

mathektiv

Monika Musilek¹

DOI: <https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1416>

Zusammenfassung

Der Beitrag „mathektiv“ zeigt Wege auf, wie Mathematikunterricht durch den gezielten Einsatz von Spielen und Rätseln bereichert werden kann, um Lernende aktiv einzubinden und kognitiv zu fordern. Der Begriff „mathektiv“ verbindet „Mathematik“ und „aktiv“ und betont die Bedeutung eines forschenden und entdeckenden Lernens, ähnlich einem Detektiv, der Muster aufspürt und logische Zusammenhänge erkennt. Der Artikel stützt sich auf fünf Qualitätsprinzipien – kognitive Aktivierung, Verstehensorientierung, Durchgängigkeit, Lernendenorientierung & Adaptivität sowie Kommunikationsförderung – und zeigt anhand konkreter Beispiele, wie diese Prinzipien umgesetzt werden können. Kartentricks, oder Würfelspiele fördern sowohl mathematische als auch überfachliche Kompetenzen. Sie schaffen motivierende Lernumgebungen, regen zum Nachdenken an und ermöglichen differenzierte Lernwege. Der Beitrag hebt hervor, dass solche Spiele nicht nur mathematische Kompetenzen fördern, sondern Lernende auch dazu einladen, Mathematik als lebendige und spannende Disziplin zu erleben.

Stichwörter: Spiele im Mathematikunterricht, Entdeckendes Lernen

1 Einleitung

Der Titel dieses Beitrags, *mathektiv*, mag auf den ersten Blick ungewöhnlich erscheinen. Welche Assoziationen weckt er? Einige denken möglicherweise sofort an einen Detektiv – eine Person, die systematisch recherchiert, beobachtet und aus ihren Erkenntnissen Schlussfolgerungen zieht. Interessanterweise sind genau diese Tätigkeiten essenziell für die Mathematik: Auch hier geht es darum, Strukturen zu untersuchen, Muster zu erkennen und aus Beobachtungen logische Schlüsse zu ziehen. Andere wiederum identifizieren in *mathektiv* ein Kofferwort, eine Wortneuschöpfung, die durch die Verschmelzung zweier Begriffe entsteht – ähnlich wie „Brunch“ (aus breakfast und lunch) oder „Denglisch“ (aus Deutsch und Englisch). In diesem Fall lassen sich die Wörter *mathe* (als allgemein gebräuchliche Abkürzung für Mathematik) und *aktiv* erkennen. Diese Interpretation betont die zentrale Idee dieses

¹ Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.

E-Mail: monika.musilek@phwien.ac.at

Beitrags: Mathematik soll nicht passiv rezipiert, sondern aktiv erlebt werden. Beide Lesarten – das detektivische Aufspüren mathematischer Muster und die aktive Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten – stehen im Zentrum dieses Artikels. Ziel ist es, Wege aufzuzeigen, wie durch den gezielten Einsatz mathematischer Spiele und Rätsel ein Unterricht gestaltet werden kann, der kognitive Aktivierung fördert und Lernende dazu einlädt, Mathematik als eine forschende, entdeckende Disziplin zu erleben.

2 Qualitätvoll Mathematik unterrichten

Die in diesem Artikel vorgestellten Lerngelegenheiten basieren auf den fünf zentralen Aspekten eines qualitativollen Mathematikunterrichts: kognitive Aktivierung, Verstehensorientierung, Durchgängigkeit, Lernendenorientierung & Adaptivität sowie Kommunikationsförderung (Holzäpfel et al., 2024).

Diese Prinzipien dienen als Leitlinien für die Konzeption und Auswahl der Aufgaben, um sicherzustellen, dass sie nicht nur mathematisch reichhaltig sind, sondern auch zum entdeckenden und aktiven Lernen anregen – ganz im Sinne von „*mathektiv*“. Jede Aufgabe wurde so gestaltet, dass sie die Lernenden herausfordert, zum Nachdenken anregt und nachhaltige Lernprozesse ermöglicht. Dabei spielen die gezielte Einbettung in bestehende Lernstrukturen, die Nutzung verschiedener Darstellungsformen sowie adaptive und kommunikative Elemente eine zentrale Rolle. Im Folgenden werden diese fünf Qualitätsmerkmale in Anlehnung an Holzäpfel et al. (2024) näher erläutert, um die didaktische Grundlage hinter den Aufgaben transparent zu machen.

qualitätvoll Mathematik unterrichten

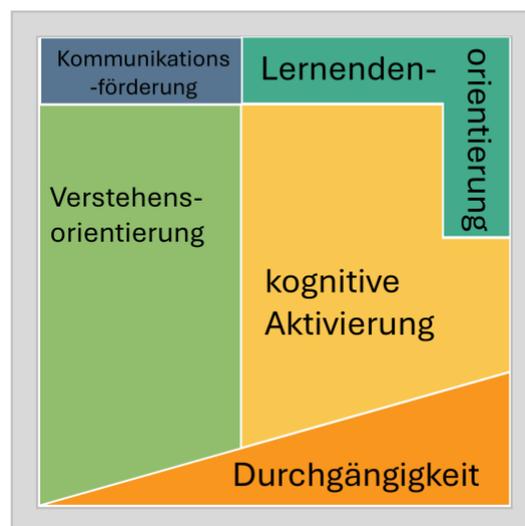


Abbildung 1: Rahmen für qualitativollen Mathematikunterricht
(eigene Darstellung in Anlehnung an Holzäpfel et al., 2024)

Ein kognitiv aktivierender Mathematikunterricht ermutigt Lernende dazu, sich aktiv und intensiv mit mathematischen Inhalten auseinanderzusetzen. Im Vordergrund steht dabei nicht nur das bloße Reproduzieren von Wissen, sondern vielmehr das eigenständige Erkunden, Strukturieren und Hinterfragen mathematischer Zusammenhänge. Ein Mathematikunterricht, der kognitive Aktivierung fördert, zeichnet sich durch herausfordernde und vielfältige Lerngelegenheiten aus. Diese regen die Lernenden dazu an, Probleme zu lösen, ihre Überlegungen zu begründen und Wissen miteinander zu vernetzen (Leuders & Holzäpfel, 2011).

Die Verstehensorientierung zielt darauf ab, dass Lernende nicht nur Regeln und Algorithmen anwenden, sondern die zugrunde liegenden mathematischen Konzepte tiefgehend durchdringen und flexibel auf neue Situationen übertragen können (Krauthausen & Scherer, 2010). Für die Entwicklung eines fundierten Verständnisses von Konzepten, Strategien und Verfahren ist eine adäquate Unterrichtsgestaltung sowie eine unterstützende Begleitung durch die Lehrperson erforderlich. In diesen Phasen sollten geeignete Darstellungsformen, wie Tabellen, Diagramme und Materialien, angeboten werden, um das konzeptuelle Verständnis zu fördern. Gleichzeitig muss den Lernenden ausreichend Raum gegeben werden, damit sie ihre eigenen Denkwege reflektieren, begründen und alternative Strategien diskutieren können.

Das Kommunizieren über Mathematik ist aber auch eine Fähigkeit, die erlernt werden muss. Die damit verbundenen sprachlichen Handlungen und notwendigen Sprachmittel sind daher Teil des Lernprozesses. Im Unterricht wird die Sprache gezielt gefördert, unterstützt und schrittweise aufgebaut, um die Lernenden auf die jeweiligen fachlich relevanten sprachlichen Anforderungen vorzubereiten.

Lernendenorientierung und Adaptivität basiert darauf, dass unterschiedliche Lernvoraussetzungen und -bedarfe angemessen berücksichtigt werden. Lernpfade werden so konzipiert, dass die Lernenden auf der Grundlage ihrer bestehenden Vorstellungen eigenständig mathematische Konzepte erschließen können. Ein adaptiver Unterricht geht noch einen Schritt weiter und berücksichtigt die individuelle Heterogenität der Lernenden. Mittels diagnostischer Verfahren werden die individuellen Lernstände erfasst, um darauf basierend die nächsten Schritte im individuellen Lernprozess gezielt zu fördern.

Durchgängigkeit im Mathematikunterricht bezieht sich auf langfristiges und aufbauendes Lernen. Da Lernen ein fortlaufender Prozess ist, baut es auf bereits erworbenem Wissen auf und führt schrittweise zu neuen Lernzielen. Grundlegende mathematische Ideen, Inhalte, Aufgaben und Darstellungsformen werden im Verlauf der Schulzeit wiederholt aufgegriffen – auf unterschiedlichen Niveaus und aus verschiedenen Perspektiven –, um das Verständnis zu vertiefen und Zusammenhänge herzustellen. Für die Unterrichtsgestaltung bedeutet dies, gezielt zu überlegen: Welche Darstellungen und Vorstellungen eignen sich, weil sie gut weitergeführt werden können? Welche Anknüpfungen an vorherige Lernstufen sollten explizit hergestellt werden? Welche Verstehenslücken müssen rechtzeitig aufgearbeitet werden, damit alle Lernenden auf tragfähige und durchgängig nutzbare Vorstellungen und Darstellungen zurückgreifen können? (Prediger et al., 2023)

„Die mathematische Bildung von Kindern und Jugendlichen wird entscheidend von den Lerngelegenheiten geprägt, die sie im Mathematikunterricht und bereits in den Kindertagesstätten erhalten. Mathematisches Lernen ist dann am nachhaltigsten, wenn aktives Denken gezielt angeregt wird, an den Lernstand der Lernenden angeknüpft wird und ein Verständnis nicht nur für Konzepte, sondern auch für Strategien und Verfahren aufgebaut wird.“ (DZLM, 2025)

Spiele bieten im Mathematikunterricht eine spannende Möglichkeit, mathematische Konzepte auf lebendige und motivierende Weise zu erleben und zu erforschen. Im Folgenden wird eine Auswahl vorgestellt, die sich von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe einsetzen lassen und die als Ausgangspunkt für reichhaltiges mathematisches Lernen genutzt werden können.

3 Spiel mit Karten!

3.1 Ein Kartentrick

Der Ablauf des Kartentricks ist in nachfolgender Abbildung dargestellt.

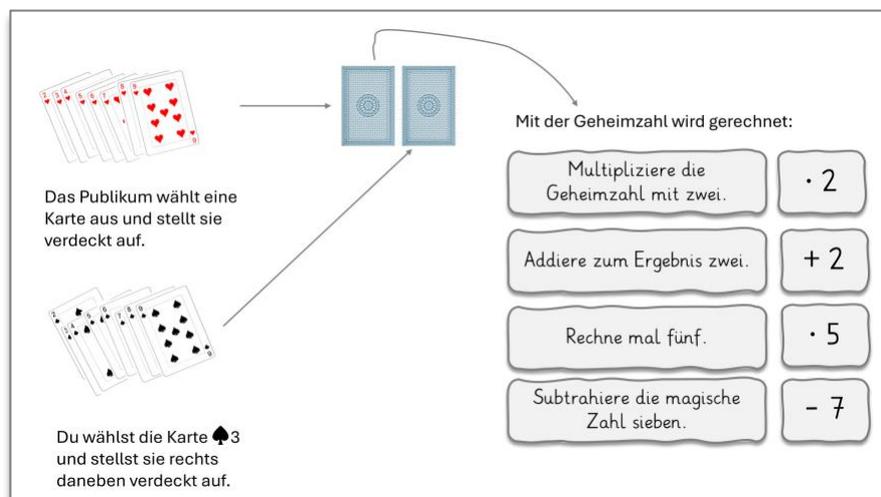


Abbildung 2: Ablauf des Kartentricks

Bei der Durchführung des Zaubertricks spielt die Inszenierung eine entscheidende Rolle. Besonders bei der Auflösung sollte betont werden, dass die Zehnerstelle als „uninteressant“ betrachtet wird, weil sie ja ohnehin (wieder-)erkannt wird. Ziel eines Zaubertricks ist es, den Lernenden die Möglichkeit zu geben, wie Detektive zu beobachten und zu staunen. Es ist jedoch wichtig, nicht nur im Staunen zu verharren, sondern auch die Frage nach dem „Warum“ zu stellen: Warum funktioniert der Trick?

Je nach Altersstufe stehen unterschiedliche mathematische Werkzeuge zur Verfügung, um die Funktionsweise des Tricks zu begründen. In der Volksschule ist ein symbolischer Beweis noch nicht möglich, jedoch können alle möglichen Fälle überprüft werden. Um den Lernenden

zu helfen, das Muster des Tricks zu erkennen, kann ein Streifen mit den auszuführenden Operationen als Scaffolding bereitgestellt werden. Der Vorteil solcher Hilfsmittel liegt darin, dass sie beim kollaborativen Arbeiten beim Sortieren und Ordnen der Ergebnisse unterstützen und das Aufdecken des Tricks erleichtern. Zudem wird sichergestellt, dass keine Fehler beim Aufschreiben des mathematischen Sachverhalts auftreten (siehe auch Abbildung 3).

In der Sekundarstufe, wo die mathematischen Werkzeuge der Termumformung zur Verfügung stehen, kann gezeigt werden, dass dieser Trick immer funktioniert. Hierbei ist das Interpretieren der letzten Zeile von Bedeutung: Was bedeutet $x \cdot 10 + 3$?

Abbildung 3 zeigt zwei Darstellungen des Zahlentricks. Links oben steht die Gleichung $5 \cdot 2 = 10 + 2 = 12 \cdot 5 = 60 - 7 = 53$. Ein roter Pfeil weist auf die Gleichung $10 = 53$ mit einem Fragezeichen, was einen Widerspruch darstellt. Darunter ist ein Scaffolding-Material dargestellt, bestehend aus zwei vertikalen Spalten von Kästchen. Die linke Spalte enthält die Zahlen 5, 10, 12, 60 und 53. Die rechte Spalte ist leer. Zwischen den Kästchen sind Operationen angegeben: $\cdot 2$, $+ 2$, $\cdot 5$ und $- 7$. Rechts daneben ist ein symbolischer Beweis dargestellt. Er beginnt mit 'x ... Geheimzahl' und zeigt die Schritte: $(x \cdot 2 + 2) \cdot 5 - 7$, $x \cdot 10 + 10 - 7$ und schließlich $x \cdot 10 + 3$. Rechts neben den Termen sind die entsprechenden Operationen in Kästchen dargestellt: $\cdot 2$, $+ 2$, $\cdot 5$ und $- 7$.

Abbildung 3: links: oben: fehlerhafter Anschrieb, unten: Scaffolding durch Material;
rechts: symbolischer Beweis

Wenn man Vermutungen in der Mathematik überprüft, dann ist auch ein Weiterdenken interessant, in diesem Zusammenhang gibt es zahlreiche Optionen:

- Funktioniert der Trick auch, wenn ich Grenzen auslote, d.h. wenn ich bei den Karten auch Bub (mit elf Punkten), Dame (mit zwölf Punkten) und König (mit 13 Punkten) als Geheimzahlen zulasse? Wie sehen die Ergebnisse hier aus? Verändert sich der Trick?
- Was passiert, wenn eine Karte mit dem Zahlenwert Null verwendet wird?
- Wie kann ich den Zahlentrick variieren? Woran erkenne ich die Variationsmöglichkeiten am Term?

Es gibt eine Vielzahl von mathematischen Tricks, die ähnlich wie dieser funktionieren. Dabei stellt die Kombination aus verbaler Anweisung, Übersetzung in einen Term und das Ergebnis (vereinfachter Term) immer ein Trio dar. Zu Beginn ist es sicher notwendig, genau mit diesen Zuordnungen und auch in dieser Reihenfolge zu arbeiten. Eine Umsetzung mit GeoGebra ist in Abbildung 4 dargestellt.

	Denk an eine Zahl. Addiere 3. Verdopple. Zieh „deine“ Zahl ab. Zähle 4 dazu. Zieh „deine“ Zahl ab.	Denk an eine Zahl. Subtrahiere 4. Multipliziere mit 3. Zähle 12 dazu. Dividiere durch „deine“ Zahl.	Denk an eine Zahl. Rechne mal 2. Gib 8 dazu. Halbiere. Vermindere um „deine“ Zahl.
Term:			
Ergebnis:			

Das Ergebnis ist immer 4.

Das Ergebnis ist immer 3.

Das Ergebnis ist immer 10.

$(x + 3) \cdot 2 - x + 4 - x$

$\frac{x \cdot 2 + 8}{2} - x$

$\frac{(x - 4) \cdot 3 - x + 12}{x}$

Abbildung 4: Drei Kartentricks in GeoGebra¹

Es bietet sich aber auch an, die Reihenfolge umzukehren. Der Ausgangspunkt könnte eine Zuordnung von Ergebnis zu Term sein, auf deren Basis dann verbale Anweisungen formuliert werden. Abbildung 5 zeigt weitere Tricks. Im Unterricht werden die Ergebnisse und Terme ungeordnet den Lernenden zur Verfügung gestellt, und die Entwicklung einer verbalen Anweisung liegt dann in den Händen der Lernenden.

 Ordne die Terme den Ergebnissen richtig zu!
Erfinde eine Anweisung für den Zahlentrick, so dass der Term richtig ist.

Das Ergebnis ist immer 16.	Das Ergebnis ist immer 2.	Das Ergebnis ist immer „deine“ Zahl.
$(x + 7) \cdot 2 - x + 2 - x$	$\frac{(x - 5) \cdot 2 - x + 10}{x}$	$(x \cdot 2 + 8 + 3 - 11) : 2$
Denk an eine Zahl. Addiere 7. Multipliziere mit 2. Zieh „deine“ Zahl ab. Zähle 2 dazu. Zieh „deine“ Zahl ab.	Denk an eine Zahl. Subtrahiere 5. Verdopple. Zähle 10 dazu. Dividiere durch „deine“ Zahl.	Denk an eine Zahl. Rechne mal 2. Gib 8 dazu. Addiere 3. Subtrahiere 11. Nimm die Hälfte.

Abbildung 5: weitere Zahlentricks

3.2 Kaprekar-Konstante

Dattatreya Ramchandra Kaprekar, auch bekannt als D. R. Kaprekar, war ein indischer Mathematiklehrer, der sich mit der Unterhaltungsmathematik beschäftigte und einige

bemerkenswerte Entdeckungen machte, die sich im schulischen Kontext nachvollziehen, nachentdecken und begründen lassen. Eine seiner bekanntesten Entdeckungen ist die Kaprekar-Konstante (Bhattacharjee, 2020; Kaprekar, 1955).

Die Kaprekar-Konstante für dreistellige Zahlen ist 495. Der Algorithmus zum Auffinden dieser Konstanten ist in Abbildung 6 dargestellt. Als Ausgangspunkt wählt man eine dreistellige Zahl, die mindestens zwei verschiedene Ziffern hat. Dies kann mit einem vorbereiteten Kartendeck geschehen: Ein Set in Rot, ein Set in Schwarz und beide enthalten jeweils nur Karten mit einstelligen Zahlenwerten. Damit bei der Inszenierung dieser Trick für viele unterschiedliche Startzahlen durchgeführt werden kann, die zufällig den Lernenden zugeteilt werden, kann auch das GeoGebra Applet „3 Ziffern ziehen“² verwendet werden.



Abbildung 6: Algorithmus zum Auffinden der Kaprekar-Konstanten für dreistellige Zahlen

Das Erproben dieses Algorithmus an vielen Beispielen führt dann zum Formulieren von Entdeckungen. Durch Sammeln und Ordnen der hierbei auftretenden Differenzen können schon einige Entdeckungen gemacht werden, siehe Abbildung 7:

- Die Kaprekar-Konstante 495 steht genau in der Mitte.
- Die Anzahl der Hunderter nimmt in der geordneten Darstellung von oben nach unten um eins zu, die Anzahl der Einer nimmt um eins ab.
- Die Zehnerstelle ist in jeder auftretenden Differenz stets neun.

Welche Differenz zu jeweils weiteren Differenzen führt, ist in Abbildung 7 rechts dargestellt. Auch lässt sich entdecken, dass der Algorithmus nach höchstens sechs Schritten abgeschlossen ist.

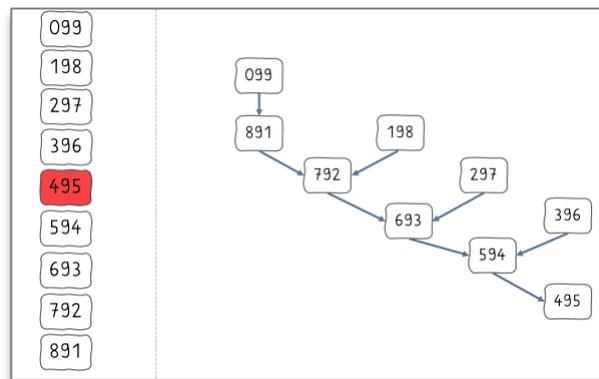


Abbildung 7: Ordnung und Struktur der auftretenden Differenzen beim Kaprekar-Algorithmus

Mögliche weitere Entdeckungen sind in Abbildung 8 angeführt. Will man eine Vielzahl von berechneten Kaprekar-Ketten erzeugen, kann das je nach Lernziel mit Papier und Stift passieren, oder man stellt den Schüler*innen (beispielsweise als GeoGebra Applet) eine Rechenhilfe³ zur Verfügung.

	$\begin{array}{r} 887 \\ - 788 \\ \hline 99 \end{array}$	$\begin{array}{r} 990 \\ - 99 \\ \hline 891 \end{array}$	$\begin{array}{r} 981 \\ - 189 \\ \hline 792 \end{array}$	$\begin{array}{r} 972 \\ - 279 \\ \hline 693 \end{array}$	$\begin{array}{r} 963 \\ - 369 \\ \hline 594 \end{array}$	$\begin{array}{r} 954 \\ - 459 \\ \hline 495 \end{array}$
	$\begin{array}{r} 543 \\ - 345 \\ \hline 198 \end{array}$	$\begin{array}{r} 981 \\ - 189 \\ \hline 792 \end{array}$	$\begin{array}{r} 972 \\ - 279 \\ \hline 693 \end{array}$	$\begin{array}{r} 963 \\ - 369 \\ \hline 594 \end{array}$	$\begin{array}{r} 954 \\ - 459 \\ \hline 495 \end{array}$	
		$\begin{array}{r} 981 \\ - 189 \\ \hline 792 \end{array}$	$\begin{array}{r} 972 \\ - 279 \\ \hline 693 \end{array}$	$\begin{array}{r} 963 \\ - 369 \\ \hline 594 \end{array}$	$\begin{array}{r} 954 \\ - 459 \\ \hline 495 \end{array}$	
			$\begin{array}{r} 421 \\ - 124 \\ \hline 297 \end{array}$	$\begin{array}{r} 972 \\ - 279 \\ \hline 693 \end{array}$	$\begin{array}{r} 963 \\ - 369 \\ \hline 594 \end{array}$	$\begin{array}{r} 954 \\ - 459 \\ \hline 495 \end{array}$
				$\begin{array}{r} 652 \\ - 256 \\ \hline 396 \end{array}$	$\begin{array}{r} 963 \\ - 369 \\ \hline 594 \end{array}$	$\begin{array}{r} 954 \\ - 459 \\ \hline 495 \end{array}$
					$\begin{array}{r} 761 \\ - 167 \\ \hline 594 \end{array}$	$\begin{array}{r} 954 \\ - 459 \\ \hline 495 \end{array}$
						$\begin{array}{r} 873 \\ - 378 \\ \hline 495 \end{array}$

Es entstehen unterschiedlich lange Ketten.
Die längste Kette braucht 6 Schritte.

Nach dem 1. Schritt ist die Zehnerziffer immer 9.
Bei den weiteren Schritten bleibt die Zehnerziffer immer 9.

Addiert man Hunderterziffer und Einerziffer, so ist ihre Summe immer 9.

Alle Ergebnisse sind durch 9 teilbar.
Alle Ergebnisse sind durch 11 teilbar.
Alle Ergebnisse sind durch 99 teilbar.

Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es?
Ordne sie der Größe nach.

Warum ist das so?

Abbildung 8: Mögliche Entdeckungen beim Auffinden der Kaprekar-Konstanten 495

Um nicht nur bei Entdeckungen zu verbleiben, wird hier exemplarisch der Beweis gezeigt, dass nach dem 1. Schritt die Zehnerziffer immer 9 ist und dass sie bei allen weiteren Schritten 9 bleibt. Basierend auf der Darstellung in Abbildung 9 können die weiteren Beweise geführt werden.

o.B.d.A gilt: $a \geq b \geq c$

①

	H	Z	E
	$a-1$	$b-1$	10
	a	b	c
-	c	b	a

c - a geht nicht.
Ich entbündle einen Zehner, sind 10 Einer.
(b - 1) - b geht nicht.
Ich entbündle einen Hunderter, sind 10 Zehner.

a - 1 - c 9 10 + c - a

③ Sei x die größere der beiden Ziffern und y die kleinere.
 $x > y$

④

	H	Z	E
	8	$x-1$	10
	9	x	y
-	y	x	9

y - 9 geht nicht.
Ich entbündle einen Zehner, sind 10 Einer.
(x - 1) - x geht nicht.
Ich entbündle einen Hunderter, sind 10 Zehner.

8 - y 9 y + 1

$10 + y - 9 = y + 1$
 $10 + x - 1 - x = 9$

② Die Ziffern der Größe nach sortieren. 9 ist sicher die größte Ziffer.
 $a - 1 - c$
 $10 + c - a$?

Abbildung 9: Beweisschritte mit sprachlichen Hinweisen zum Durchführen der Subtraktion mit dem Abziehverfahren

In einem kognitiv aktivierenden Mathematikunterricht können auch Fehler als Lernanlässe eingesetzt werden: Aufgaben, bei denen Schüler*innen vorgegebene Lösungen analysieren und Fehler entdecken sollen, fördern kritisches Denken. Sie setzen sich mit Lösungsprozessen auseinander und überlegen, welche Schritte richtig oder falsch sind. Bei einer Anfrage an chatGPT ergab sich ein Gespräch, das im Zusammenhang mit der Kaprekar-Konstanten 495 genutzt werden kann:

🗑️ 📄 🌐

⬆️

Gibt es noch andere dreistellige Zahlen, die in zwei Schritten zur Kaprekar-Konstante 495 führen?

ChatGPT kann Fehler machen
Überprüfe wichtige Informationen.

Ja, es gibt noch andere dreistellige Zahlen, die in zwei Schritten zur Kaprekar-Konstante 495 führen. Lassen wir uns eine weitere finden.

Vorgehen:

1. Wähle eine dreistellige Ausgangszahl.
2. Wende den Kaprekar-Algorithmus an:
 - Sortiere die Ziffern in **absteigender** und **aufsteigender** Reihenfolge.
 - Subtrahiere die kleine Zahl von der großen Zahl.
3. Prüfe, ob nach zwei Iterationen 495 erreicht wird.

Beispiel:

Ausgangszahl 546:

1. Erste Iteration:

große Zahl: 654, kleine Zahl: 456
 $654 - 456 = 198$

2. Zweite Iteration (mit 198):

große Zahl: 981, kleine Zahl: 189
 $981 - 189 = 495$

Ergebnis:

Die Ausgangszahl 546 führt in genau zwei Schritten zur Kaprekar-Konstante 495.

Falls du noch weitere Zahlen möchtest, lass es mich wissen! 😊

Abbildung 10: Kommunikation mit ChatGPT über die Kaprekar-Konstante 495: Fehlersuche

4 Spiel mit Würfeln!

Neben Spielkarten können auch Zahlenwürfel als Ausgangspunkt für mathematische Spiele und das Aufspüren von Mustern dienen.

4.1 Ein faires Spiel?

Der Dreischritt,

1. Spielen und Wahrscheinlichkeit als subjektiver Vertrauensgrad,
2. Datensammlung und relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit,
3. Spielanalyse und klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff,

der Spiele in mathematische Lerngelegenheiten transformiert, wird auch bei diesem Setting berücksichtigt (Musilek, 2024, S. 110–111). Abbildung 11 zeigt links die Spielanleitung und als wichtiges Darstellungsmittel eine Tabelle, um die Spielergebnisse festzuhalten. Aufgrund der ersten Spielerfahrungen kommen die Lernenden rasch zum Schluss, dass das Spiel nicht fair ist.

Durchgängigkeit bei der Wahl von Darstellungen lässt sich hier gut illustrieren. Eine „gute“, langfristig nutzbare Darstellung ist eine Verknüpfungstabelle. Im Lernsetting „ein faires Spiel“ bietet sich die Maltabelle an. Durch farbige Hervorhebungen, kann sichtbar gemacht werden, dass das Spiel nicht fair ist. Rot hat eindeutig eine höhere Wahrscheinlichkeit, einen Punkt zu erhalten, erkennbar im größeren, roten Anteil der Fläche. Durch Abzählen der roten und blauen Kästchen und der Berechnung nach dem Laplace-Prinzip (Anzahl der günstigen Fälle durch Anzahl der möglichen Fälle) lässt sich die Wahrscheinlichkeit bereits im Anfangsunterricht der Stochastik von der Lernenden in der Sekundarstufe 1 eigenständig ermitteln. In der Volksschule ist der Weg denkbar, alle roten und blauen Kästchen in einem $4 \cdot 9$ Rechteck anzuordnen. Dann kann man sehen, dass ein Streifen (9 Kästchen) blau ist und drei Streifen rot. Dies entspricht der Gewinnwahrscheinlichkeit von „nur“ einem Viertel für Blau, ein unfaires Spiel.

Abbildung 11: Ein faires Spiel?

4.2 Mein genialer Würfel

Das Spiel basiert auf einer Idee von Wälti et al. (2022, S. 86) und wurde angepasst und erweitert. Zu Beginn dieses Lernsettings hat jede Person die Möglichkeit, einen eigenen genialen Würfel zu entwerfen. Das einzige Kriterium, das erfüllt sein muss, ist, dass die Summe aller Punkte auf dem genialen Würfel genau 120 sein muss. Die Spielregeln sind in Abbildung 12 dargestellt.

Ein Spiel für und .

Würfelt mit beiden Würfeln.

Wer die größere Zahl gewürfelt hat, bekommt einen Punkt.

Wer zuerst 10 Punkte hat, gewinnt.

Haltet die Punkte in einer Tabelle fest!

=	

<https://www.geogebra.org/m/tad2cxm4#material/zrwnmpxj>

Die Summe ist noch nicht 120!

Die Summe ist noch nicht 120!

0 0

Welcher Würfel ist „genial“?

Abbildung 12: Mein genialer Würfel – Spielregel und GeoGebra Applet zum Würfeln⁴

Im Verlauf des Spiels können die Lernenden erste Erfahrungen sammeln, um zu ermitteln, welcher der beiden genialen Würfel, die gegeneinander antreten, die größeren Gewinnchancen bietet. Um festzustellen, welcher Würfel überlegen ist, kann, wie bereits in Abschnitt 4.1 erläutert, eine Verknüpfungstabelle verwendet werden. Nachdem die Lernenden die Verknüpfungstabelle „händisch“ ausgefüllt und ihren genialen Würfel in „ihrem“ Team ausgewählt haben, treten sie mit diesem gegen ein anderes Team an. Für weiterführende Untersuchungen kann das GeoGebra Applet⁵ „Mein genialer Würfel gewinnt immer?“ genutzt werden.

Ziel dieses Spiels in höheren Jahrgangsstufen ist es, die Nichttransitivität zu veranschaulichen. Nichttransitive Würfel sind eine spezielle Art von Würfeln, bei denen die Gewinnwahrscheinlichkeit nicht den klassischen transitiven Eigenschaften folgt. Dies bedeutet, dass es eine zyklische Überlegenheit gibt: Ein Würfel A schlägt Würfel B häufiger, Würfel B schlägt Würfel C häufiger, jedoch schlägt Würfel C wiederum Würfel A häufiger – ähnlich dem Prinzip von Schere, Stein, Papier.

Wie in Abschnitt 3.1 vorgestellt, bietet sich auch in diesem Lernsetting wieder an, die Richtung umzukehren. Die ausgefüllten Verknüpfungstabellen werden wie beispielsweise in Abbildung 13 zur Verfügung gestellt, und die Lernenden sollen beurteilen, welcher dieser

Würfel ein genialer Würfel ist. Bei der Diskussion wird man schnell zum Urteil kommen, dass hier immer nur ein Vergleich von zwei Würfeln stattfinden kann und keine generelle Aussage getroffen werden kann.

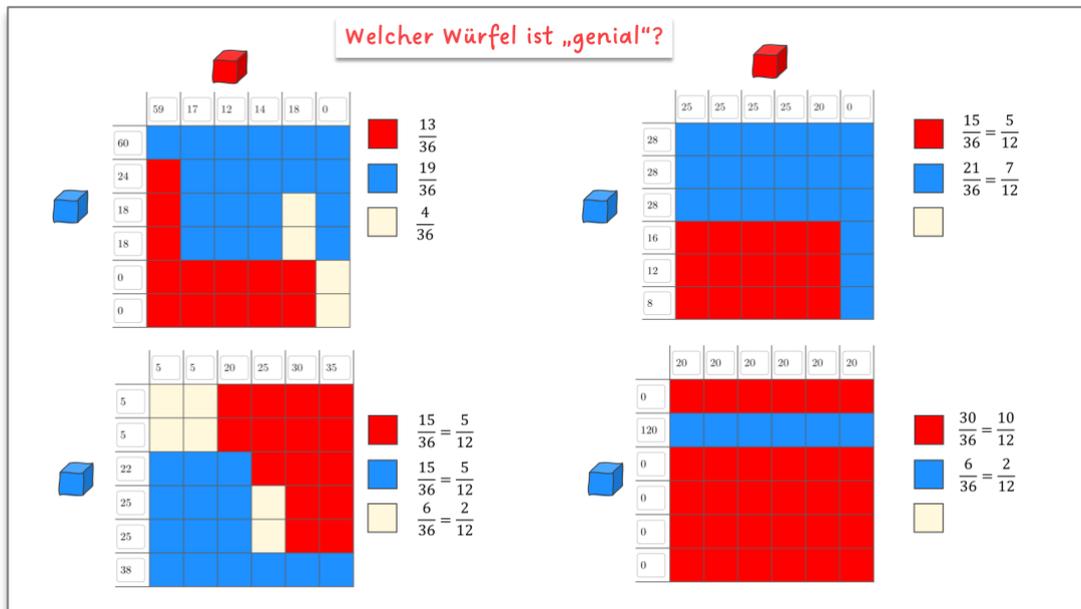


Abbildung 13: Wege umkehren: Verknüpfungstabellen untersuchen

Um Würfel miteinander vergleichen zu können, könnte man in der Sekundarstufe 2 auch auf die Idee verfolgen, die Erwartungswerte zu ermitteln. Beispielhaft zeigt dies Abbildung 14, und erneut kann ein Muster entdeckt werden, das es zu begründen gilt.

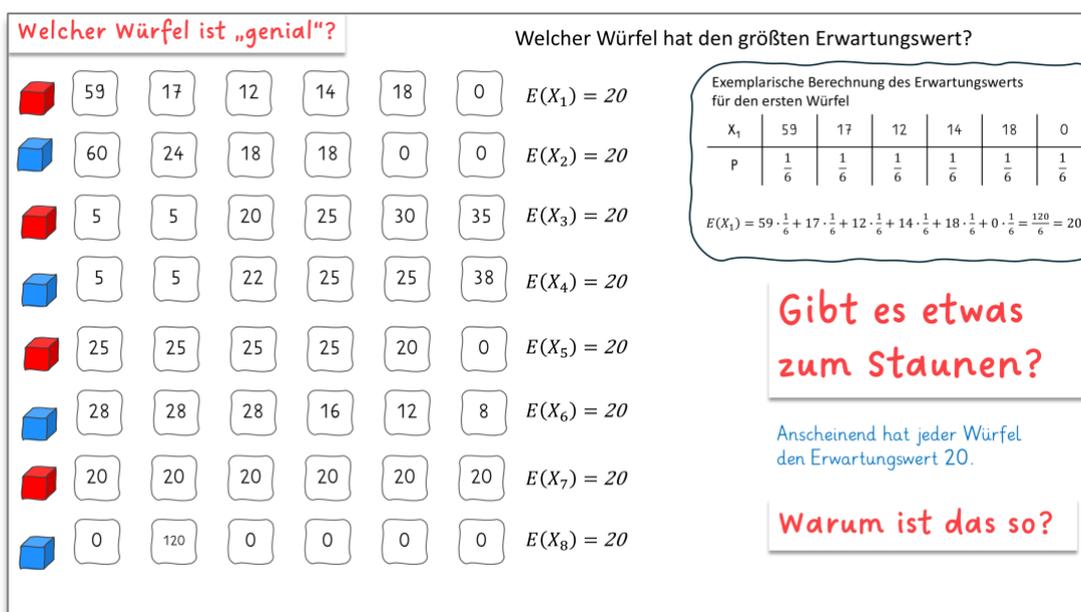


Abbildung 14: Erwartungswerte von genialen Würfeln



$$E(X_n) = a \cdot \frac{1}{6} + b \cdot \frac{1}{6} + c \cdot \frac{1}{6} + d \cdot \frac{1}{6} + e \cdot \frac{1}{6} + f \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{a + b + c + d + e + f}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

↑
Die Summe aller
Augenzahlen muss nach
Vorgabe 120 ergeben.

Abbildung 15: Beweis, dass alle Würfel denselben Erwartungswert haben

Die Aufgabenstellung Mein genialer Würfel kann leicht an die Zielgruppe der Lernenden angepasst werden. Man kann die zu erreichende Summe variieren (z.B. im Zahlenraum 20, oder 1000), vorgeben, dass die Augenzahlen Dezimalzahlen sein müssen, die Anzahl der Würfelseiten verändern, und die Spielregel „größere Zahl gewinnt“ austauschen. Alle diese Variationen können dann wieder als Ausgangspunkt für reichhaltiges mathematisches Lernen dienen und erneut im Hinblick auf Muster untersucht werden.

5 Zurück zum Anfang

Die in diesem Beitrag vorgestellten Ansätze für einen qualitätvollen Mathematikunterricht basieren auf fünf zentralen Qualitätsprinzipien: kognitive Aktivierung, Verstehensorientierung, Durchgängigkeit, Lernendenorientierung & Adaptivität sowie Kommunikationsförderung. Diese Prinzipien wurden als Leitlinien herangezogen, um Lernmaterialien und Aufgaben zu gestalten, die nicht nur mathematisch reichhaltig sind, sondern auch eine aktive und entdeckende Auseinandersetzung mit den Inhalten ermöglichen. Doch eine zentrale Erkenntnis dieses Beitrags ist die Bedeutung von Spielen als wesentlicher Bestandteil, um Lernumgebungen zu bereichern und die genannten Prinzipien noch stärker zu fördern. Deshalb soll hier das Qualitätsprinzip um eine sechste Komponente erweitert werden: den gezielten Einsatz von Spielen für reichhaltige Lernumgebungen.

Die Zerlegung, die zu Beginn vorgestellt wurde, lässt sich also um das rote Quadrat erweitern und nimmt einen wichtigen Platz im „alten“ qualitätvollen Rahmen ein, siehe Abbildung 16.

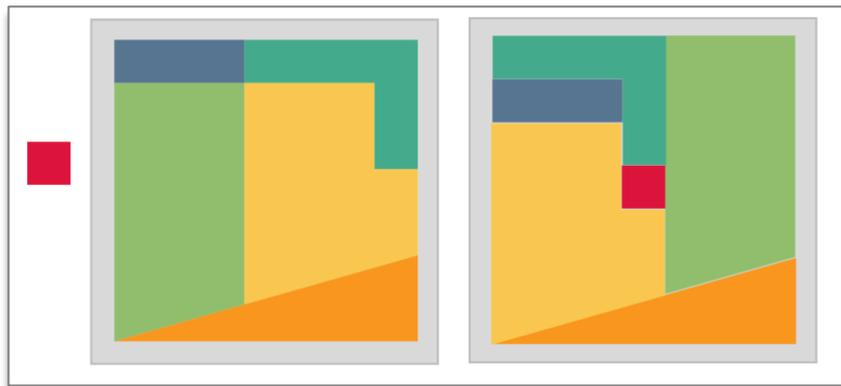


Abbildung 16: Platz für neues im alten Rahmen

Hier sei erneut darauf hingewiesen: mathektiv bedeutet, mathematisch aktiv zu sein. Das detektivische Aufspüren mathematischer Muster und die aktive Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten – stehen im Zentrum eines qualitätsvollen Mathematikunterrichts. Zuerst sehen wir etwas, dann staunen wir. Und wichtig ist es hier nach dem Warum zu fragen. Auch in Abbildung 16 zeigt sich ein Rätsel versteckt. Warum passt das rote Quadrat in den „alten“ quadratischen Rahmen? Abbildung 17 gibt einen Hinweis zur Lösung dieses letzten Rätsels.

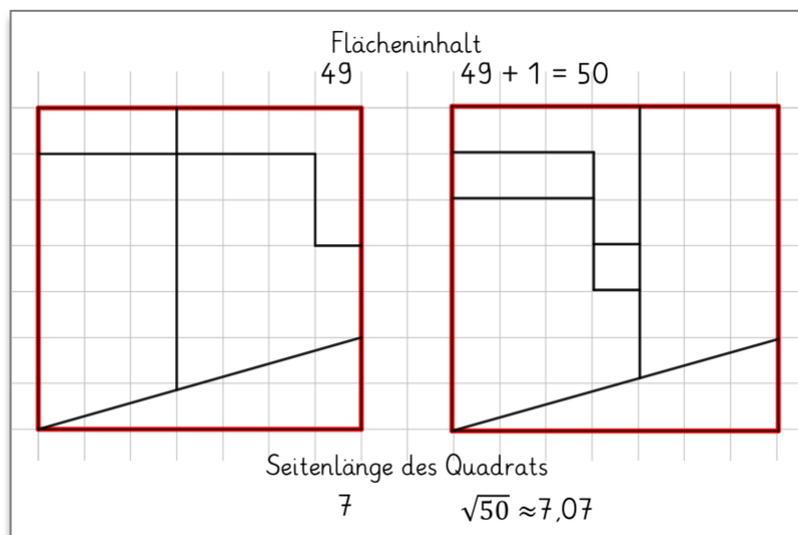


Abbildung 17: Lösungshinweis zum Zerlegungsrätsel

Spiele als Lernumgebungen schaffen nicht nur eine motivierende Atmosphäre, sondern laden Lernende dazu ein, Mathematik auf lebendige und forschende Weise zu erleben. Sie bieten vielfältige Anknüpfungspunkte für die Förderung kognitiver Aktivierung, indem sie Probleme in einem spielerischen Kontext präsentieren und dabei die Lernenden zum Nachdenken, Entdecken und Begründen anregen. Gleichzeitig ermöglichen Spiele eine Verstehensorientierung, da sie oft auf grundlegenden mathematischen Strukturen und Mustern basieren, die

Lernende durch eigenes Handeln und Experimentieren erforschen können. Die adaptiven Möglichkeiten von Spielen – etwa durch die Anpassung von Regeln oder Schwierigkeitsgraden – erlauben eine gezielte Differenzierung, sodass Lernende mit unterschiedlichen Voraussetzungen individuell gefördert werden können. Schließlich unterstützen Spiele die Kommunikation, indem sie kooperative Szenarien schaffen, in denen Lernende über ihre Strategien und Entdeckungen sprechen und argumentieren. Die vorgestellten Beispiele aus dem Beitrag zeigen, wie Spiele als Ausgangspunkt für reichhaltiges mathematisches Lernen genutzt werden können. Sie laden dazu ein, Muster zu erkennen, eigene Hypothesen zu formulieren und diese schließlich zu überprüfen. Durch die gezielte Einbettung solcher Spiele in den Unterricht entsteht eine Lernumgebung, die sowohl die fachliche als auch die überfachliche Kompetenzentwicklung fördert.

„mathektiv“ – ein Kofferwort aus „Mathematik“ und „aktiv“ – bringt den Kern des Ansatzes auf den Punkt: Mathematik soll aktiv und forschend erlebt werden, vergleichbar mit einem Detektiv, der durch gezieltes Beobachten und Analysieren Muster aufspürt und logische Schlüsse zieht.

Literatur

- Bhattacharjee, P. K. (2020). Kaprekar's Constant 6174 for Four Digits Number Reality to Other Digits Number. *International Journal of Chemistry, Mathematics and Physics*, 4(5), 92–94.
<https://doi.org/10.22161/ijcmp.4.5.1>
- DZLM. (2025). *QuaMath. Unterrichts- und Fortbildungsqualität in Mathematik entwickeln*.
<https://quamath.de/>
- Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2024). Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien. *Mathematik Lehren*, 242, 2–8.
- Kaprekar, D. R. (1955). An Interesting Property of the Number 6174. *Scripta Mathematica*, 15, 244–245.
- Krauthausen, G., & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule*. IPN Leibniz-Inst. für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Univ. Kiel.
- Leuders, T., & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft*, 39(3), 213–230.
- Musilek, M. (2024). Wahrscheinlich gewinne ich. Mit einfachen Überlegungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung über Gewinnstrategien bei Spielen nachdenken. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, 56, 107–123.
- Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2023). Durchgängigkeit von Darstellungen und Vorstellungen für den nachhaltigen Verständnisaufbau: Spiralcurriculum praktisch gewendet. *MNU-Journal*, 05, 421–427.
- Wälti, B., Schütte, M., & Friesen, R.-A. (2022). *Mathematik kooperativ spielen, üben, begreifen. Band 1b: Lernumgebungen für heterogene Gruppen: (Schwerpunkt 3. bis 5. Schuljahr)* (2. Auflage). Kallmeyer.

¹ Drei Kartentricks in GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/tad2cxm4#material/bbndwuie>

² 3 Ziffern ziehen: <https://www.geogebra.org/m/tad2cxm4#material/auc6bsuj>

³ Rechenhilfe: <https://www.geogebra.org/m/tad2cxm4#material/zsgyj4uv>

⁴ Mit zwei Würfeln würfeln: <https://www.geogebra.org/m/tad2cxm4#material/zrwnmpxi>

⁵ Mein genialer Würfel gewinnt immer? <https://www.geogebra.org/m/tad2cxm4#material/vepkunx9>