Ampliación de Cálculo

Escuela Politécnica Superior

I. Eléctrica, I. Electrónica Industrial, I. Mecánica e I. Diseño Industrial y Desarrollo del Producto

Curso 2013–2014

Práctica 10. Ecuaciones en derivadas parciales de primer y segundo orden

Ecuaciones de Pfaff, ecuaciones cuasilineales, método de Lagrange–Charpit para EDP de primer orden, ecuación del calor, ecuación de onda

El objetivo principal de este material es servir de guía para la décima práctica. Se estructura en cuatro bloques:

1. En el primer bloque se describen los aspectos teóricos de Ecuaciones en Derivadas Parciales necesarios para abordar la práctica.
2. En el segundo bloque se detallan algunos elementos de DERIVE que se utilizarán a lo largo de la práctica así como un listado de los programas elaborados para resolver los distintos ejercicios. Para cada uno de estos programas se describen tanto su sintaxis como un ejemplo de utilización.
3. En el tercer bloque se presentan los ejercicios básicos que deben ser utilizados para la comprensión de la materia a desarrollar en esta práctica (resueltos en los ficheros **practica10.dfw** y **practica10.pdf**). Estos ejercicios se desarrollan y explican en el vídeo de la Práctica 10.

4. Por último, en el cuarto bloque se presenta el listado de ejercicios propuestos para que cada grupo los resuelva de forma autónoma. A la semana siguiente a la propuesta para que cada grupo trabaje con esta práctica, se subirá un fichero con la solución de estos ejercicios en la web de la asignatura, con el fin de que cada grupo pueda chequear su trabajo realizado.

Se recuerda que los grupos no tienen que entregar esta práctica. Las prácticas se evaluarán como se indica en el apartado "Prácticas con DERIVE"de la caja 0 de la asignatura.

Para el correcto desarrollo de la práctica es necesario cargar previamente el fichero de utilidades **EDOyEDP.mth** (usar **File - Load - Utility File**). Este fichero contiene la definición de los programas elaborados para la realización de los ejercicios y problemas.

Importante: Tanto la práctica como el fichero de aplicaciones han sido desarrollados para la versión **6.1** de DERIVE. Por lo tanto **SÓLO SE DEBE UTILIZAR LA VERSIÓN 6.1.**

Bloque I: Aspectos Teóricos

Para un estudio teórico detallado se remite al lector a los apuntes de clase de los temas 4 y 5.

Bloque II: Elementos de Derive y programas elaborados

Funciones de Derive que se utilizarán

Definición de funciones a ramas (`CHI`)

- Función indicadora (`CHI`)

  `CHI(a, x, b)` define la función indicadora $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Programas elaborados

Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

- *Cálculo de* $\vec{F} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{F})$

  - Sintaxis: FROTF(p,q,r)
  - Ejemplo: `frotf(x,y,-2z)` para calcular $\vec{F} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F})$ siendo $F = (x, y, -2z)$

- *Ecuación de Pfaff*

  - Sintaxis: PFAFF(p,q,r)
  - Ejemplo: `pfaff(x,y,-2z)` para resolver la ecuación de Pfaff $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y - 2z\,\mathrm{d}z = 0$

- *Ecuación cuasilineal*

  - Sintaxis: CUASILINEAL(p,q,r)
  - Ejemplo: `cuasilineal(x^2,y^2,x^2+y^2)` para resolver la ecuación en derivadas parciales de primer orden cuasilineal $x^2 p + y^2 q = x^2 + y^2$

- *Solución particular de una ecuación cuasilineal*

  - Sintaxis: CUASILINEALPARTICULAR(p,q,r,c1,c2)
  - Ejemplo: `cuasilinealparticular(y,-x,xyz^2,x=y,x=z)` para resolver la ecuación cuasilineal $yp - xq = xyz^2$ que contiene a la curva $x = y = z$

- *Método de Lagrange-Charpit*

  - Sintaxis: LAGRANGECHARPIT(F)
  - Ejemplo: `lagrangecharpit(zp^2+y^2q-y^2p)` para resolver la ecuación en derivadas parciales $zp^2 + y^2q = y^2p$ mediante el método de Lagrange-Charpit.

Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

- *Ecuación del flujo del calor*

  - Sintaxis: ECUACIONDELCALOR(temperatura inicial,longitud,difusividad térmica)
  - Ejemplo: `ecuaciondelcalor(sin(x)+2sin(3x),pi)` para resolver la ecuación del flujo del calor:

$$
\begin{array}{lll}
k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0 & 0 < x < L & t > 0 \\[2ex]
u(0,t) = 0 & u(L,t) = 0 & t > 0 \\[2ex]
u(x,0) = f(x) & 0 < x < L &
\end{array}
$$

  con $L = \pi$ y $f(x) = \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(3x)$

- *Ecuación de onda*

  - Sintaxis: ECUACIONDEONDA(posición inicial,velocidad inicial,longitud,a)
  - Ejemplo: `ecuaciondeonda(2x^2/pi CHI(0,x,pi/2) + (pi-x) CHI(pi/2,x,pi),pix,pi)` para resolver la ecuación de onda:

$$
\begin{array}{lll}
a^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & 0 < x < L & t > 0 \\[2ex]
u(0,t) = 0 & u(L,t) = 0 & t \geq 0 \\[2ex]
u(x,0) = f(x) & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) & 0 < x < L
\end{array}
$$

con $L = \pi$, $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{\pi} & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ $\quad$ y $\quad g(x) = \pi x$

- *Ecuación de Laplace*

  - Sintaxis: ECUACIONDELAPLACE(temperatura inicial en b,a,b)

  - Ejemplo: `ecuaciondelaplace(3,pi,pi)` para resolver la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 < x < a \qquad 0 < y < b$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \qquad 0 < y < b$$

$$u(x,0) = 0 \qquad u(x,b) = f(x) \qquad 0 < x < a$$

con $a = \pi$, $b = \pi$ y $f(x) = 3$

Bloque III: Ejercicios resueltos

1. Verificar si son integrables las siguientes ecuaciones de Pfaff. Resolverlas en caso afirmativo.

   (a) $(2x^3 - z)\,\mathrm{d}x + 2x^2yz\,\mathrm{d}y + x(x+z)\,\mathrm{d}z = 0$

   (b) $(3xz + 2y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z = 0$

   (c) $(x - y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z = 0$

   (d) $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z = 0$

   (e) $xy^2\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x + yx^2\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0$

   (f) $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + xyz\,\mathrm{d}z = 0$

   (g) $2(y + z)\,\mathrm{d}x - (x + z)\,\mathrm{d}y + (2y - x + z)\,\mathrm{d}z = 0$

2. Determinar, según los valores de la constante $\lambda \in \mathbb{R}$, si las siguientes ecuaciones de Pfaff son integrables. Resolverlas en caso afirmativo.

   (a) $\lambda x \, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}y + z \, \mathrm{d}z = 0$

   (b) $(\lambda x + 2y + 2z) \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y - x \, \mathrm{d}z = 0$

   (c) $(x + 2y + 2z) \, \mathrm{d}x + \lambda x \, \mathrm{d}y - x \, \mathrm{d}z = 0$

3. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones cuasilineales:

   (a) $xp + yq = 3z$ (b) $xy(p - q) = (x - y)z$

   (c) $yp - xq = 2xyz$ (d) $(y - x)p + (x + y)q = 0$

   (e) $\dfrac{x}{z} \, p + \dfrac{z}{y} \, q = 0$ (f) $(y + z)p + (x - z)q + x + y = 0$

4. (a) Hallar la solución particular de la ecuación $x^2 p + yq = z$ que contiene a la curva $z = x^2 + y^2 \; ; \; z = 1$.

   (b) Hallar la solución particular de la ecuación $xy(p - q) = (x - y)z$ que contiene a la curva $z = 1 \; ; \; x^2 + y^2 = z^2$.

   (c) Hallar la solución particular de la ecuación $yp - xq = xyz^2$ que contiene a la recta $x = y = z$.

5. Calcular una integral completa de cada una de las siguientes EDP:

   (a) $zp^2 + y^2 q = y^2 p$ (b) $p^2 - q^2 = 1$ (c) $p - x^2 - y^2 = q$

   (d) $px + qy + \dfrac{pq}{4} = z$ (e) $pq = 8xy$ (f) $p^2 - z = -q^2$

   (g) $p^2 + 4px + 4qy = 4z + q^2$ (h) $pxy + 2pq + qy = yz$ (i) $p(p + q) = 1$

6. Resolver la ecuación del flujo del calor:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0 \qquad 0 < x < L \qquad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L$$

   con $L = \pi$ y $f(x) = \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen}(3x)$.

7. Resolver la ecuación de onda:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad 0 < x < L \qquad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \qquad 0 < x < L$$

con $L = \pi$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{\pi} & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ y $g(x) = \pi x$.

8. Resolver la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 < x < a \qquad 0 < y < b$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \qquad 0 < y < b$$

$$u(x,0) = 0 \qquad u(x,b) = f(x) \qquad 0 < x < a$$

con $a = \pi$, $b = \pi$ y $f(x) = 3$.

Bloque IV: Ejercicios propuestos

1. Verificar si son integrables las siguientes ecuaciones de Pfaff. Resolverlas en caso afirmativo.

   (a) $x^2 \, \mathrm{d}x - z^2 \, \mathrm{d}y - xy \, \mathrm{d}z = 0$

   (b) $yz \, \mathrm{d}x - 2xz \, \mathrm{d}y + xy \, \mathrm{d}z = 0$

(c) $y^2\,\mathrm{d}x - z\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z = 0$

(d) $(z - x - 2y)\,\mathrm{d}x + (x + z)\,\mathrm{d}y - 2(x + y)\,\mathrm{d}z = 0$

2. Determinar, según los valores de la constante $\lambda \in \mathbb{R}$, si las siguientes ecuaciones de Pfaff son integrables. Resolverlas en caso afirmativo.

   (a) $(x + y)\,\mathrm{d}x + (x - y)\,\mathrm{d}y + (x + y - \lambda z)\,\mathrm{d}z = 0$

   (b) $(y + \lambda)\,\mathrm{d}x + \dfrac{z}{y + \lambda}\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}z = 0$

   (c) $(x^2 - y^2 + \lambda z)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = 0$

3. Calcular la solución general de las ecuaciones cuasilineales:

   (a) $(y + z)p - (x + z)q = x - y$ (b) $p + 2q = 7$ (c) $p - x^2 = q + y^2$

4. Hallar la solución particular de la ecuación $p = 2xq$ que pasa por la curva dada por $x = 1\,;\; z = y^2$.

5. Calcular una integral completa de cada una de las siguientes EDP:

   (a) $yzp^2 = q$ (b) $p = x^2 + q$ (c) $px + qy - z = \operatorname{sen} p \tan q$

   (d) $\dfrac{p}{x^2} - \dfrac{q^2}{y} = 1$ (e) $p^2 + q^2 = 9$ (f) $py - x^2y = x^2q^2$

6. Resolver la ecuación del flujo del calor:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0 \qquad 0 < x < L \qquad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L$$

siendo $L = \pi$ y $f(x) = 2\operatorname{sen} x - 3\operatorname{sen}(2x) + 5\operatorname{sen}(4x)$.

7. Resolver la ecuación de onda:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad 0<x<L \qquad t>0$$

$$u(0,t)=0 \qquad u(L,t)=0 \qquad t\geq 0$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x) \qquad 0<x<L$$

siendo $L=\pi$, $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$ y $g(x)=0$.

8. Resolver la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad 0<x<a \qquad 0<y<b$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=0 \qquad 0<y<b$$

$$u(x,0)=0 \qquad u(x,b)=f(x) \qquad 0<x<a$$

siendo $a=b=\pi$ y $f(x)=x$.