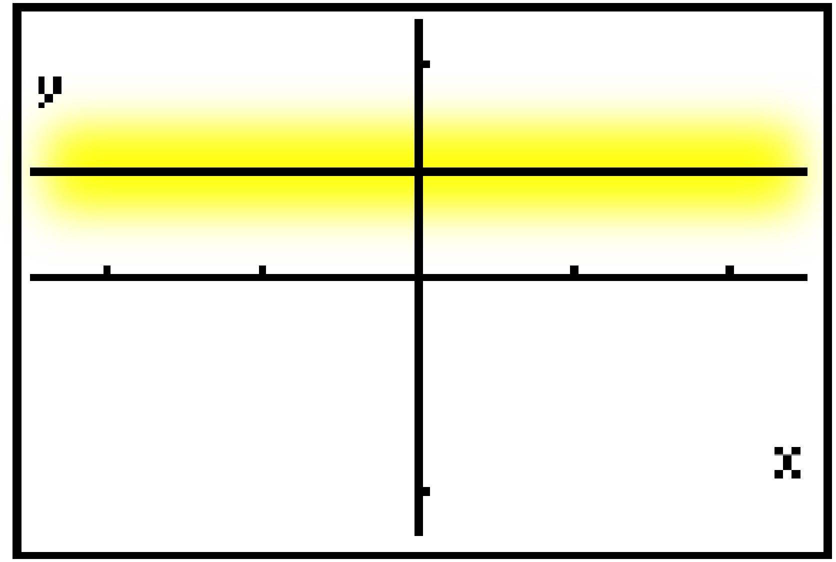


Finden Sie möglichst viele verschiedene Funktionen, deren Graph auf dem Rechner so aussieht!

Wilfried Herget

Faule Funktionen ...

Anne behauptet, sie könne zu ***y* = *x* + 5** sogar einen solchen „Langweiler-Graphen“, wie du ihn hier siehst, erreichen.



Der „Langweiler-Graph“

Wie könnte sie dabei vorgehen?

Herget / Strick: Die etwas andere Aufgabe 2
Mathe mit Pfiff. – Friedrich Verlag, 2012

Faule Funktionen ...

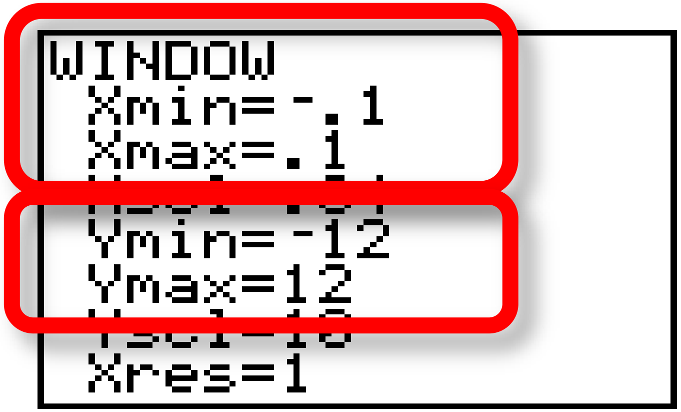
Der „Langweiler-Graph"

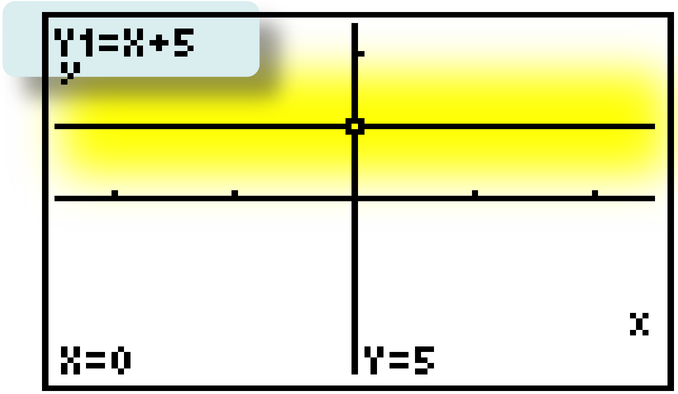
Benni kann sogar zu
$y = x^2 + 5$ einen solchen „Langweiler-Graphen" erreichen.

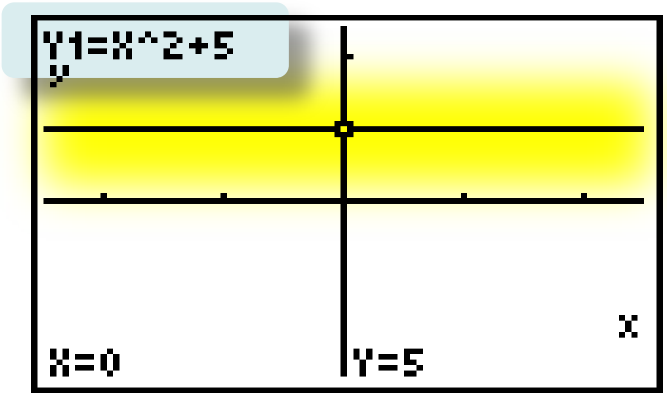
Wie könnte er dabei vorgehen?

Herget / Strick: Die etwas andere Aufgabe 2
Mathe mit Pfiff. – Friedrich Verlag, 2012

Faule Funktionen ...

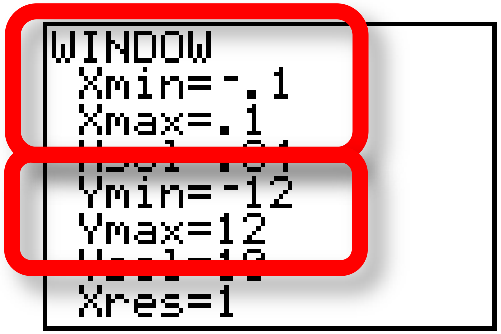


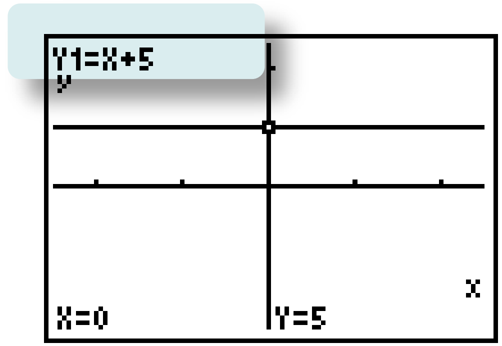


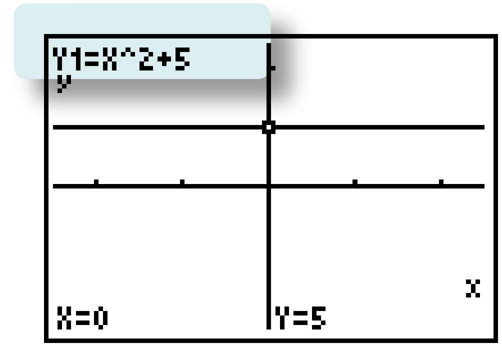


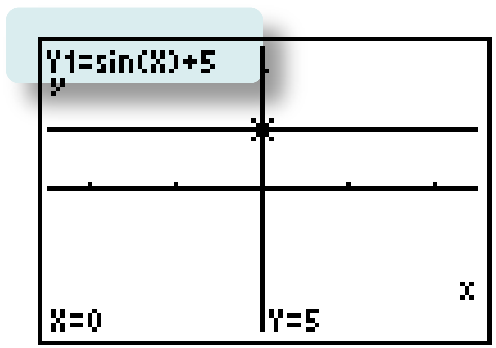
Herget, Wilfried; Malitte, Elvira; Richter, Karin (2001):
Dem ersten Eindruck trauen?
In: Herget, Wilfried; Lehmann, Eberhard (Hrsg.):
Neue Materialien für den Mathematikunterricht.
Lineare Funktionen in der Sekundarstufe 1 mit dem TI 83/ 89/-92.
Hannover: Schroedel, S. 27–34.

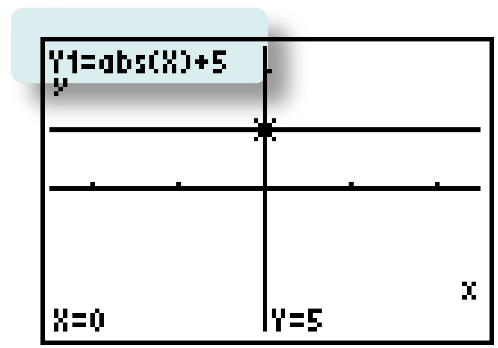
Faule Funktionen ...





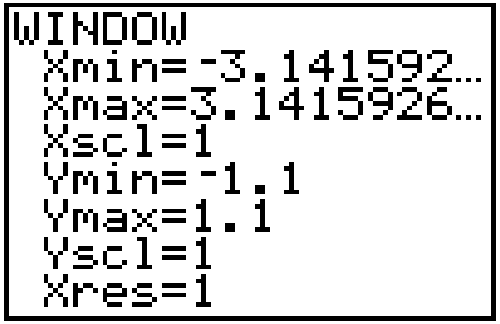


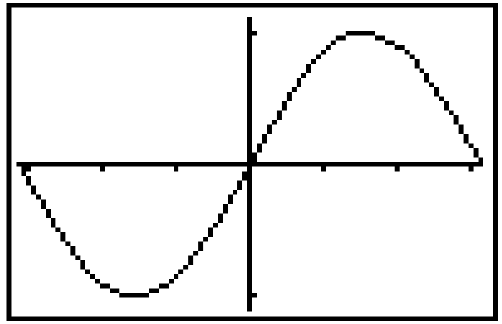




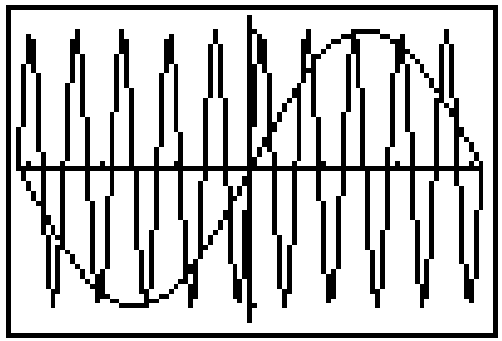
Herget, Wilfried; Malitte, Elvira (2002):
Sinus-Schwächen und Rechner-Grenzen.
In: Herget, Wilfried; Lehmann, Eberhard (Hrsg.):
Neue Materialien für den Mathematikunterricht.
Exponential- und Winkel-Funktionen in der Sek. 1 mit dem TI 83/ 89/ 92.
Hannover: Schroedel, S. 57–64.

Rechner-Grenzen …

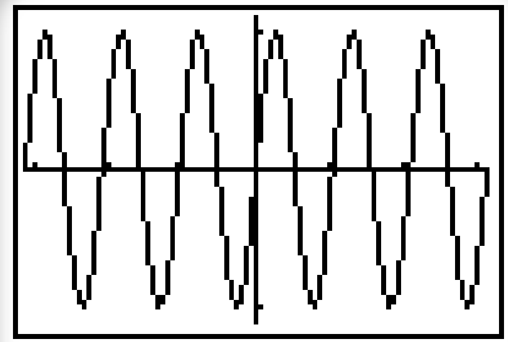




$y = \sin(x)$



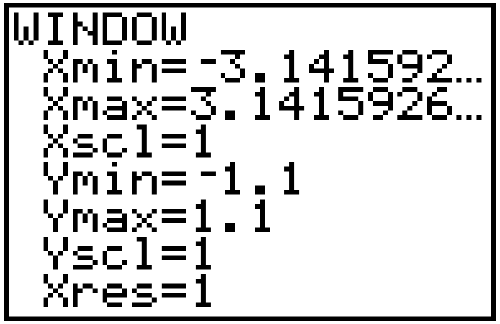
$y = \sin(10x)$
$y = \sin(x)$

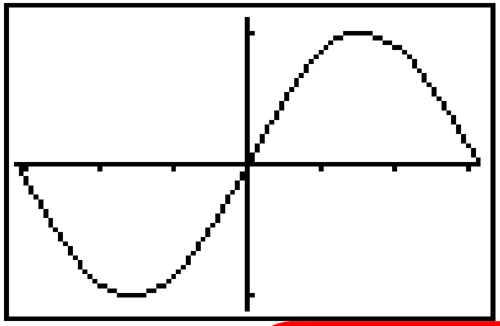


$y = \sin(100x)$

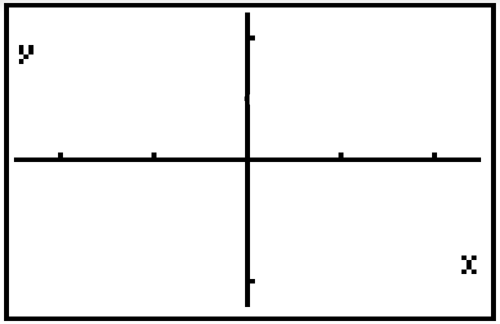
Herget, Wilfried; Malitte, Elvira (2002):
Sinus-Schwächen und Rechner-Grenzen.
In: Herget, Wilfried; Lehmann, Eberhard (Hrsg.):
Neue Materialien für den Mathematikunterricht.
Exponential- und Winkel-Funktionen in der Sek. 1 mit dem TI 83/ 89/ 92.
Hannover: Schroedel, S. 57–64.

Rechner-Grenzen …





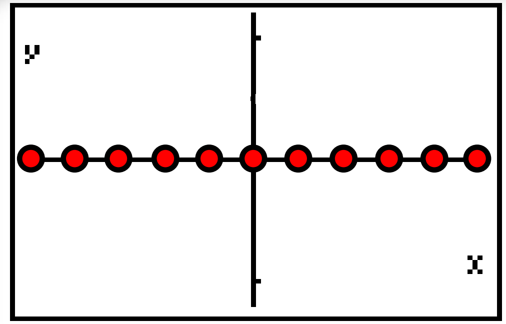
$y = \sin(x)$



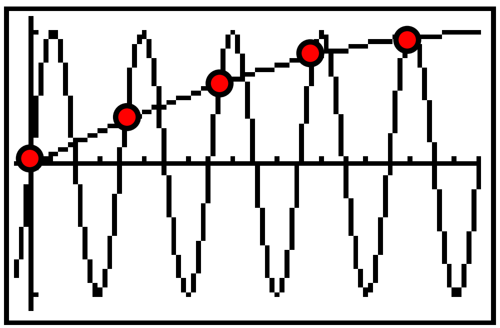
$y = \sin(47x)$

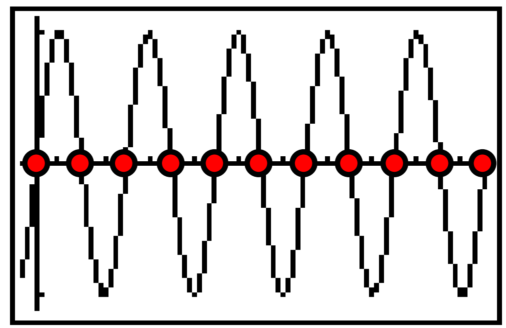
Herget, Wilfried; Malitte, Elvira (2002):
Sinus-Schwächen und Rechner-Grenzen.
In: Herget, Wilfried; Lehmann, Eberhard (Hrsg.):
Neue Materialien für den Mathematikunterricht.
Exponential- und Winkel-Funktionen in der Sek. 1 mit dem TI 83/ 89/ 92.
Hannover: Schroedel, S. 57–64.

Rechner-Grenzen …



$y = \sin(47x)$





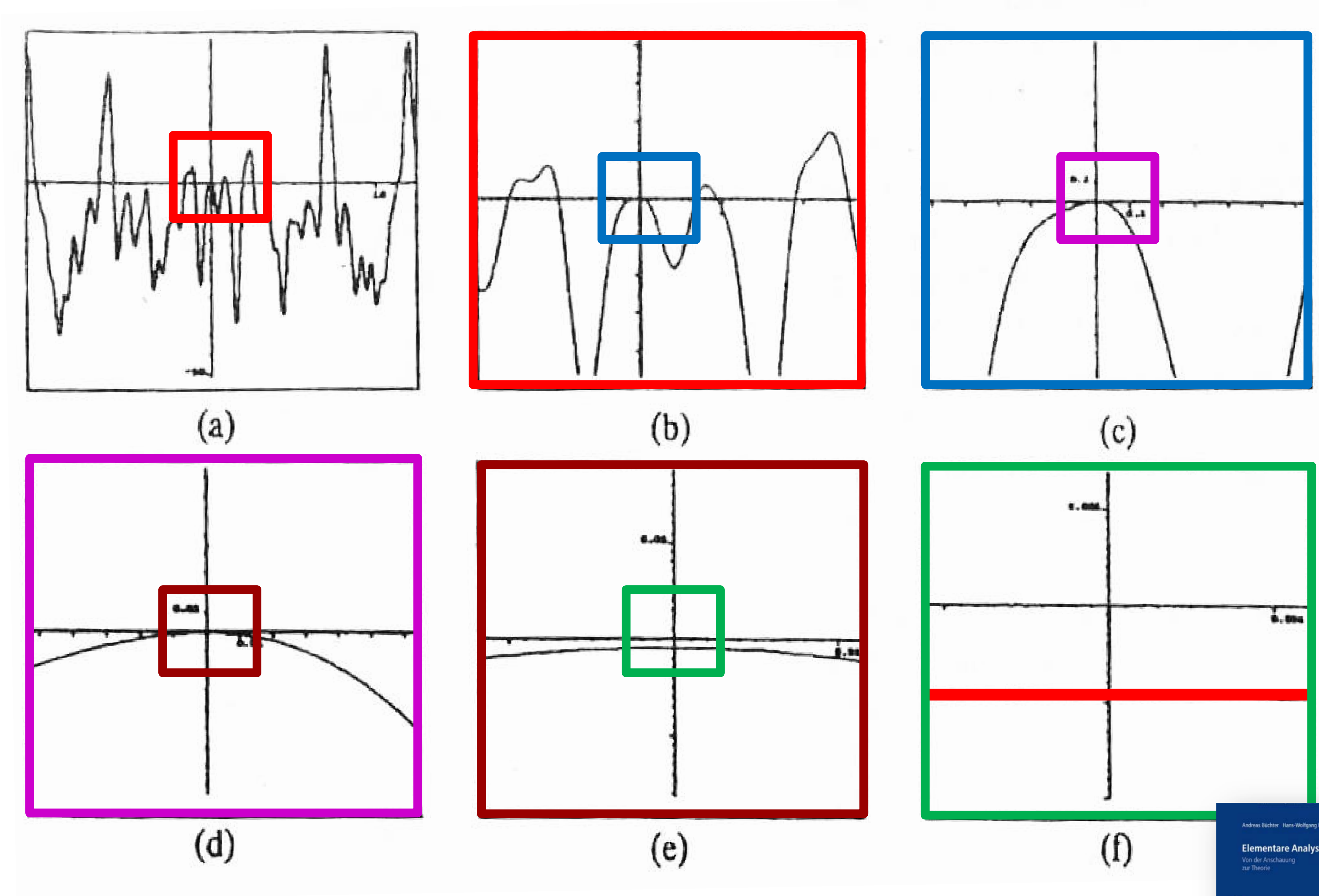
Herget, Wilfried; Malitte, Elvira (2002):
Sinus-Schwächen und Rechner-Grenzen.
In: Herget, Wilfried; Lehmann, Eberhard (Hrsg.):
Neue Materialien für den Mathematikunterricht.
Exponential- und Winkel-Funktionen in der Sek. 1 mit dem TI 83/ 89/ 92.
Hannover: Schroedel, S. 57–64.

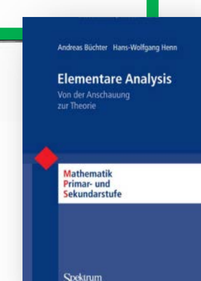
Das Funktionen-Mikroskop

Kirsch, Arnold (1979):
Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff.
Der Mathematikunterricht 25 (3), S. 25–41.

Kirsch, Arnold (1980): Folien zur Analysis, Serie A. Die Steigung einer Funktion. – Schroedel.

Hoffkamp, Andrea (2015): Funktionenmikroskop 2.0.
mathematik lehren, Heft 188





Büchter / Henn (2010): Elementare Analysis. – Spektrum, S. 86

Die meisten jagen so sehr dem Genuß nach, daß sie an ihm vorbeilaufen.

Søren Aabye Kierkegaard
1813–1855

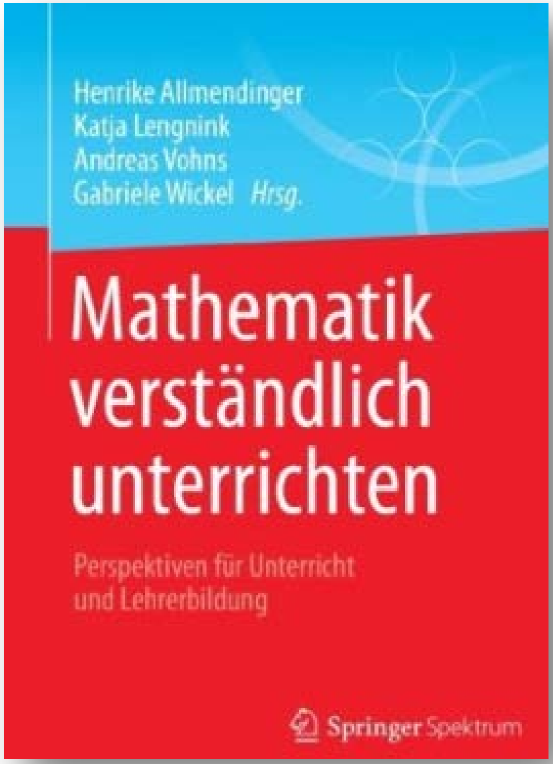
Foto: Wikipedia

Herget, Wilfried (2013):
Funktionen – immer gut für eine Überraschung.

In: Henrike Allmendinger, Katja Lengnink, Andreas Vohns, Gabriele Wickel (Hrsg.): Mathematik verständlich unterrichten an Schule und Hochschule.

Wiesbaden: Springer Spektrum.
S. 47–62.

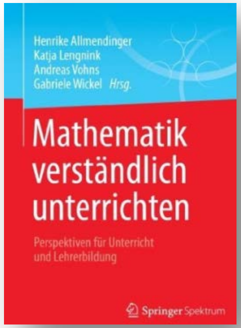
http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-00992-2/page/1



Funktionen ...

Herget, Wilfried (2012):
Funktionen haben viele Gesichter (Basisartikel).
In: Etzold, Heiko; Petzschler, Ines (Hrsg.):
MUED-Rundbrief 185 – 3/2012. S. 3–7.
www.mued.de/rundbrief/rb185.pdf

Herget, Wilfried (2013):
Funktionen – immer gut für eine Überraschung!
In: Gilbert Greefrath; Friedhelm Käpnick; Martin Stein (Hrsg.):
Beiträge zum Mathematikunterricht 2013.
Münster: WTM. S. 464-467.
www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Herget.pdf



Herget, Wilfried (2013):
Funktionen – immer gut für eine Überraschung.
In: Henrike Allmendinger, Katja Lengnink, Andreas Vohns, Gabriele Wickel (Hrsg.): Mathematik verständlich unterrichten an Schule und Hochschule.
Wiesbaden: Springer Spektrum. S. 47–62.
http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-00992-2/page/1

Herget/Lehmann (Hg.):
Neue Materialien für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 mit dem TI-83/-89/-92.
Schroedel, Hannover 2002

- Lineare Funktionen
- Quadratische Funktionen
- Exponential- und Winkelfunktionen
- Stochastik
- Gleichungen

mathematik lehren

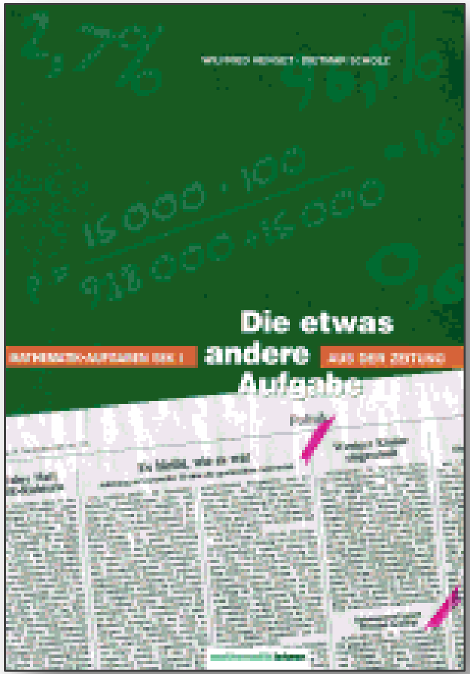
Friedrich Verlag

Wilfried Herget

Büchter, A.; Herget, W.; Leuders, T.; Müller, J.:
Die Fermi-Box 5.-7. / … 8.-10.
vpm, 2007 / 2011

Herget, W.; Jahnke, T.; Kroll, W.:
Produktive Aufgaben für den MU
in der Sek I / … in der Sek II
Cornelsen, Berlin 2001 / 2011

Herget, W.; Scholz, D.:
Die etwas andere Aufgabe.
Mathematik-Aufgaben Sek I
– aus der Zeitung
Kallmeyer, Seelze 1998



Herget , W.; Strick, H. K.:
Die etwas andere Aufgabe 2.
Mathe mit Pfiff.
Friedrich Verlag, Seelze 2012