Wirtschaftliche Anwendungen in der Schulmathematik

Peter Hofbauer / Heidi Metzger-Schuhäker

BHAK BHAS HORN

Wirtschaftliche Anwendung der Differentialrechnung

- Kostenfunktionen
- Stückkostenfunktion / variable Stückkostenfunktion
- Preisfunktion der Nachfrage
- Preisfunktion des Angebots
- Erlös – und Gewinnfunktion
- Elastizität

KOSTEN- UND PREISTHEORIE

In der Kosten- und Preistheorie befasst sich die Wirtschaftsmathematik mit der genaueren Analyse von Kosten, Erlösen und Gewinnen sowie von Angebot und Nachfrage.

Dabei werden für reale Situationen möglichst einfache mathematische Modellfunktionen entwickelt, mit deren Hilfe man Kostenverläufe, ihre Veränderungen und Auswirkungen interpretieren kann.

BHAK BHAS HORN

Die Kostenfunktion K(x)

Die Gesamtkosten, die bei jeder Produktion bzw. beim Handel von Waren entstehen, hängen von der produzierten Menge ab.

x	Menge, Stückzahl, Masse des hergestellten Produkts in ME (Mengeneinheiten) angegeben
K(x)	entsprechend in GE (Geldeinheiten) angegeben

Die Kostenfunktion K(x)

Die Gesamtkosten K(x) setzen sich zusammen aus:

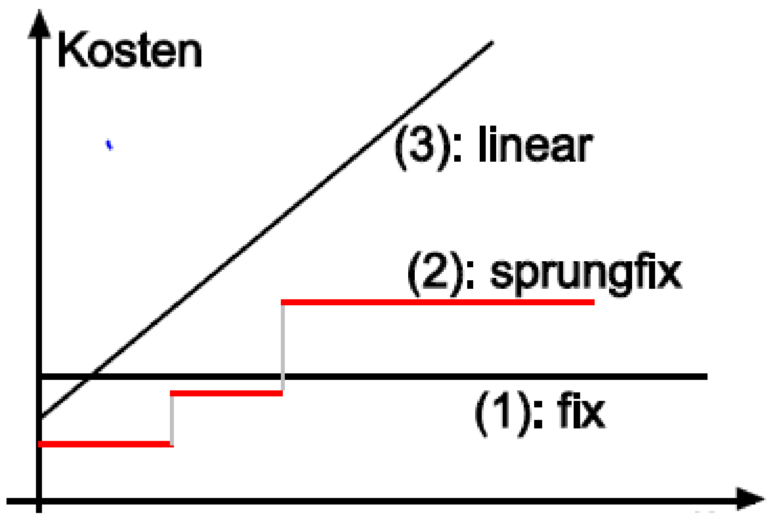
- **Fixkosten**
  die unabhängig von der Produktionsmenge auch anfallen, wenn nichts produziert wird und daher als K(0) bzw. K_f bezeichnet werden.
  z.B: Mieten für Grundgebühren, Personalkosten, Kreditrückzahlungsraten
- **variablen Kosten**
  K_v , die abhängig sind von der Produktionsmenge
  z.B: Materialkosten oder Transportkosten

Typen von Gesamtkostenverläufen

(1) **fix**: Die Kosten hängen nicht von der Menge ab. Der Graph der Kostenfunktion ist eine Horizontale. Die variablen Kosten sind = 0.

(2) **sprungfix**: Die Kosten sind innerhalb bestimmter Intervalle konstant.

(3) **linear**: Kostenverlauf ist durch linearen Ausdruck der Art
$K(x) = k_v x + K_f$ darstellbar.
Die variablen Kosten sind proportional zur Produktionsmenge x; die variablen Stückkosten sind konstant.



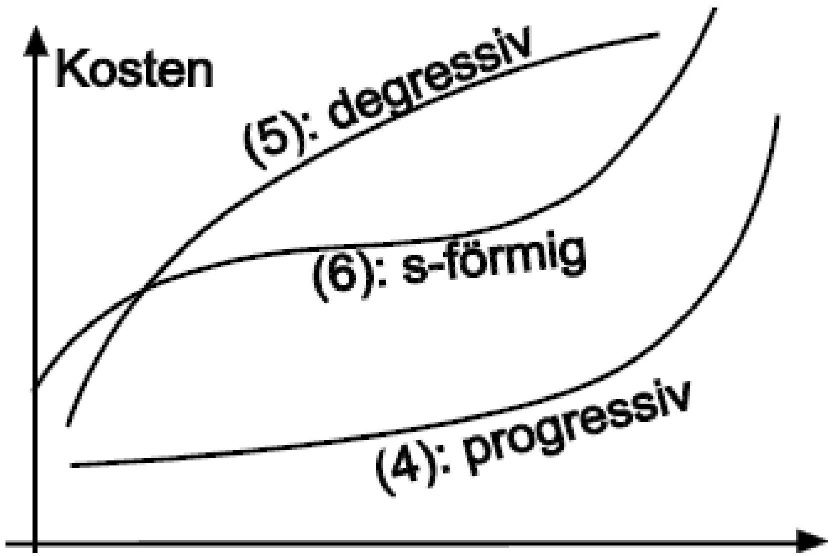
Typen von Gesamtkostenverläufen

(4) **progressiv**: Bei höheren Produktionsmengen wachsen die Kosten verhältnismäßig schneller als die Stückzahl und man spricht von progressiven Kosten.

(5) **degressiv:** Bei geringeren Produktionsmengen wachsen die Kosten verhältnismäßig langsamer als die Stückzahl und man spricht von degressiven Kosten.

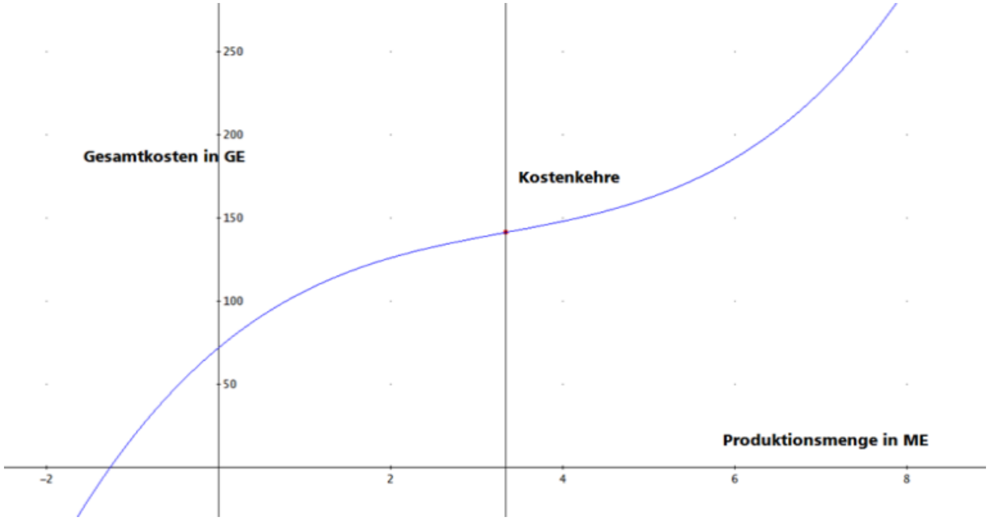
(6) **s-förmig:** Kostenverlauf zunächst degressiv, dann progressiv

ertragsgesetzliche Kostenfunktion



Typen von Gesamtkostenverläufen

- Die zweite Ableitung der Kostenfunktion definiert den Kostenverlauf, der Übergang vom degressiven zum progressiven Kostenverlauf wird als **Kostenkehre** bezeichnet und entspricht dem Wendepunkt der Kostenfunktion.



Stückkostenfunktion und Betriebsoptimum:

$$Stk(x) = \frac{K(x)}{x}$$

durchschnittliche Kosten für ein Produkt

Das Minimum der Stückkostenfunktion x_{opt} wird als **Betriebsoptimum** bezeichnet, die dazugehörigen Stückkosten als **langfristige Preisuntergrenze**.

Die durchschnittlichen Kosten pro ME erreichen dort ihr Minimum, die erste Ableitung $Stk'(x_{opt}) = 0$.

Die **langfristige Preisuntergrenze** legt damit jenen Preis pro ME fest, der mindestens erzielt werden muss, um gerade noch kostendeckend zu produzieren.

variable Stückkostenfunktion und Betriebsminimum:

$$vStk(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{K(x) - K(0)}{x}$$

durchschnittliche variable Kosten für ein Produkt

Das Minimum der variablen Stückkostenfunktion x_{min} wird als **Betriebsminimum** bezeichnet, die dazugehörigen variablen Stückkosten als **kurzfristige Preisuntergrenze**.

Die durchschnittlichen variablen Kosten pro ME erreichen dort ihr Minimum, die erste Ableitung vStk‘(x_{min})=0.

Die **kurzfristige Preisuntergrenze** legt damit jenen Preis pro ME fest, der mindestens erzielt werden muss, um gerade noch die variablen Kosten zu decken.

Preisfunktion der Nachfrage

$p_n(x)$ Preis pro ME in Abhängigkeit der nachgefragten Menge x

- bei **vollständiger Konkurrenz** ist der Verkaufspreis für den einzelnen Anbieter eine **feste Größe p**
- handelt es sich jedoch um einen **Monopolbetrieb**, so wird der Preis für die Ware vom Hersteller allein bestimmt. Da im Normalfall eine Preiserhöhung eine sinkende Nachfrage mit sich zieht, ist der charakteristische Verlauf von Preisfunktionen meist **streng monoton fallend**.
- Jener Preis, bei dem die nachgefragte Menge 0 beträgt, heißt **Höchstpreis** ($p_n(0)$), die Menge, die bei einem Preis von 0 GE nachgefragt wird, heißt **Sättigungsmenge** ($p_n(x)=0$).

BHAK BHAS HORN

Preisfunktion des Angebots

$p_a(x)$ Preis pro ME in Abhängigkeit der angebotenen Menge x

- Die Gesamtmenge, die zu einem bestimmten Preis angeboten wird, kann durch die **Angebotsfunktion** beschrieben werden. Die daraus resultierende **Preisfunktion des Angebots** p_a ist üblicherweise streng monoton steigend.
- Jener Preis, ab welcher der Anbieter bereit ist, das Produkt auf den Markt zu bringen, nennt man **Mindestpreis** ($p_a(0)$).
- Jene Produktionsmenge, bei welcher angebotene und nachgefragte Menge den gleichen Preis ergeben, nennt man **Marktgleichgewicht**, den dazugehörigen Preis **Gleichgewichts- bzw. Marktpreis**.

Die Erlösfunktion E(x)

- Die Erlösfunktion beschreibt den Erlös, der beim Verkauf von *x* produzierten ME erzielt wird.
- vollständige Konkurrenz $\mathbf{E(x) = p \cdot x}$
- monopolistischer Anbieter $\mathbf{E(x) = p_n(x) \cdot x}$

Die Gewinnfunktion G(x)

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

- Jene Produktionsmenge, bei der der Erlös gerade die Gesamtkosten deckt, wird als **Gewinnschwelle** („**Break-Even-Point**") bezeichnet.
- Da abhängig von dem Kostenverlauf bei größeren Produktionsmengen die gestiegenen Kosten die Erlöse wieder übertreffen können, spricht man als obere Grenze des Gewinnbereichs von der **Gewinngrenze**.
- Gewinnschwelle und Gewinngrenze sind die **Nullstellen** der Gewinnfunktion.
- Jene Produktionsmenge x_{max}, bei welcher **maximaler Gewinn** erzielt wird, entspricht dem Hochpunkt der Gewinnfunktion.

COURNOT´scher Punkt

Ein in der Kosten- und Preistheorie charakteristischer Punkt der Preisfunktion p_n wurde nach dem Wirtschaftsmathematiker Antoine August COURNOT (1801 –1877) als **COURNOT´scher Punkt** bezeichnet .

$$\mathbf{C\ (x_{max}/p_n(x_{max}))}$$

Produktionsmenge bei max. Gewinn / Preis bei gewinnmaximaler Produktionsmenge

Elastizität

1. Die erste Ableitung der Kostenfunktion entspricht der momentanen Änderungsrate der Gesamtkosten bei einer Produktionssteigerung von einer Mengeneinheit und wird als **Grenzkostenfunktion** bezeichnet.

2. Die sogenannte **Elastizität** beschreibt das Änderungsverhalten ökonomischer Größen, die durch einen funktionalen Zusammenhang miteinander verbunden sind.

Elastizität einer Funktion

$$\varepsilon(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} x_0$$

relative Änderung der x Werte
im Vergleich zur relativen Änderung von f(x)

In der Literatur wird wahlweise ε oder η als Bezeichnung für die Elastizität gewählt..

Elastizität der Nachfrage

Der Grad der Elastizität wird hier am Beispiel einer Nachfragefunktion folgendermaßen ausgedrückt:

- $|\varepsilon| > 1$ **Elastische Nachfrage**: auf Preisänderungen wird eine starke Reaktion der Nachfrager hervorgerufen
- $|\varepsilon| < 1$ **Unelastische Nachfrage:** auf Preisänderungen wird eine schwache Reaktion der Nachfrager hervorgerufen
- $|\varepsilon| = 1$ **proportional elastische Nachfrage:** eine 1%-ige Preisänderung hat eine 1%-ige Änderung der Nachfrage zur Folge
- $|\varepsilon| = \infty$ **vollkommen elastische Nachfrage**: kleine Preisänderungen ziehen sehr große Veränderungen in der Nachfrage nach sich
- $|\varepsilon| = 0$ **vollkommen unelastische Nachfrage:** Preisänderungen bewirken keine Reaktion der Nachfrager

Typische Aufgabenstellung

Von einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion kennt man die Fixkosten von 250 GE sowie für bestimmte Mengen die entsprechenden Kosten:

Menge x	10	20	25
Kosten K(x)	302	336	350

- Erstelle die Gleichung dieser Kostenfunktion!
- Angenommen, der Stückpreis wäre nicht fix, sondern durch die Nachfragefunktion $p(x) = -0{,}3x + 33$ gegeben. Wie groß sind die Sättigungsmenge und der Höchstpreis?
- Bestimme die Menge und den Preis, bei denen maximaler Gewinn erzielt wird. (Cournot`scher Punkt)
- Berechne die Elastizität bei gewinnmaximaler Menge!

Lösung

$$\text{FIT}\left(\left[x,\ a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d\right], \begin{bmatrix} 0 & 250 \\ 10 & 302 \\ 20 & 336 \\ 25 & 350 \end{bmatrix}\right)$$

$$0.002\cdot x^3 - 0.15\cdot x^2 + 6.5\cdot x + 250$$

$$K(x) := 0.002\cdot x^3 - 0.15\cdot x^2 + 6.5\cdot x + 250$$

$$p(x) := -\ 0.3\cdot x + 33$$

$$p(0) = 33$$

$$p(x) = 0$$

$$\text{SOLVE}(p(x) = 0,\ x)$$

$$x = 110$$

Höchstpreis: 33 GE
Sättigungsmenge: 110 ME

BHAK BHAS HORN

Lösung

$G(x) := p(x) \cdot x - K(x)$

$G'(x) = 0$

SOLVE(G'(x) = 0, x)

$$x = -\frac{55 \cdot \sqrt{15}}{3} - 25 \vee x = \frac{55 \cdot \sqrt{15}}{3} - 25$$

$$x = -96.00469468 \vee x = 46.00469468$$

$G(46)$

$$456.928$$

$G''(46)$

$$-0.852$$

max. Gewinn bei 46 ME in einer Höhe von 456,93 GE

$p(46)$

$$19.2$$

Cournot'scher Punkt C (46 / 19,2)

Lösung

$$p(x) := -0.3 \cdot x + 33$$

$$\eta(x) := \frac{p'(x)}{p(x)} \cdot x$$

$$\eta(46)$$

Preisreduktion in % bei 1%iger Nachfragesteigerung

$$-0.71875$$

$$n(p) := \frac{10 \cdot (33 - p)}{3}$$

$$\eta(p) := \frac{n'(p)}{n(p)} \cdot p$$

$$\eta(19.2)$$

Nachfragereduktion in % bei 1%iger Preiserhöhung

$$-1.391304347$$

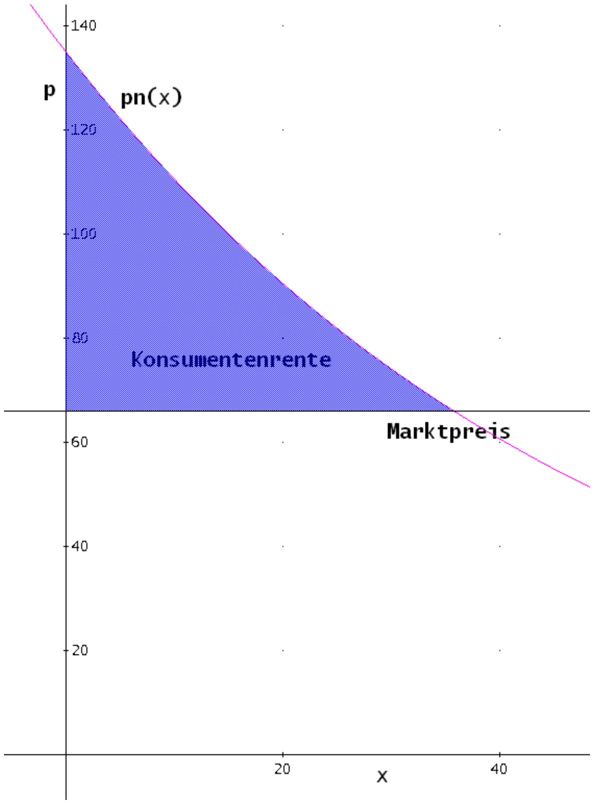
Wirtschaftliche Anwendung der Integralrechnung

- Konsumentenrente
- Produzentenrente
- Wohlfahrt
- Lorenzkurve/Ginikoeffizient

Konsumentenrente

Preis eines Gutes und Wert, den man diesem Gut zuschreibt, meistens nicht identisch:

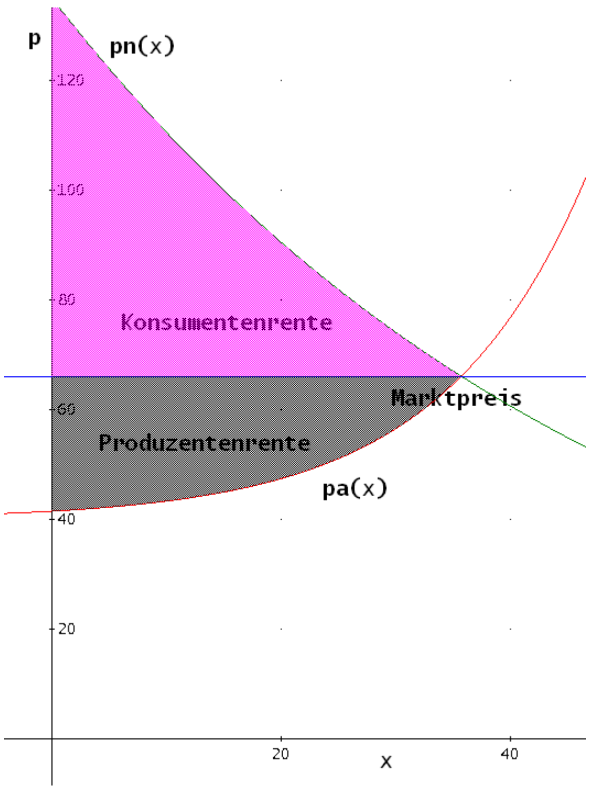
- Viele Nachfrager wären bereit, einen höheren Preis als den Marktpreis zu bezahlen, da für sie das Produkt einen höheren Wert hat. Die Differenz zwischen dieser individuellen Wertschätzung und dem tatsächlich zu bezahlenden Marktpreis nennt man **Konsumentenrente**.
- **Wirtschaftlich** entspricht die Konsumentenrente jenem Betrag, den sich all jene Konsumenten ersparen, die bereit gewesen wären, für das Produkt einen höheren Preis als den Marktpreis zu bezahlen.
- **Graphisch** lässt sich der Wert interpretieren als Fläche zwischen einer durch den Gleichgewichtspreis verlaufenden waagrechten Linie und der Nachfragefunktion.



Produzentenrente

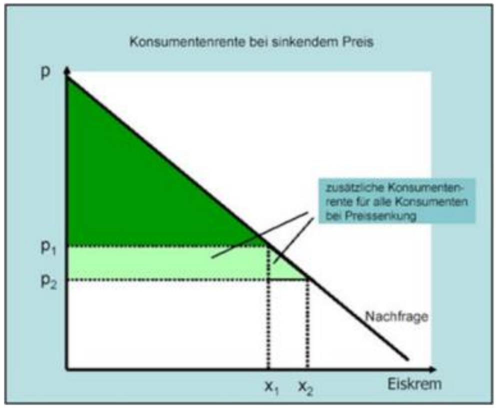
Hier wird die individuelle Wertschätzung durch die Angebotsfunktion dargestellt.

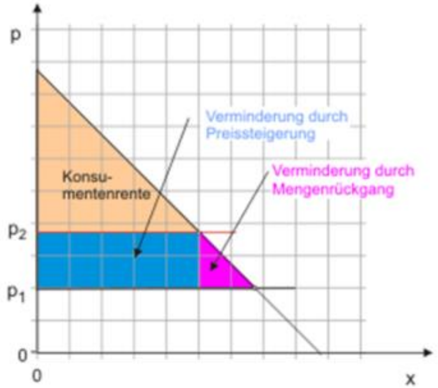
- Die Differenz zwischen dem Gleichgewichtspreis und der unterschiedlichen Wertschätzung des Produktes auf der Angebotseite wird als **Produzentenrente** bezeichnet.
- **Wirtschaftlich** kann man diesen Betrag als den Anbietern zufallende Rente deuten, da viele von ihnen bereit gewesen wären, schon zu einem niedrigeren Preis als den Marktpreis das Produkt anzubieten.
- **Graphisch** wird die Produzentenrente dargestellt als Fläche zwischen der Angebotskurve und einer durch den Gleichgewichtspreis verlaufenden Horizontalen.



Wohlfahrt

- Die Summe der beiden Flächen, also der Konsumenten- und Produzentenrente (d. h., die Fläche links vom Gleichgewichtspunkt zwischen Angebots- und Nachfragekurve) ist die **Gesamtrente oder Wohlfahrt**.
- Da man somit die allgemeine Wohlfahrt als Wert tatsächlich berechnen kann, kann auch der Einfluss dieser Wohlfahrt von Markteingriffen wie staatlich festgesetzten Höchst- oder Mindestpreisen, Steuern oder Zöllen usw. berechnen.



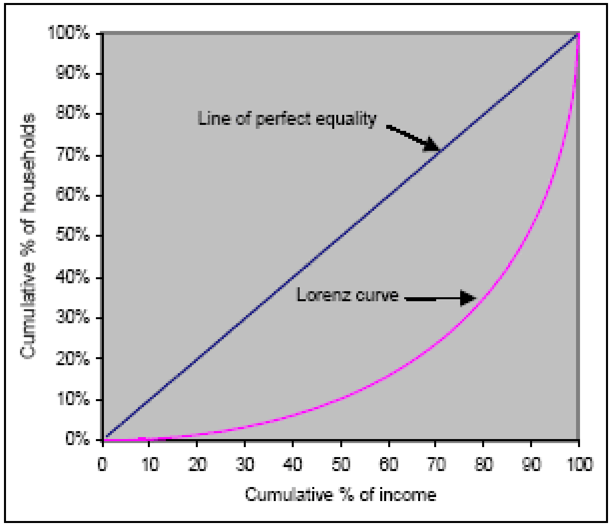


Lorenzkurve

- 1905 vom US-amerikanischen Statistiker und Ökonomen **Max Otto Lorenz** (1876–1959) entwickelt
- veranschaulicht als Ungleichverteilungsmaß das Ausmaß an ***relativer Konzentration*** innerhalb der Verteilung
- Funktion im Einheitsquadrat des **1. Quadranten**
- stellt dar, welche **Anteile der gesamten Merkmalssumme** auf welche **Anteile der Grundmenge mit Merkmalsträgern** entfallen
- **x-Achse:** Anteile an der Gesamtheit der Merkmalsträger (zum Beispiel: Bevölkerung)
- **y-Achse:** Anteile an der gesamten Merkmalssumme (zum Beispiel: Einkommen)
- **Daten aufsteigend sortiert** – beginnend mit dem geringsten Anteil an der Merkmalssumme – und werden **dann kumuliert** („aufsummiert“)

Lorenzkurve

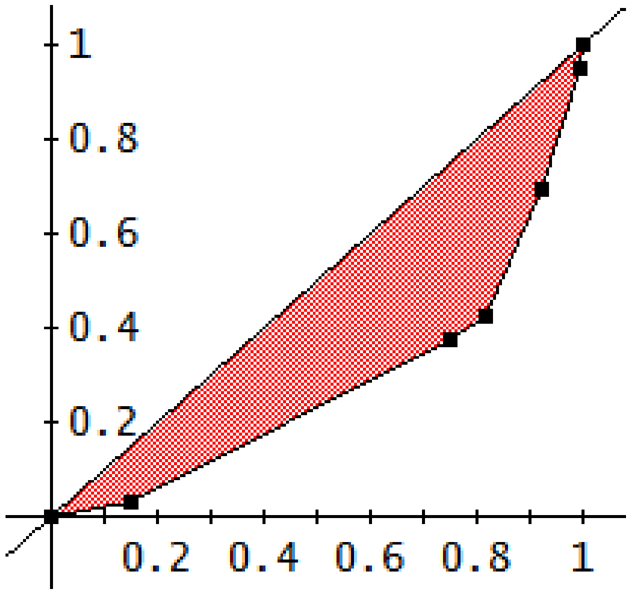
- Der charakteristischer „**Bauch**“ der Lorenz-Kurve unterhalb der Diagonalen spiegelt Ausmaß der Ungleichverteilung wider. Jeder Punkt auf der Lorenz-Kurve steht für eine Aussage wie: „die unteren 20 % aller Haushalte beziehen 10 % des Gesamteinkommens“.
- **perfekte Einkommensgleichverteilung:** die unteren n% der Gesellschaft haben auch n% des Einkommens : y = x
  perfekte Gleichverteilungsgerade
  (line of perfect equality)
- **perfekte Ungleichverteilung:** eine Person verfügt über das gesamte Einkommen und alle anderen Personen beziehen kein Einkommen
  perfekte Ungleichverteilungsgerade
  (line of perfect inequality)



Ginikoeffizient

- vom italienischen Statistiker **Corrado Gini** erfunden

- Der Gini-Koeffizient ist der **Anteil der Fläche** zwischen der perfekten **Gleichverteilungsgerade** und der beobachteten **Lorenz-Kurve** an der Fläche zwischen der ***line of perfect equality*** und der ***line of perfect inequality***



- Der Gini-Koeffizient ist damit eine Zahl **zwischen 0 und 1**, je höher er ist, desto ungleicher ist die Verteilung.

$$G = \frac{Fläche\ zwischen\ Diagonale\ und\ Lorenzkurve}{Fläche\ zwischen\ Diagonale\ und\ x - Achse}$$

Wirtschaftliche Anwendung geometrischer Folgen und Reihen

- Unterjährige Verzinsung: nominelle Zinssätze, Äquivalenzgleichung, effektive Zinssätze

Häufig verwechselte Begriffe

- **antizipativ / dekursiv**

  bezieht sich auf den Zeitpunkt der Verzinsung

  - antizipativ: Verzinsung erfolgt am Beginn der Zinsperiode (kommt praktisch nicht mehr vor)
  - dekursiv: Verzinsung erfolgt am Ende der Zinsperiode

- **vor- / nachschüssig**

  bezieht sich auf den Zeitpunkt der Zahlung (meist bei Rentengeschäften)

  - vorschüssig: Zahlung erfolgt am Beginn der Zinsperiode
  - nachschüssig: Zahlung erfolgt am Ende der Zinsperiode

Rentengeschäfte

- Renten sind regelmäßig wiederkehrende Ein- bzw. Auszahlungen mit i.A. gleich bleibenden Beträgen
- Der Wert solcher Zahlungsströme lässt sich mit Hilfe geometrischer Folgen/Reihen bestimmen
- Ohne Technologieeinsatz sind interessante Fragestellungen nur schwer zu beantworten

Endwertformeln

- Endwert einer nachschüssigen Rente mit Ratenzahlungen der Höhe R, einem Periodenzinssatz i_{Zp} über n Zinsperioden:

$$E_{nachschüssig}(R,q,n) = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{mit } q = 1 + iZp$$

- Endwert einer vorschüssigen Rente:

$$E_{vorschüssig}(R,q,n) = \underbrace{R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}_{E_{nachschüssig}} \cdot q$$

BHAK BHAS HORN

Barwertformeln

- Barwert einer vorschüssigen Rente mit Ratenzahlungen der Höhe R, einem Periodenzinssatz i_{Zp} über n Zinsperioden:

$$B_{vorschüssig}(R,d,n) = R \cdot \frac{d^n - 1}{d - 1} \quad \text{mit } d = \frac{1}{1 + iZp}$$

- Barwert einer nachschüssigen Rente:

$$B_{nachschüssig}(R,d,n) = \underbrace{R \cdot \frac{d^n - 1}{d - 1}}_{B_{vorschüssig}} \cdot \mathrm{d}$$

qcdcq

finanzmath. Zusammenhang

- Herleitung **einer** Formel reicht, der Rest entsteht durch „kurzes Nachdenken"

Kreditgeschäfte

- Der Kreditvertrag
  - Nomineller Zinssatz (Jahresnennzinssatz)
  - Effektiver Zinssatz

- Der „08/15-Kredit“
  - Monatliche Rückzahlungen bei ¼-jahrlicher Verzinsung
    - Die Äquivalenzgleichung
    - Der Fehler
    - Die Restschuld

Der (mathematische) Kredit

- Euro 100 000,00 bei nominell 2,375% p.a. (6-Monats-Euribor + 2%) und monatlich vorschüssiger Tilgung, Laufzeit 20 Jahre, vierteljährliche Verzinsung
  - Rate
  - Restschuld nach 15 Jahren

Effektivverzinsung am Beispiel Bausparvertrag

Bauspar-Rechner

Bausparart wählen: Klassisches Bausparen

Zahlungsart wählen: pro Monat

Betrag wählen:

100 EUR

30 EUR – 100 EUR

Berechnen

Ihre Prognoserechnung:

monatliche Zahlung:	100 EUR
Gewinn gesamt Minimum:	358 EUR
Gewinn gesamt Maximum:	512 EUR
Guthaben vor KESt Minimum:	7.558 EUR
Guthaben vor KESt Maximum:	7.712 EUR

Wirtschaftliche Anwendung der beschreibenden Statistik

- Risikomaße für Aktien
  - (Durchschnittliche) Rendite
  - Volatilität
  - Betafaktor
  - Korrelationskoeffizient, Bestimmtheitsmaß, systemisches/unsystemisches Risiko

Rendite einer Aktie

- Wie hoch ist die durchschnittliche Rendite?

Jahr	Kurs am Jahresbeginn (in Euro)	Aktienindex (Punkte)
2007	62,00	780
2008	66,00	860
2009	74,00	950
2010	78,00	980
2011	70,00	900

Wie „riskant“ ist die Aktie?

- Hohe Schwankungen der Aktienrendite bedingen hohes Risiko (= hohes Potential)
- Unter der Annahme einer Normalverteilung der Einzelrenditen ist die Standardabweichung ein geeignetes Maß zur Risikobewertung
- Die Volatilität misst das Risiko (Potential) einer Aktie

Volatilität im Detail

- Die Berechnung der Volatilität erfolgt meist auf Basis von Tagesrenditen und bezieht sich auf ein Börsenjahr (üblich: 250 Tage)
  - $(Jahres-)Volatilität = \mathrm{StabW}_{\mathrm{Tagesrenditen}} \cdot \sqrt{365 \cdot \frac{250}{365}} \approx$

$$\approx StabW_{Tagesrenditen} \cdot 16$$

Wie beeinflusst der Markt die Aktie?

- Häufig wird verglichen, wie sich Aktien im Bezug auf einen Referenzindex verhalten (zB ATX).
  - Anstieg der Regressionsgeraden (=Beta-Faktor)
  - Liefert Aufschluss darüber, wie die Aktie vom Markt beeinflusst wird
- Welche Qualität hat der Beta-Faktor?
  - Korrelationskoeffizient – Bestimmtheitsmaß
  - Bestimmtheitsmaß gibt an, welcher Anteil der Gesamtstreuung durch das Regressionsmodell erklärt werden kann (systemisches Risiko).