Nachdenken statt Nach-Denken

Wie kann Problemlösen im Regelunterricht realisiert werden?

Felix Woltron[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/re-source.2025.i2.a1374

Zusammenfassung

Das Motto „Mathematik aktiv" steht für eine aktive Gestaltung des Mathematikunterrichts. Doch was bedeutet es, „aktiv" Mathematik zu betreiben? Eine mögliche Antwort darauf ist die eigenständige Auseinandersetzung mit noch unbekannten Problemstellungen. Das zugrunde liegende didaktische Konzept des Problemlösens ist seit Jahrzehnten ein wesentlicher Bestandteil der mathematischen Fachdidaktik. Die kontinuierliche Umsetzung im Regelunterricht gelingt jedoch aufgrund verschiedener Hürden oft nur unzureichend. Ziel dieses Artikels ist es, mithilfe aktueller theoretischer Überlegungen und evidenzbasierter Strategien eine praxisnahe Grundlage zu bieten, um diese Hindernisse zu überwinden und den kontinuierlichen Einsatz von Problemlösungsprozessen zu fördern. Lehrpersonen sollen dabei nicht nur von theoretischen Konzepten profitieren, sondern aktiv in die Entwicklung und Umsetzung des Problemlösens im Regelunterricht eingebunden werden, um die Umsetzung im Mathematikunterricht zu erleichtern und zu verbessern.

Stichwörter: Problemlösen, Beliefs, Umsetzungsstrategien

1 Einleitung

Das fachdidaktische Konzept des „Problemlösens", welches sich mit der Bewältigung nicht-routinemäßiger Aufgaben ohne vorgefertigte Lösungsstrategien befasst, steht seit Jahrzehnten im Fokus der mathematischen Fachdidaktik (Liljedahl & Cai, 2021, S. 723 ff.). Die erfolgreiche Implementierung dieses Konzepts in den regulären Unterricht erfordert nicht nur spezielle Vorgehensweisen, sondern auch spezifische Wissensdimensionen der Lehrpersonen. Ziel dieses Artikels ist es, Voraussetzungen und Hürden für die Realisierung des Problemlösens im Regelunterricht zu thematisieren und daraus Umsetzungsstrategien abzuleiten. Ebenso

[1] Universität Wien, Universitätsring 1, 1010 Wien.
E-Mail: *felix.woltron@univie.ac.at*

werden beispielhaft Problemstellungen für die Primar- und Sekundarstufe aufgezeigt und besprochen.

2 Theorie

2.1 Definition

In der mathematischen Fachdidaktik wird von einem „Problem“ gesprochen, wenn eine Aufgabe eine kognitive Barriere enthält, die über bekannte Lösungswege hinausgeht. Im deutschsprachigen Raum unterscheidet man zwischen (Routine-)Aufgaben, bei denen die Lösungsstrategie bekannt ist, und Problemen, die von den Lernenden als ungewohnt und nicht unmittelbar lösbar wahrgenommen werden (Bruder & Collet, 2011, S. 11). Das Lösen solcher Probleme erfordert die Neukombination vorhandenen Wissens oder den Einsatz neuer Methoden, die als „Heurismen“ bezeichnet werden. Nach Pólya (1949) sind Heurismen Denkprozesse, die typischerweise beim Problemlösen unterstützen.

Schoenfeld (1985) beschreibt vier wesentliche Komponenten des Problemlösens: Ressourcen (fachliches Vorwissen), Beliefs (Überzeugungen der Lernenden über Mathematik), Heuristiken (strategische Lösungsansätze) und Kontrolle (bewusste Steuerung des eigenen Vorgehens).

Beliefs setzen sich nach Maaß (2006, S. 119) „[…] aus relativ überdauerndem subjektivem Wissen von bestimmten Objekten oder Angelegenheiten sowie damit verbundenen Emotionen und Haltungen zusammen […]“ und „[…] können bewusst oder unbewusst sein“. Überzeugungen von Schüler*innen wie „nur Genies können kreative Lösungswege entwickeln“, „Probleme müssen schnell lösbar sein“ oder „es gibt immer nur eine richtige Lösung“ können die Bereitschaft zum Problemlösen im Unterricht erheblich beeinträchtigen (Schoenfeld, 1992, S. 359).

Die Komponente „Kontrolle“ beschreibt die bewusste Zuweisung von Zeit und Anstrengung zu verschiedenen Lösungsansätzen (Schoenfeld, 1985, S. 232). Auch der Umgang mit Frustration spielt eine entscheidende Rolle für den Erfolg des Problemlöseprozesses (Herold-Blasius et al., 2019, S. 299).

2.2 Gründe für den Einsatz des Problemlösens

Der Einsatz des didaktischen Konzepts des Problemlösens im Mathematikunterricht kann nach Rott (2015, S. 10 ff.) aufgrund vielfältiger Aspekte begründet werden. Aus innermathematischer Sicht steht das Problemlösen im Zentrum fachmathematischer Tätigkeit. Nach Halmos (1980, S. 519) ist „[…] the mathematician’s main reason for existence […] to solve problems […]“. Die Realisierung von problemlösenden Prozessen im Regelunterricht kann und soll ein möglichst wissenschaftsnahes Vorgehen ermöglichen und somit zur Ausprägung eines adäquaten Bildes der Mathematik und ihrer Arbeitsweise beitragen.

Aus mathematisch didaktischer Sicht spricht die dritte Winter'sche Grunderfahrung („in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben"), welche den allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterrichts legitimiert, für den Erwerb von Problemlösefähigkeiten im Mathematikunterricht (Winter, 1995, S. 37).

Weitere Gründe für die Behandlung von Problemen im Mathematikunterricht können nach Rott (2015, S. 10 ff.) folgendermaßen aufgelistet werden:

- Pädagogische Gründe: Mathematikunterricht soll einen breiten, gesellschaftlichen Konsens anstreben, „entdeckendes Lernen" solle an ausgewählten Problemen stattfinden.
- Lernpsychologische Gründe: Jeder Lernende muss sich durch aktive Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand sein Wissen selbst konstruieren; zur Gestaltung einer entsprechenden Unterrichtskultur gehört das Problemlösen.
- Empirische Gründe: Neben Studien wie TIMSS und PISA, die Schüler*innen Defizite auf dem Gebiet des Problemlösens nachweisen und damit Handlungsbedarf nahelegen, gibt es auch Lehrer*innenbefragungen, die zeigen, dass ein starkes Interesse an einem problemorientierten Mathematikunterricht besteht.
- Gesellschaftliche Gründe: Eine dringende Forderung an den heutigen Unterricht (u.a. von TIMSS und PISA) ist die Vorbereitung der Lernenden auf das Lösen von (komplexen) Problemen und die Emanzipation von ihren Lehrpersonen.
- Motivatorische Gründe: Problemlösen kann Spaß an der Mathematik vermitteln; durch Problemaufgaben und den Einbezug von Erfahrungen der realen Welt könne man bei Schüler*innen Motivation erzeugen.

Des Weiteren ist die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten eine zentrale Forderung der österreichischen Lehrpläne, sowohl fachübergreifend als auch fachspezifisch für die mathematische Ausbildung. Es sei jedoch angemerkt, dass neben den zahlreichen Quellen, die das Problemlösen legitimieren, auch Artikel existieren, die dieses Konzept sowie verwandte fachdidaktische Ansätze kritisch hinterfragen (z. B. Kollosche, 2017).

2.3 Anforderungen an Lehrpersonen für die Realisierung des Problemlöseprozesses

Die Umsetzung dieses didaktischen Konzepts im regulären Unterricht erfordert von Lehrkräften umfassende Kenntnisse in verschiedenen Bereichen, die von Clivaz et al. (2023, S. 3) in folgende Kategorien unterteilt werden:

 | ISSN 2313-1640

1. Knowledge of mathematical Problem solving (PS)
2. Knowledge of mathematical problems
3. Knowledge of problem posing
4. Knowledge of students as mathematical problem solvers
5. Knowledge of affective factors and beliefs (teacher/student)
6. Knowledge of instructional practices for PS

Die ersten drei Kategorien werden als „PS-Content Knowledge“ zusammengefasst, während die restlichen als „Pedagogical PS-Knowledge“ bezeichnet werden. Dieser Artikel konzentriert sich auf die Kategorien 2, 3 und 6, da Lehrkräfte häufig folgende Herausforderungen bei der Implementierung von PS im Unterricht äußern (vgl. Herold-Blasius et al., 2019, S. 297 ff.):

I. Dabei lernt man nicht genug.
II. Das ist nur was für die Guten.
III. Das lässt sich im Unterricht nicht realisieren.
IV. Problemlösen – das mache ich doch schon (wobei Problemlösen mit dem Lösen komplexer Routineaufgaben gleichgesetzt wird).

Diese Aussagen verdeutlichen ein mangelndes Verständnis von problemlösenden Prozessen im Regelunterricht (IV, 2) sowie darüber, wie dieses Konzept im Unterricht umgesetzt werden kann (I, II, III, 2, 3, 4). Spezielle Lehrer*innenausbildungsprogramme sollen diese Defizite beheben und Wissen in allen genannten Kategorien stärken. Da das Erstellen von Problemlöseaufgaben laut Chapman (2015) zeitaufwendig und anspruchsvoll ist, sollten Lehrkräfte mit Materialien unterstützt werden, die eine Integration in den Lehrplan ermöglichen und gleichzeitig eine interne Differenzierung bieten („low floor, high ceiling tasks“).

3 Realisierungsmöglichkeiten im Mathematikunterricht

Die theoretische Beschreibung von Problemlöseprozessen wurde von mehreren Autor*innen in Phasenmodellen bereits vorgenommen (Rott et al., 2021, S. 739). Auch für die Realisierung im Regelunterricht gibt es bereits Modelle und Ideen (z. B. Heurismentraining, Bruder & Collet, 2011, S. 114). Aus Sicht des Autors ist es jedoch zielführender bzw. nachhaltiger, Umsetzungsstrategien nicht nur vorzugeben, sondern sie mit den umsetzenden Lehrpersonen (weiter)zu entwickeln. Dies soll im Rahmen eines Projektes im kommenden Schuljahr auch durchgeführt werden. Als Grundlage dazu dient der „Building Thinking Classrooms Approach“ von Liljedahl (2016). Darin werden neun „Elemente“ eines Unterrichtssettings beschrieben, welche Schüler*innen dabei unterstützen bzw. motivieren sollen, eigenaktiv und selbst-denkend Problemstellungen zu lösen. Die folgenden Kriterien sollen somit auch die Implementierung von

Problemlöseprozessen im Regelunterricht fördern und lauten folgendermaßen (Liljedahl, 2016, S. 381 f.):

- The type of tasks used and when and how they are used.
- Lessons need to begin with good problem-solving tasks.
- The way in which tasks are given to students.
- How groups are formed, both in general and when students work on tasks.
- Student workspace while they work on tasks.
- Room organization, both in general and when students work on tasks.
- How questions are answered when students are working on tasks.
- The ways in which hints and extensions are used while students work on tasks.
- When and how a teacher levels their classroom during or after tasks.
- Assessment, both in general and when students work on tasks.

In einem „Thinking Classroom“ stehen problemlösende, ansprechende Aufgaben im Mittelpunkt, die mündlich gestellt werden, um sofortige Diskussionen zu fördern. Schüler*innen arbeiten in zufällig gebildeten Gruppen an vertikalen, nicht-permanenten Flächen, während die Lehrperson den Raum flexibel nutzt. Fragen werden nur beantwortet, wenn sie das Weiterdenken unterstützen, und Hinweise oder Erweiterungen halten die Aufgaben anspruchsvoll, aber machbar. Sobald alle Gruppen ein Grundverständnis erreicht haben, wird das Thema gemeinsam reflektiert und formalisiert. Die Bewertung fokussiert sich auf den Lernprozess und die aktive Beteiligung, statt nur auf das Endprodukt.

3.1 Aufgabenkategorien

Ein weiterer Ansatzpunkt für die gemeinsame Erarbeitung von Realisierungsmöglichkeiten liefern Herold-Blasius et al. (2019, S. 299 ff.). Die Autor*innen sprechen sich für den Einsatz von Problemlösen als Ergänzung zu Routineaufgaben vor allem in Einstiegsphasen und Übungsphasen aus. Inhaltlich muss jedoch noch geklärt werden, welches mathematisches Themengebiet sich für das Konzept des Problemlösens in welchen Phasen eignet und wie die Ausarbeitungen der Schüler*innen bewertet/benotet werden können. Ein potentielles Bewertungsmuster findet sich ebenso bei Herold-Blasius et al. (2019, S. 307).

Eine weitere Aufgabenkategorie stellen aus Sicht des Autors dieses Artikels themenunabhängige Probleme dar. Diese können in unterschiedlichen Schulstufen und zu unterschiedlichen Phasen des Unterrichts eingesetzt werden und dienen dem Kennenlernen bzw. dem Vertiefen von heuristischen Prinzipien, Strategien und Hilfsmitteln.

3.2 Beispielhafte Problemstellungen

Eine mögliche (je nach Betrachtungsweise themenunabhängige) Aufgabe für die Sekundarstufe 1, die sich gemäß Liljedahl (2016, S. 381) sowohl als Einstiegsaufgabe zu Beginn einer Unterrichtsstunde als auch als erster Zugang zum Problemlösen eignet, lautet wie folgt:

> *Max und Moritz spielen ein einfaches Spiel. Dazu haben sie hundert 1-Cent-Münzen auf dem Tisch zu einem Kreis ausgelegt. Wer am Zug ist, darf eine Münze oder zwei Münzen aus dem Kreis nehmen. An welcher Stelle ein Spieler die Münze oder die Münzen entfernt, spielt keine Rolle. Entscheidet er sich für zwei Münzen, müssen diese aber direkt nebeneinander liegen. Wer zuerst keine Münze mehr nehmen kann, hat verloren. Max macht den ersten Zug. Beide Spieler sind perfekte Logiker und machen keine Denkfehler.*
> *Wer wird das Spiel gewinnen und welcher Strategie sollte er folgen? (*Hemme, 2018*)*

Die Lösung dieses Problems wird, so wie jene der folgenden, nicht in diesem Artikel verschriftlicht. Sie kann jedoch gerne bei Interesse durch Kontaktaufnahme mit dem Autor erhalten werden.

Die folgende Problemstellung (konzipiert von Musilek) ist nach Herold-Blasius et al. (2019) in Übungsphasen einsetzbar. Inhaltlich zielt sie auf die Festigung der Addition im Zahlenraum 1 bis 100 bzw. auf die Eigenschaften von natürlichen Zahlen (gerade/ungerade) in der Primarstufe ab:

> *In jedem dieser Säcke sind unendlich viele Zahlen von der darauf vermerkten Sorte.*
> *Nimm genau vier Zahlen und addiere sie. Die Summe soll 16 sein!*
> *Nimm genau zehn Zahlen und addiere sie. Die Summe soll 37 sein!*

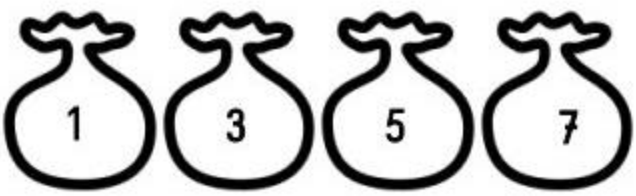

Abbildung 1: Problemstellung Primarstufe

Ist der Vorgang des Problemlösens im Unterricht etabliert, können auch komplexere bzw. umfangreichere Aufgabenstellungen behandelt werden (Liljedahl, 2016). Ein mögliches Beispiel dazu entstammt dem Projekt „MFU!“ („Mathe Fans an die Uni!“) der Universität Wien und wurde für die 8 Schulstufe konzipiert:

Finde für alle Zahlen größer als 1 und kleiner als 20 alle Möglichkeiten, sie als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (Treppenzahlen) größer als 0 zu schreiben. Was fällt dir auf? Begründe deine Antwort.

Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 100 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (Treppenzahlen) größer als 0 zu schreiben. (Hinweis: Anhand der Summe 1+2+3+…+14 erkennt man, dass es höchstens 13 Summanden sein können.)

4 Ausblick

Den diskutierten Gründen für den Einsatz des fachdidaktischen Konzepts des Problemlösens im Regelunterricht stehen ebenso Herausforderungen in der praktischen Umsetzung gegenüber. Um diese zu bewältigen, bedarf es durchdachter Strategien, die von den unterrichtenden Lehrkräften mitgetragen und idealerweise aktiv mitgestaltet werden.

Das übergeordnete Ziel des gehaltenen Vortrags ist die Implementierung des Problemlösens im Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe. Zu diesem Zweck wurden Lehrkräfte eingeladen, die neben theoretischen Impulsen künftig mit geeigneten Materialien unterstützt werden. Zudem wird ihr Unterricht empirisch begleitet und theoriegeleitet analysiert.

Neben der Förderung bereits tätiger Lehrkräfte sollen auch Studierende während ihrer Ausbildung die Möglichkeit erhalten, ihre Expertise in den genannten Wissensdimensionen des Problemlösens zu vertiefen. Sie sollen des Weiteren problemorientierten Mathematikunterricht nicht nur durch Hospitationen kennenlernen, sondern auch eigene Unterrichtseinheiten nach diesem Konzept in der Praxis erproben können.

Literatur

Bruder, R., & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* Cornelsen Berlin.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 3* (Heft 1), 19—36. https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1049

Clivaz, S., Batteau, V., Pellet, J. P., Bünzli, L. O., Daina, A., & S. Presutti (2023). Teachers' mathematical problem-solving knowledge: In what way is it constructed during teachers' collaborative work? *The Journal of Mathematical Behavior, 69*, 1—19. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101051

Halmos, P. R. (1980). The Heart Of Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 87* (Heft 7), S. 519—524.

Hemme, H. (2018, 3. März). Münzen im Kreis. *Spektrum.de.* https://www.spektrum.de/raetsel/muenzen-im-kreis/1577710

Herold-Blasius, R., Holzäpfel, L., & Rott, B. (2019). Problemlösestrategien lehren lernen – Wo die Praxis Probleme beim Problemlösen sieht. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht.* Springer Spektrum Wiesbaden (S. 295—309). https://doi.org/10.1007/978-3-658-24292-3_21

Kollosche, D. (2017). Entdeckendes Lernen: Eine Problematisierung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 38*, 209—237. https://doi.org/10.1007/s13138-017-0116-x

Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving. In P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Hrsg.), *Posing and Solving Mathematical Problems. Research in Mathematics Education*. Springer Cham (S. 361—386). https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_21

Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education, 53*, S. 723—735. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w

Maaß, K. (2006). Bedeutungsdimensionen nützlichkeitsorientierter Beliefs. Ein theoretisches Konzept zu Vorstellungen über die Nützlichkeit von Mathematik und eine erste empirische Annäherung bei Lehramtsstudierenden. *mathematica didactica*, *29* (Heft 2), 114—138.

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Francke Bern.

Rott, B. (2015). *Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer empirischen Studie.* WTM Münster.

Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM Mathematics Education*, 53, S. 737—752. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press New York.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* MacMillan New York (S. 334—370).

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61*, 37—46.