R&E SOURCE
11. Jg. (2024), Nr. 2 – More of Mathematics
Konferenzband zum Tag der Mathematik

Flächeninhalte – (k)ein Problem

Martina Astrid Müller[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2022.i17.a1328

Zusammenfassung

Aufbauend auf dem Vorwissen, das Schüler*innen bereits aus der Primarstufe mitbringen, Flächen durch Auslegen zu ermitteln, wird an einem Praxisbeispiel aus der 5. und 6. Schulstufe gezeigt, wie Lernende in einem forschend-entdeckenden Unterricht Formeln zur Flächeninhaltsberechnung ermitteln. Dem Unterrichtsprinzip des selbstentdeckenden Lernens folgend, sollen die Lernenden durch bereitgestelltes Anschauungsmaterial die Zusammenhänge zwischen einzelnen ebenen Figuren erkennen, diese vergleichen und Zusammenhänge erfassen, um Möglichkeiten für die Bestimmung deren Flächeninhalte zu überlegen. Die Interaktion mit anderen Lernenden und der aktiv handelnde Zugang führen zu hoher Motivation und ermöglichen Verständnis für das Zustandekommen der Berechnungswege zur Ermittlung der Flächeninhalte.

Stichwörter: Mathematikunterricht, Flächeninhalte, Vierecke, selbstentdeckendes Lernen

1 Einleitung

Ein moderner, zeitgemäßer Mathematikunterricht soll mehr als Wissen und Können vermitteln. Neben kritischem und abstraktem Denken sollen auch Problemlösefähigkeiten, Kreativität, Logik und Argumentation geübt werden (von der Bank & Herget, 2023, S. 2). Gerade die Beschäftigung mit geometrischen Formen bietet mehr als reines Rechnen und lässt neben den drei Grunderfahrungen nach Winter (1995) auch die Vermittlung bestimmter Haltungen und Einstellungen wie konzentriertes Arbeiten, Freude und Begeisterung, Neugier und Interesse, Intuition und Kreativität sowie Beharrlichkeit zu (von der Bank & Herget, 2023, S. 4). Aufgaben zu Flächeninhalten ermöglichen Lernenden grundlegende mathematische Konzepte zu verstehen und fördern damit eine erweiterte mathematische Kompetenz. So erfordert die Auseinandersetzung mit Flächeninhalten die Kenntnis geometrischer Figuren und deren Eigenschaften sowie mit grundlegenden Operationen und dem Entwickeln und Anwenden von Formeln umzugehen. Der Themenbereich „Flächen“ bietet eine Möglichkeit, logisches Denken und Problemlösefähigkeiten zu entwickeln – Fähigkeiten, die in vielen Bereichen des täglichen

[1] Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1010 Wien.
E-Mail: martina.mueller@phwien.ac.at

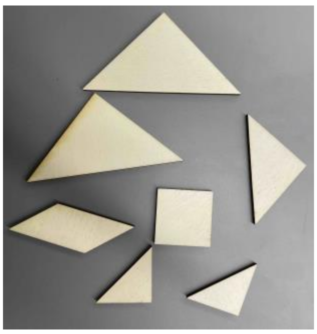
Lebens und in verschiedenen Berufen von Nutzen sind – und praktische Anwendungen nahelegen. Ein Alltagsbezug ist in vielen Bereichen (Verlegen von Fliesen, Teppichen usw.) möglich; visuelle Hilfen erleichtern das Verständnis und Anwenden und die Verknüpfung mit anderen Bereichen (Kunst und Architektur) fördert eine interdisziplinäre Anwendung des Wissens. Kooperatives Arbeiten und eigenständiges Entdecken sind besonders beim Entwickeln von Formeln zu Flächeninhaltsberechnungen möglich.

„Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten“ (Blaise Pascal). Daher werden in den folgenden Kapiteln Praxisbeispiele von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe zur Erarbeitung des Themas von Formeln für Flächeninhalte geboten.

2 Erste Schritte in der Primarstufe

Erste Erfahrungen mit geometrischen Formen werden vom Lehrplan bereits ab der 1. Schulstufe gefordert. Beispielsweise sollen Lernende durch Begreifen, Ausmalen, Nachfahren, Falten, Schneiden, Auslegen, etc. erste Erfahrungen zum Begriff „Fläche“ sammeln (BMBWF, 2024). Dem Spiralprinzip folgend wird das Thema in den folgenden Jahren immer wieder aufgegriffen, erweitert und vertieft, bis in der 4. Schulstufe das Berechnen von Flächeninhalten mit Einheitsmaßen eingeführt wird, wobei ein spielerischer Umgang betont wird.

Durch direktes Vergleichen, ob Figuren durch Übereinanderlegen zur Deckung gebracht werden können, Überprüfen, ob sie „zerlegungsgleich“ sind, d.h. in dieselben Teilfiguren zerlegt werden können oder „auslegungsgleich“ sind, d.h. durch die gleiche Anzahl von Einheitsflächen (z.B. Quadrate, Dreiecke, Sechsecke …) lückenlos ausgefüllt werden können (Franke & Reinhold, 2016, S. 311), lässt sich von Volksschüler*innen der Zugang zur Ermittlung von Flächeninhalten auf anschauliche Weise erarbeiten. Ist dieser Schritt gefestigt, kann man dazu übergehen, Flächenkonstanz erfahrbar zu machen. Lernende erschließen für sich, dass verschiedene Formen denselben Flächeninhalt haben können. Grundidee ist es, erfahrbar zu machen, dass der Flächeninhalt gleich groß ist, wenn ein und dieselbe Figur mit den gleichen Teilflächen ausgelegt werden kann.



Versuche aus den 7 Teilen ein Quadrat zu legen!
Welche dir bekannten Figuren kannst du aus diesen Teilen legen?
Was haben diese Figuren gemeinsam?

Abbildung 1: Tangram und Legemöglichkeiten (Musilek, 2019, S. 9)

Tangrams stellen eine Möglichkeit dar, diese Erfahrungen im Unterricht auf spielerische Weise umzusetzen, eignen sich für kooperatives Arbeiten, fördern Kreativität und konstruktive Kommunikation (Waldner, 2018, S. 3). Durch differenzierte Aufgabenstellungen sind Tangrams auch in heterogenen Lerngruppen gut einzusetzen. Sie können Lernenden direkt zur Verfügung gestellt werden, als Karten zum Nachlegen vorgegeben sein, zum freien Legen zur Herstellung individueller Figuren anregen oder für sprachlich anspruchsvolle Anweisungen zur Herstellung des Tangrams durch „Zerfalten eines Quadrats“ anleiten. Anspruchsvollere Aufgaben stellen auch für ältere Schüler*innen eine Herausforderung dar.

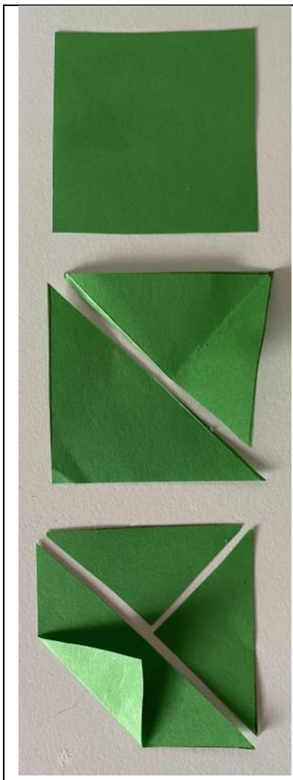
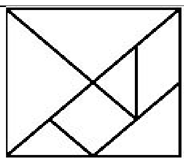
	• Falte eine Diagonale des Quadrats, schneide entlang der Diagonalen durch. Welche Figuren erhältst du? • Falte ein „großes“ Dreieck in die Hälfte, so dass zwei gleiche Figuren entstehen. Schneide entlang der Faltlinie durch. Welche Figuren erhältst du? • Nimm das zweite „große“ Dreieck und bestimme den Mittelpunkt der längsten Seite. • Falte es so, dass die „alte“ Quadratecke auf dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite liegt. Schneide entlang der Faltlinie durch. Welche Figuren erhältst du? • Halbiere das Trapez, indem du die spitzen Ecken aufeinander faltest. Welche Figuren erhältst du? • Falte das spitze Eck des einen Vierecks auf die benachbarte rechte Ecke: Schneide entlang der Faltlinien. Welche Figuren erhältst du? • Falte beim anderen Viereck die stumpfe Ecke auf die gegenüberliebende rechte Ecke: Schneide entlang der Faltlinie durch. Welche Figuren erhältst du?
	Kannst du aus den sieben Teilen wieder ein Quadrat herstellen?

Abbildung 2: Faltanleitung (Musilek, 2019) und Fotos (von der Autorin erstellt)

3 Sekundarstufe 1 – Praxiseinblicke

In der Sekundarstufe wird an das Vorwissen der Lernenden angeknüpft und auf ihnen bereits bekannte Begriffe zurückgegriffen. Das im Lehrplan der 5. Schulstufe geforderte

> Ermitteln von Flächeninhalten von Rechtecken durch Zerlegen in passende Einheitsquadrate, [...] Abschätzen des Flächeninhalts von Figuren durch Auslegen bzw. Überdecken mit Rechtecken (BMBWF, 2024, S. 89)

ist Schüler*innen bereits aus der Primarstufe bekannt. Sie können verschiedene Figuren, deren Eigenschaften und Aussehen unterscheiden. In weiterer Folge kann das im Lehrplan unter „Kompetenzbereich 3: Figuren und Körper“ geforderte „Formeln für den Umfang und den Flächeninhalt von Rechtecken begründen und anwenden“ (BMBWF, 2024, S. 85), erreicht werden.

In der 6. Schulstufe fordert der Lehrplan „mit Dreiecken, besonderen Vierecken und ihren Flächeninhalten arbeiten“ und „Kennen, Anwenden und Begründen von Flächeninhaltsformeln für Dreiecke und besondere Vierecke“ (BMBWF, 2024, S. 92).

3.1 Vom Rechteck zum rechtwinkeligen Dreieck

In einer entsprechend vorbereiteten Lernumgebung können Schüler*innen Rechtecke, für deren Ermittlung des Flächeninhalts die Formel aus der vorangegangenen Schulstufe bekannt ist, eigenständig in rechtwinkelige Dreiecke zerlegen (Abb. 3).

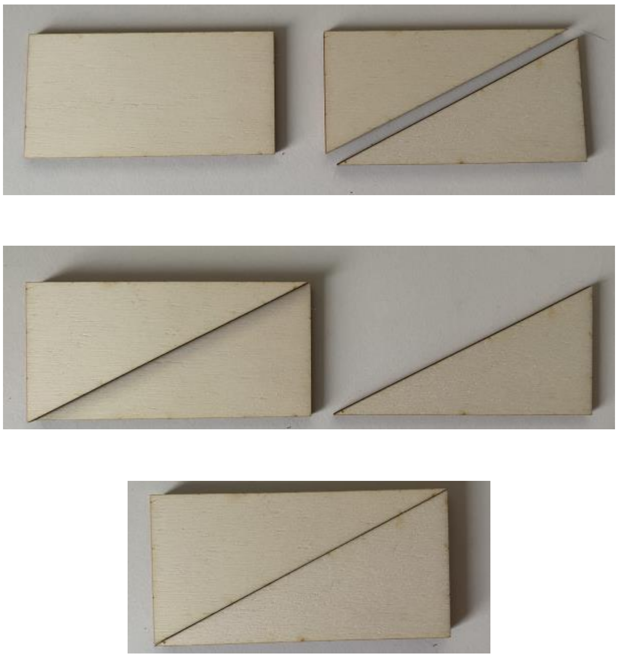


Abbildung 3: Material zum Erforschen des Flächeninhalts eines rechtwinkeligen Dreiecks (Fotos von der Autorin erstellt)

Durch Umlegen und Erkennen der Kongruenz der Dreiecke ergibt sich eine Berechnungsvorschrift für den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks für die Lernenden quasi von selbst. Wichtig im Plenum ist es, die exakte Formulierung mittels Fachsprache unter Verwendung der besonderen Seitenbezeichnungen des rechtwinkeligen Dreiecks vorzunehmen.

Durch das Legen von Figuren, das Aus- oder Nachlegen vorgegebener Formen lassen sich auch die Formeln für besondere Vierecke in ähnlicher Weise erarbeiten, wie in den folgenden Kapiteln noch genauer beschrieben wird. Die Auseinandersetzung mit Flächeninhalten wird auch in den folgenden Schulstufen wiederaufgegriffen und auch in der Sekundarstufe 2 wird dieses Wissen von Lernenden immer wieder eingefordert, beispielsweise bei der Einführung der Flächeninhaltsberechnung mit Hilfe des Integrierens.

3.2 Parallelogramm

In einer vorbereiteten Lernumgebung werden Lernenden verschiedene Figuren wie Rechtecke, allgemeine und rechtwinkelige Dreiecke sowie Trapeze geboten. Diese können sie nach Belieben verwenden, um neue Figuren zu legen. Die Abmessungen aller Figuren sind passend gewählt, damit sich ein An- und Übereinanderlegen automatisch ergibt. Schüler*innen vollziehen beim Arbeiten mit den Holzplättchen die im EIS-Prinzip beschriebenen Wechsel der Darstellungsebenen (Vollrath & Roth, 2012, S. 115).

Abbildung 4. Legematerial für ebene Figuren (Fotos von der Autorin erstellt)

In der enaktiven Phase haben sie die Möglichkeit, aus verschiedenen ebenen Figuren (Abb. 4) ihnen bekannte Vierecke zu legen. Mathematische Handlungserfahrungen, die sich über Prozesse der Verinnerlichung zu Handlungsmustern entwickeln, sind die Basis für die Ausbildung von Grundvorstellungen (vom Hofe & Roth, 2023, S. 2). Je nachdem, welche Teile in welcher Reihenfolge verwendet werden, ergeben sich unterschiedliche Vierecke, für die bereits Formeln zur Berechnung der Flächeninhalte bekannt sind. Mit diesen „Bildern“ (ikonisch) können in einem abschließenden Schritt anhand der gelegten Figuren Längen und Formen verglichen und somit neue Formeln entwickelt und hergeleitet werden. Exemplarisch soll dies für die Erarbeitung der Flächeninhaltsformel des Parallelogramms vorgestellt werden. Die Lernenden erhalten Material, mit dem sie Parallelogramme in rechtwinkelige Dreiecke, Rechtecke oder Trapeze zerlegen können. Zusätzlich zu dem Material bekommen die Lernenden Karten mit Aufträgen und Fragen, wie „Lege die vor dir liegenden Figuren so zusammen, dass ein Rechteck entsteht! Gelingt es dir, durch Umlegen einer Figur aus dem

Parallelogramm ein Rechteck zu legen? Skizziere die zwei Figuren, die du gelegt hast in dein Schulübungsheft und beschrifte die Seiten! Versuche deinem Partner, der nicht gesehen hat, was du gelegt hast, zu beschreiben, was du gemacht hast!“ In einem Schritt lässt sich durch Umlegen des rechtwinkeligen Dreiecks an die gegenüberliegende Seite des Parallelogramms ein Rechteck herstellen. Im vorgestellten Unterrichtsbeispiel stehen den Lernenden Figuren aus Sperrholz zur Verfügung, da diese haptisch zum Legen besser geeignet und widerstandsfähiger sind. Stehen keine vorgefertigten Figuren zur Verfügung, können diese auch einfach aus Papier oder Karton ausgeschnitten werden.

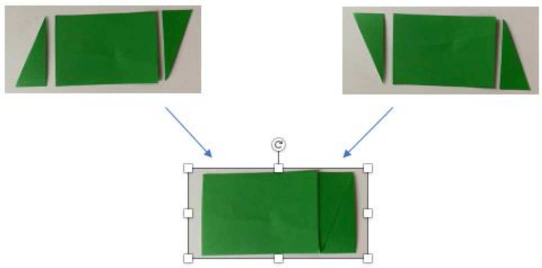


Abbildung 5: Vom Parallelogramm zum Rechteck (Fotos von der Autorin erstellt)

Handelnd haben die Lernenden das Parallelogramm mit den Seitenlängen a, b und der Höhe h_a zu einem Rechteck, dessen Länge a, die jener des ursprünglichen Parallelogramms entspricht und der Breite, die offensichtlich der ursprünglichen Höhe h_a des Parallelogramms entspricht, aufgefunden. Nachdem bekannt ist, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks durch das Produkt der Seitenlängen ermittelbar ist, ist die neue Formel $A = a \cdot h_a$ von Lernenden selbst formulierbar.

Die Durchführung in Klassen hat gezeigt, dass viele Lernende kaum Hilfestellung seitens der Lehrkraft benötigen und in weiten Teilen der Unterrichtssequenz eigenständig arbeiten. Sie übernehmen im selbstregulierten Arbeiten Verantwortung für den eigenen Lernprozess. Deshalb spricht vieles dafür, das kompetenzorientierte Unterrichten handlungsorientiert zu gestalten – so, wie dies seit Jahrzehnten von Didaktiker*innen gefordert wird (Meyer, 2020, S. 168). Für leistungsschwächere Lernende empfehlen sich Tippkarten, die durch Fragen und Hinweise das Handeln anleiten und erleichtern.

Schränkt man Lernende durch Vorgabe ausgewählter Formen nicht ein, sondern stellt ihnen (wie in Abb. 4 gezeigt) verschiedenste Figuren zur Verfügung, können sie ihre individuellen Ideen verwirklichen. Sie können enaktiv, ikonisch oder symbolisch arbeiten oder zwischen den Darstellungsebenen wechseln. Das Übereinanderlegen (Umlegen) von Flächen kann als intuitive Strategie erwartet werden (Boomgaarden et. al, 2023, S. 10). Es kommt zu verschiedenen Lösungen, die oft nicht vorhersehbar sind, sie überraschen manchmal auch Lehrende, stellen aber wertvolle Lernmöglichkeiten für alle dar. Lernende müssen den von ihnen vorgeschlagenen Weg erklären und begründen, sich Fragen und Einwänden ihrer Mitschüler*innen stellen und üben damit die vom Lehrplan geforderten Kompetenzen „H1 Darstellen, Modellbilden“ und „H4 Argumentieren, Begründen“. Die Unsicherheit, die Lehrende aufgrund der offenen Aufgabenstellung bezüglich der Planung ihres Unterrichts eingehen, lohnt sich nach der Erfahrung der Autorin in jedem Fall. So kommt eine Lernendengruppe beispielsweise durch das Ergänzen eines rechtwinkeligen Trapezes durch ein rechtwinkeliges Dreieck auf einem alternativen Weg zur gesuchten Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms (Abb. 6). In diesem Fall wird zunächst das Parallelogramm, das aus einem rechtwinkeligen Trapez und einem rechtwinkeligen Dreieck gelegt wurde, durch Umlegen in ein Rechteck verwandelt. Im Anschluss kann es zusätzlich mit einem seitengleichen Rechteck verglichen werden.

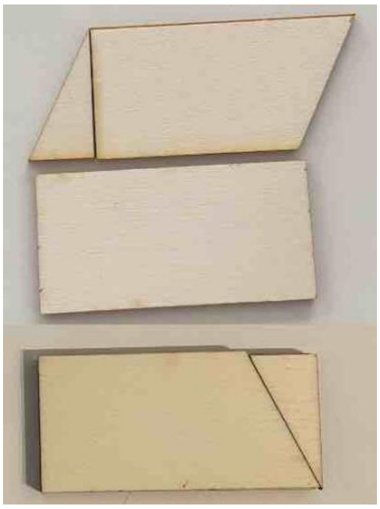


Abbildung 6: Vom rechtwinkeligen Trapez zum Parallelogramm (Fotos von der Autorin erstellt)

3.3 Deltoid

Bei der Zerlegung des Deltoids zur Ermittlung des Flächeninhalts kann ebenso schrittweise vorgegangen werden. Dabei können von den Lernenden zwei Wege (Abb. 7) beschritten werden. Entweder wird das Deltoid durch die Diagonalen in vier rechtwinkelige Dreiecke geteilt, womit sich anschließend durch Drehen der Dreiecke einer Seite und geschicktes Anlegen ein schmales Rechteck, dessen Länge e und Breite $f/2$ ist, ergibt. Oder das Deltoid wird zu einem Rechteck „verdoppelt“, dessen Länge und Breite die Diagonalen e und f sind. Nachdem für die Lernenden (ev. auch durch Übereinanderlegen der kongruenten Figuren) offensichtlich ist, dass der nun vorliegende Flächeninhalt den doppelten Wert des ursprünglichen Deltoids aufweist, ist die Division durch zwei ein logischer letzter Schritt.

Wichtig ist es, alle Varianten zuzulassen und Schüler*innen auch zu Vergleichen der verschiedenen Lösungswege aufzufordern. Das eigene Vorgehen zu beschreiben, ermöglicht wiederum die Kommunikation auf einer Metaebene (George et al., 2016). Weiters werden durch den anregenden und problemorientierten Austausch zwischen Lernenden Fehler und Irrwege zugelassen und Verständnisprobleme wahrgenommen (Abraham & Müller, 2009).

Schrittweises Vorgehen erleichtert auch die Dokumentation und das Aufzeichnen im Heft. Als Nebeneffekt werden auch verschiedene Schreibweisen von Brüchen ($A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = e \cdot \frac{f}{2} = \frac{e \cdot f}{2} = e \cdot f : 2$) wiederholt und aufgefrischt.

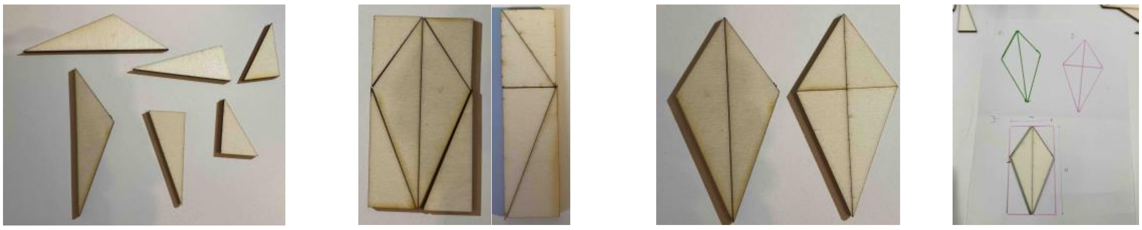


Abbildung 7: Zwei Lege-Varianten, um den Flächeninhalt eines Deltoids zu bestimmen (Fotos von der Autorin erstellt)

Weiters hat es sich als didaktisch geschickt erwiesen, Schüler*innen einen Filmstreifen als Strukturierungshilfe, im Sinne von Scaffolding, für die einzelnen Schritte des Legeprozesses zur Verfügung zu stellen (Abb. 8). Das schrittweise Vorgehen beim Problemlösen ist nicht nur bei der vorliegenden Aufgabe des Auffindens von Flächeninhaltsformeln eine sinnvolle und erfolgreiche Vorgehensweise, sondern lässt sich auch gut auf weitere Anwendungsbereiche übertragen.

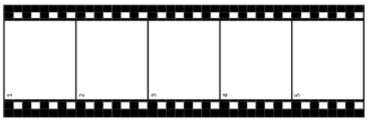


Abbildung 8: Filmstreifen (Leisen, 2013, S. 114)

Möchte die Lehrkraft zusätzlich digitale Medien einsetzen, kann der analoge Filmstreifen durch die Erstellung eines kleinen Stop Motion-Videos[1] ins Digitale übertragen werden. In den Videos zeigen Lernende überraschende Einfälle, Kreativität und versuchen, wenn mehrere Gruppen parallel arbeiten, sich gegenseitig an Originalität zu überbieten. Die Methode bietet auch Differenzierungsmöglichkeiten, da findige Schüler*innen sehr aufwändige Videos gestalten, diese vertonen usw., während andere nur eine reine Übertragung eines analogen Filmstreifens in aneinandergereihte Fotos verwenden.

3.4 Raute

Wie bereits beschrieben, gehen dem Finden neuer Formeln für Flächeninhalte ein Zerlegen von Figuren in Teilfiguren, deren Flächeninhaltsformeln bekannt sind, voraus. Viele Lernende empfinden diese „Stückelung“ als Umweg und mittels Bereitstellen geeigneten Lernmaterials können Zusammenhänge schneller erkannt werden. Sind in einer Klasse Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Parallelogramm und Deltoid bereits erarbeitet worden, lassen sich für die Raute zwei mögliche Varianten für die Flächeninhaltsbestimmung auffinden. Durch die gewählte „Legeart“ und Auswahl der Teilflächen lässt sich einmal größere Nähe bzw. Verwandtheit zum Parallelogramm bzw. im anderen Fall zum Deltoid – im wahrsten Sinne des Wortes – ersehen. Ein weiterer Vorteil dieser Vorgehensweise ist, Lernende das Haus der Vierecke durchwandern zu lassen und dabei zu beobachten, welche Figuren sich durch das Hinzukommen von Eigenschaften aus anderen zu einem „Spezialfall“ entwickeln.

3.5 Trapez

Der Schlüssel zum Flächeninhalt des Trapezes ist das Verständnis des Flächeninhalts des Parallelogramms (Kramer & Kramer, 2019, S. 37). In der Praxis ließ sich feststellen, dass bei der Erarbeitung der Flächeninhaltsformel für das Trapez die Hauptschwierigkeit im Erkennen, dass ein Parallelogramm nur durch Spiegelung und Drehung des zweiten Trapezes erreicht wird, besteht. Dann gilt es, die Länge des Parallelogramms als Summe von $a + c$ zu entlarven. An diesem Punkt versuchen manche Lernende eine neue Seitenbezeichnung einzuführen, was nicht zielführend ist. Angeregt wird hier zusätzlich die Seiten der ursprünglichen Trapeze zu beschriften. Durch die Möglichkeit, die Trapeze aus Holz vor sich zu haben, gelang dieses Umlegen besser als in Klassen, die nur Skizzen im Heft verwendeten. Den „Trick“ durch zwei zu dividieren, da man ja ursprünglich nur den Inhalt einer Trapezfläche bestimmen wollte, ist den Lernenden durch vorangegangene Erfahrungen bereits bekannt.

Eine weitere Möglichkeit, Lernende zum Vergleich von Flächeninhalten, der Entdeckung von Formeln zu deren Berechnung und den Vorteilen allgemeiner Formeln anzuregen, bietet ein Tafelbild, wie in Abb. 9 vorgeschlagen. Lernende können gefragt werden, welche der drei Figuren den größten Flächeninhalt besitzt bzw. ob das weiße Rechteck und z.B. das blaue Parallelogramm denselben Flächeninhalt aufweisen. Dabei können die Lernenden verschiedene Gruppen bilden oder im Plenum diskutieren. Weitere Möglichkeiten der Umsetzung in Klassen und damit einhergehende didaktische Überlegungen werden von Kramer & Kramer (2019) beschrieben.

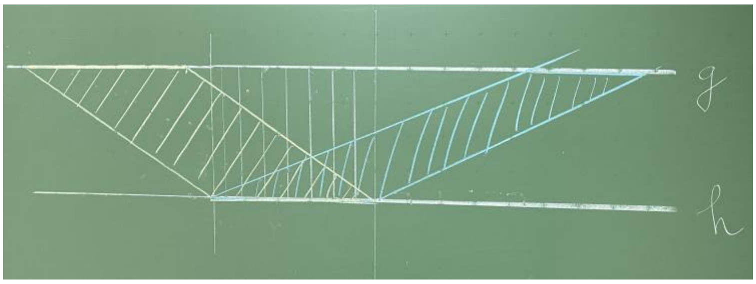


Abbildung 9: Tafelbild der Autorin (nach einer Idee von Kramer & Kramer, 2019)

4 Zusammenschau

Durch das aktive Handeln, das Lernenden die Figuren und mögliche Berechnungswege für deren Flächeninhalte gleichsam vor Augen führt, gelingt das Auffinden der Formeln für fast alle Lernenden mit einem hohen Maß an Eigenständigkeit. Das zur Verfügung gestellte Material ermöglicht individuelle Lernwege und regt Kreativität an (Leuders, 2012). Gegebenenfalls kann die Lehrperson die Auswahl einschränken, Fragen stellen, Tippkarten zur Verfügung stellen o.Ä. Der Vergleich von in manchen Fällen verschiedenen Vorgehensweisen und Lösungsvarianten, die Diskussion mit anderen und der Austausch fördern tiefere Einsicht. Eröffnet man Lernenden solche Zugangsweisen, Georg Credé (2023, S. 11) spricht von kreativen „New-Learning-Räumen“, können sie ihre Freude am Lernen erhalten und gleichzeitig einen guten inneren Kompass und die notwendigen Kompetenzen entwickeln, die sie für spätere Herausforderungen des Lebens selbstständig werden lassen.

Im weiteren Unterricht von Klassen, die in den vorgestellten Settings die Formeln zur Flächeninhaltsberechnung verschiedener Figuren erarbeitet hatten, war bemerkbar, dass auch das Behalten der Formeln nachhaltiger war und diese besser reproduzierbar waren. Hier wären weitere Untersuchungen lohnend, ob sich ähnliche positive Effekte auch in anderen Unterrichtsgruppen, die einen derartigen handelnden Zugang zu den Flächeninhalten durchlaufen, zeigen. Durch den im Artikel geschilderten Zugang ist Flächenberechnung *kein* Problem.

Literatur

Abraham, U. & Müller, A. (2009). Aus Leistungsaufgaben lernen. *Praxis Deutsch*, 214, S. 4–12.

Boomgaarden, A., Leuders, T., Loibl, K. (2023). Problemlösen vor Erklärung - Erst erkunden Lehrende das Problem, danach greift die Lehrkraft auf und erklärt – hier der Flächeninhalt. *Mathematik Lehren*, 238, S. 6–10

BMBWF (2024). Lehrplan der Volksschule. (Zugriff 10.01.2024) https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2023_II_1/Anlagen_0001_CE7F0AA2_A925_4A4D_8C3C_355D12BD22D1.pdfsig

BMBWF (2024). Lehrplan der AHS. (Zugriff 19.03.2024) https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568

Credé, G. (2023). New World braucht New Schools – Zeitgemäßes Lernen aus der Sicht eines Personalentwicklers. *Bildung und Schule digital,* (1)2023, S. 10–12.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (3. Auflage). Springer Spektrum Berlin Heidelberg.

George, A.C., Süss-Stepancik, E., Illetschko, M. & Wiesner, C. (2016). Entwicklung wirkungsvoller Lernaufgaben für den Unterricht aus Testitems der Bildungsstandardüberprüfung. *transfer Forschung <> Schule*, 2, S. 67–87.

Kramer, M., & Kramer, M. (2019). *Mathematik als Abenteuer. Band I: Geometrie und Rechnen mit Größen* (5. Auflage). Klett/Kallmeyer Seelze.

Leisen, J. (2013). *Handbuch Sprachförderung im Fach – Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis –*

Praxismaterialien. Klett Stuttgart.

Leuders, T. (2012). Kompetenzorientierte Aufgaben im Unterricht. In: W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik konkret* (S. 81–95). Cornelsen Berlin.

Meyer, H. (2020). *Leitfaden Unterrichtsvorbereitung* (10. Auflage). Cornelsen Berlin.

Musilek, M. (2019). *Modul 2: Ebene Figuren. Skriptum zur Lehrveranstaltung UE Mathematik: Geometrie* an der Pädagogischen Hochschule Wien. Wien.

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* 2. Auflage. Spektrum Heidelberg.

von der Bank, M.-C. & Herget, W. (2023). Emotionen – ja, in Mathe. Nichtkognitive Aspekte beim Lehren und Lernen. *Mathematik Lehren*, 240, S. 2–7.

vom Hofe, R. & Roth, J. (2023). Grundvorstellungen aufbauen. *Mathematik Lehren*, 236, S. 2–7.

Waldner, S. (2018). Miteinander individuell lernen – ist das überhaupt möglich? Kooperatives Lernen in einem personalisierten Unterricht der Grundschule. *R&E-Source* (9) 2018.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, S. 37–46.

[1] gratis Download der App https://play.google.com/store/apps/details?hl=de&id=com.cateater.stopmotionstudio&pli=1