

# Sprachlos in Mathematik

## *Überfachliche Kompetenzen im Mathematikunterricht fördern*

Monika Musilek<sup>1</sup>

---

DOI: <https://doi.org/10.53349/resource.2024.i2.a1280>

### **Zusammenfassung**

Der Erwerb überfachlicher Kompetenzen ist sowohl Voraussetzung als auch Ziel für langfristig erfolgreiche Bildungsprozesse. Es ist auch eine Aufgabe des Mathematikunterrichts, diese zu fördern. Kooperative Lernsettings bieten Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, sowohl fachliche als auch überfachliche Kompetenzen zu erwerben. In diesem Artikel wird zunächst eine klare Definition des kooperativen Lernens gegeben. Es werden potenzielle Erfolgsfaktoren erläutert und Normen für die Arbeit in Kleingruppen aufgezeigt. Möglichkeiten für die praktische Umsetzung werden beschrieben. Konkrete Beispiele für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 zeigen, wie kooperatives Lernen angewendet werden kann, um den Schüler\*innen eine ganzheitliche Bildung zu ermöglichen.

*Stichwörter:* überfachliche Kompetenzen, kooperatives Lernen, Mathematikunterricht

---

## **1 Einleitung**

Mathematik ist eines der ältesten Schulfächer. Vielleicht muss man gerade deshalb zu Beginn die Frage stellen: Wofür ist Mathematikunterricht da? Barzel et al. (2014, S. 27) formulieren hierzu sehr kompakt: „Mathematikunterricht dient dem Erwerb fachlicher, personaler und sozialer Kompetenzen.“ Im Lehrplan zum Unterrichtsfach Mathematik in der Sekundarstufe 1 sind die zentralen fachlichen Konzepte (Zahlen und Maße, Variablen und Funktionen, Figuren und Körper, Daten und Zufall) und ihre Verknüpfung mit den mathematischen Prozessen (Modellieren und Problemlösen, Operieren, Darstellen und Interpretieren, Vermuten und Begründen) angeführt (vgl. BGBl. II Nr. 1/2023, 2023, S. 55–56). Personale und soziale Kompetenzen sind dem Bereich „überfachliche Kompetenzen“ (ÜFK) zuzuordnen (siehe Abbildung 1). Der Erwerb von überfachlichen Kompetenzen ist sowohl Voraussetzung als auch Ziel langfristig erfolgreicher Bildungsprozesse. Daher gilt es, die Entwicklung dieser bei der Gestaltung von Unterricht zu berücksichtigen und gezielt zu fördern (Heckt et al., 2019, S. 39).

---

<sup>1</sup> Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.

E-Mail: [monika.musilek@phwien.ac.at](mailto:monika.musilek@phwien.ac.at)

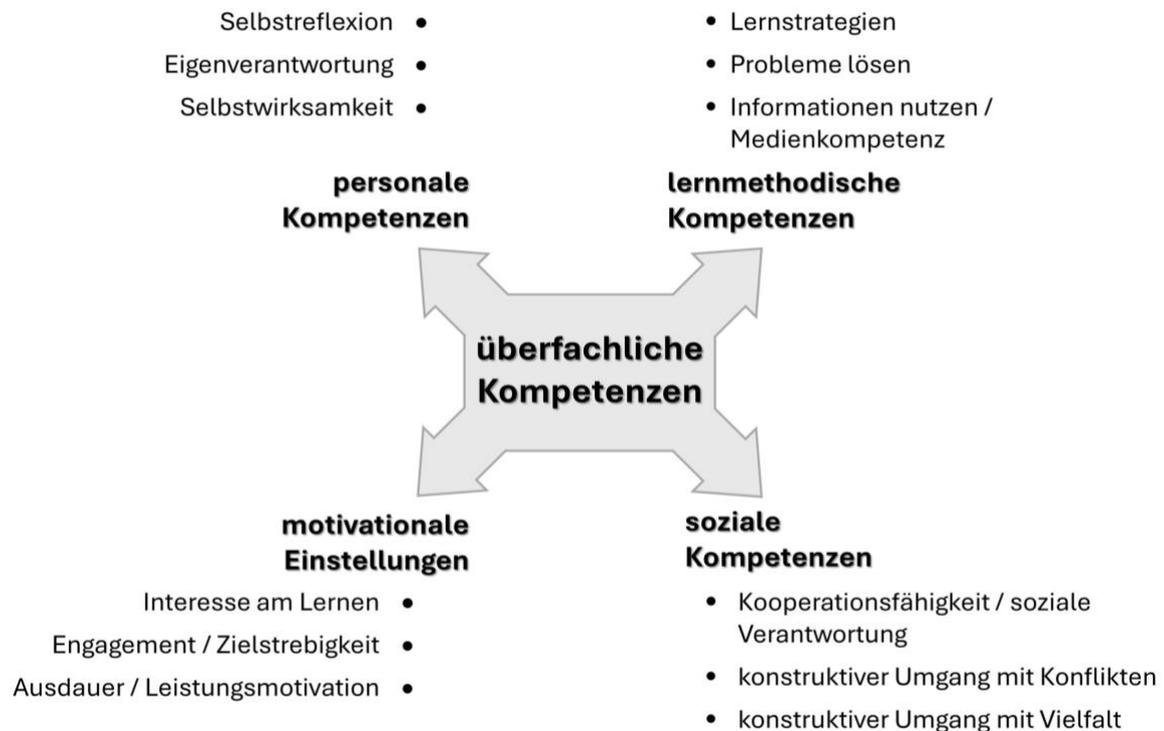


Abbildung 1: Überfachliche Kompetenzen  
(eigene Darstellung in Anlehnung an Heckt et al., 2019, S. 40)

In diesem Beitrag wird zunächst eine begriffliche Klärung zum kooperativen Lernen vorgestellt. Es werden mögliche Gelingensbedingungen erläutert und Normen zum Arbeiten in Kleingruppen aufgezeigt. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit der praktischen Umsetzung, indem konkrete Beispiele für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 beschrieben werden.

## 2 Kooperatives Lernen

Eine Möglichkeit der gezielten Förderung aller Kompetenzen stellt das kooperative Lernen dar. Unter diesem Begriff werden Lernsettings zusammengefasst, welche

„eine synchrone und koordinierte, ko-konstruktive Aktivität der Teilnehmer/innen verlangen, um eine gemeinsame Lösung eines Problems oder ein gemeinsam geteiltes Verständnis einer Situation zu entwickeln.“ (Pauli & Reusser, 2000, S. 421)

Idealerweise verbessern Schülerinnen und Schüler in solchen nicht nur ihre mathematischen Fähigkeiten, sondern können auch ihre sozialen Kompetenzen stärken. Eine Studie von Salvin (2013) kommt zu dem Schluss, dass kooperatives Lernen im Mathematikunterricht besonders effektiv ist, wenn es in kleinen Gruppen durchgeführt wird. Auch in der Metastudie von John

Hattie wird der Arbeit in kleinen Gruppen eine hohe Effektstärke zugeschrieben. Sie liegt mit  $d = 0,46$  im Bereich der erwünschten, erstrebenswerten Effekten (*zone of desired effects*) (Hattie, 2023, S. 191). Hattie weist aber darauf hin, dass vor der Arbeit in Gruppen sichergestellt sein muss, dass alle Schülerinnen und Schüler über ausreichende Kenntnisse, Selbstvertrauen und Motivation verfügen. Daher sollte das notwendige inhaltliche Wissen vor der Gruppenbildung vermittelt werden. Andernfalls könnten viele Schülerinnen und Schüler zurückbleiben, sich nicht geschätzt fühlen und weniger zur Gruppe beitragen (vgl. Hattie, 2023, S. 191). Studien zur Wirksamkeit von Arbeit in Kleingruppen innerhalb einer Schulklasse zeigen übereinstimmend, dass Schülerinnen und Schüler möglicherweise Fähigkeiten zur Arbeit in Gruppen erlernen müssen (Hattie, 2023, S. 191).

In der Literatur werden grundlegende Merkmale für gelingendes kooperatives Lernen genannt (vgl. Bleck & Lipowsky, 2021; Brägger, 2017; Johnson et al., 2006; Jurkowski, 2011):

- positive Abhängigkeit der Gruppenmitglieder  
Die Aufgabe für die Gruppe muss so gestaltet sein, dass Lernende, um eine Lösung zu finden, sich für den eigenen Erfolg wie auch für den Erfolg der anderen einsetzen müssen. Das Ziel kann nur gemeinsam erreicht werden.
- individuelle Verantwortlichkeit des Einzelnen  
Jedes Mitglied einer Gruppe ist dafür verantwortlich, seinen Anteil an der Gruppenleistung zu erbringen. Aufgrund einer durchdachten Aufgabe für die Gruppe, mit klaren Zuweisungen wird „soziales Faulenzen“ erschwert.
- soziale Kompetenzen der Lernenden  
Beim Arbeiten in der Gruppe bedarf es bestimmter „Normen“ und damit verbundener Verhaltensmuster (siehe Abbildung 2).
- face-to-face-Interaktion zwischen den Gruppenmitgliedern  
Kooperatives Lernen lebt von der gegenseitigen Unterstützung und dem wechselseitigen Austausch. Gruppenmitglieder unterstützen sich sowohl sozio-emotional als auch aufgabeninhaltsbezogen, beispielsweise durch den Austausch von aufgabenrelevanten Informationen und Arbeitsmaterialien.
- Reflexion im Anschluss an den Gruppenprozess  
Die Gruppenmitglieder bewerten objektiv die Arbeit der Gruppe sowie ihren individuellen Beitrag zum Erfolg der gemeinsamen Arbeit und tauschen ihre Meinungen darüber aus. Sie diskutieren, wie gut sie ihre Ziele erreicht haben und welche Strategien ihnen beim Lernen geholfen oder dabei gehindert haben. Gleichzeitig identifizieren sie Verhaltensweisen, die sie ändern und verbessern möchten.

Normen	Verhalten
Auf die Bedürfnisse der anderen reagieren	Was braucht wer? Keiner ist fertig, bevor nicht alle fertig sind.
Beim Lernen unterstützen, Fragen stellen und erklären	Diskutieren und entscheiden. Begründen von Vorschlägen. Vorgangsweisen erklären. Jeder hilft mit. Anderen helfen, Dinge selbst zu tun. Herausfinden, was andere denken. Erklären, warum man was tut.
Gemeinsam an der Aufgabenstellung arbeiten	Jeder gibt Informationen. Gemeinsam einen Plan machen. Sich auf Strategien einigen. Eigene Ideen sagen. Zuhören, andere zu Wort kommen lassen. Nach Ideen der anderen fragen. Überlegungen begründen.

Abbildung 2: Normen und Verhalten beim Arbeiten in Gruppen  
(vgl. Cohen & Lotan, Rachel A., 2014, S. 61)

Bei kooperativen Lernprozessen erfolgen der Wissenserwerb und die Problemlösung durch die Interaktion und den gegenseitigen Austausch. Hierbei steht Kommunikation im Zentrum. Diese kann aber nicht nur auf sprachlicher Ebene stattfinden. Man kann auch auf nonverbale, visuelle oder schriftliche Kommunikation setzen. Gerade wenn man überfachliche Kompetenzen fördern will, bietet es sich an, manches Mal auf gesprochene Sprache zu verzichten, also „sprachlos in Mathematik“ zu sein, um andere Kommunikationskanäle bewusst zu nutzen.

Im folgenden Abschnitt werden konkrete Beispiele für kooperative Lernsettings vorgestellt, die zum Ziel haben, die Förderung von mathematischen Inhalten, mathematischen Prozessen und überfachlichen Kompetenzen gleichermaßen anzuregen.

### 3 ÜFK im Mathematikunterricht fördern – Praxisbeispiele

Die kooperativen Lernsettings für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 werden in einer gleichbleibenden Struktur beschrieben. Die *Ziele* geben an, welche (fachlichen und überfachlichen) Kompetenzen durch den Einsatz dieses Lernsettings gefördert werden können. Die Rubrik *Material* gibt Auskunft darüber, welche Materialien verwendet werden dürfen. Die *Gruppengröße* weist drauf hin, aus wie vielen Mitgliedern die (Klein-)Gruppe idealerweise besteht. Die *Anweisung* formuliert den Auftrag für die Schülerinnen und Schüler. Eventuelle *Hinweise zur Unterstützung* der Lernenden werden gegeben und mögliche *Reflexionsfragen* zur Rückschau auf den Prozess der Gruppenarbeit angeführt. Außerdem werden

weitere Einsatzmöglichkeiten des Materials bzw. Variationen der Ausgangsaufgabe im Unterricht vorgestellt. Unter dem Link am Ende dieses Beitrags können alle Lernsettings und zugehörige Materialien heruntergeladen werden.

### 3.1 Jedem sein Rechteck

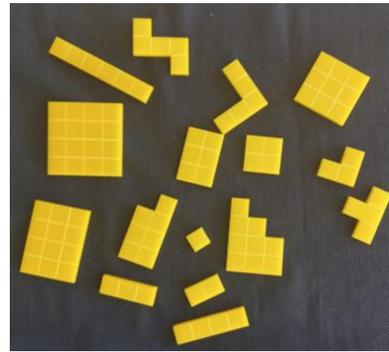
Dieses kooperative Lernsetting wurde nach einer Idee von nrich (2024a) adaptiert und weiterentwickelt.

**Ziele:**

- Wissen um Flächengleichheit bei Rechtecken einsetzen
- Bestimmen möglicher Abmessungen eines Rechtecks bei vorgegebenem Flächeninhalt
- auf die Bedürfnisse der anderen reagieren

**Material:**

16 Spielsteine, gestufte Hinweiskarten



**Gruppengröße:**

4 Personen

**Anweisungen:**

Nimm vier Spielsteine.  
Lege sie offen vor dich hin.  
Tausche mit den Mitspielenden die Spielsteine so, dass am Ende jede Person ein gleich großes Rechteck (aus genau vier Spielsteinen) vor sich liegen hat.

**Weitere Regeln:**

Es darf nicht gesprochen werden!  
Du hast zu jeder Zeit mindestens zwei Spielsteine vor dir liegen.  
Du darfst Spielsteine hergeben, aber nicht nehmen.

**Hinweise zur Unterstützung:**

Die Hinweise können bei Bedarf von der Lehrperson gegeben werden. Da dieses Lernsetting „sprachlos“ stattfindet, bietet es sich an, hier auch die Unterstützung in Stille zu geben, am besten mit gestuften Hinweiskarten, die sich die Lernenden bei Bedarf ansehen können.

1. Wie groß muss der Flächeninhalt für jedes einzelne Rechteck sein?  
Zählt man alle Kästchen auf den Spielsteinen, so sind es 96. Jede Person muss daher am Ende ein Rechteck mit  $96:4 = 24$  Kästchen haben.
2. Welche Abmessungen des Rechtecks können überhaupt vorkommen?  
24 muss in ein Produkt zerlegt werden.  
(möglich sind folgende Zerlegungen:  $2 \cdot 12$ ,  $3 \cdot 8$ ,  $4 \cdot 6$ )

3. Welche dieser Zerlegungen liefert die richtigen Abmessungen für das Rechteck?  
Es muss  $4 \cdot 6$  sein, weil in dieser Zerlegung die einzige Möglichkeit besteht, das  $4 \cdot 4$  – Quadrat unterzubringen.

**Reflexionsfragen:**

- Hat jemand bemerkt, was du brauchst?
- Wie hat er/sie versucht, dir zu helfen?
- Welche Herausforderungen sind aufgetreten, und wie habt ihr sie gemeistert?
- Was könntet ihr beim nächsten Mal verbessern, um effektiver zusammenzuarbeiten?

**Weitere Einsatzmöglichkeiten:**

Anhand der Materialien lassen sich weitere Aufgaben bearbeiten, so z.B.:

- Findet eine Möglichkeit, die Spielsteine zu ordnen. Beschreibt, nach welchem Merkmal ihr geordnet habt. (Quadrate, Rechtecke, Vierecke, Sechsecke, Achtecke)
- Findet eine Begründung, warum ihr mit den Spielsteinen kein Siebeneck legen könnt.
- Findet ihr Möglichkeiten mit Hilfe der Spielsteine einen der anderen Spielsteine auszulegen? Gibt es für dieselbe Figur mehrere Möglichkeiten? Was ist bei den Figuren gleich, was verschieden?
- Legt mit einigen Spielsteinen eine ebene Figur. Findet ihr eine Möglichkeit, diese mit anderen Spielsteinen auszulegen?
- Welche dieser Bauteile haben gleichen Flächeninhalt? Welche haben denselben Umfang? Gibt es Spielsteine, bei denen Flächeninhalt und Umfang übereinstimmen?

## 3.2 Ordnung muss sein

**Ziele:**

- Fachbegriffe zu geometrischen Körpern nutzen
- Eigenschaften von Körpern anwenden
- schriftliche Hinweise für die anderen Spielteilnehmer\*innen vorlesen
- zuhören, wenn andere Lernende ihre Hinweise vorlesen

**Material:**

verschiedene geometrische Körper, Hinweiskarten, Zündhölzer



**Gruppengröße:**

6 Personen

### Anweisungen

Verteilt die Hinweiskarten gerecht. (Jede Person sollte gleich viele Hinweiskarten erhalten.) Du darfst deine Hinweiskarten niemandem zeigen; nur du darfst sie anschauen. Du darfst sie aber vorlesen oder den Spielteilnehmenden sagen, was auf ihr steht. Einige der bereitgestellten Körper müssen in einem Raster angeordnet werden. Findet gemeinsam heraus, welche Körper ihr auswählen müsst und wie sie gestellt werden müssen.

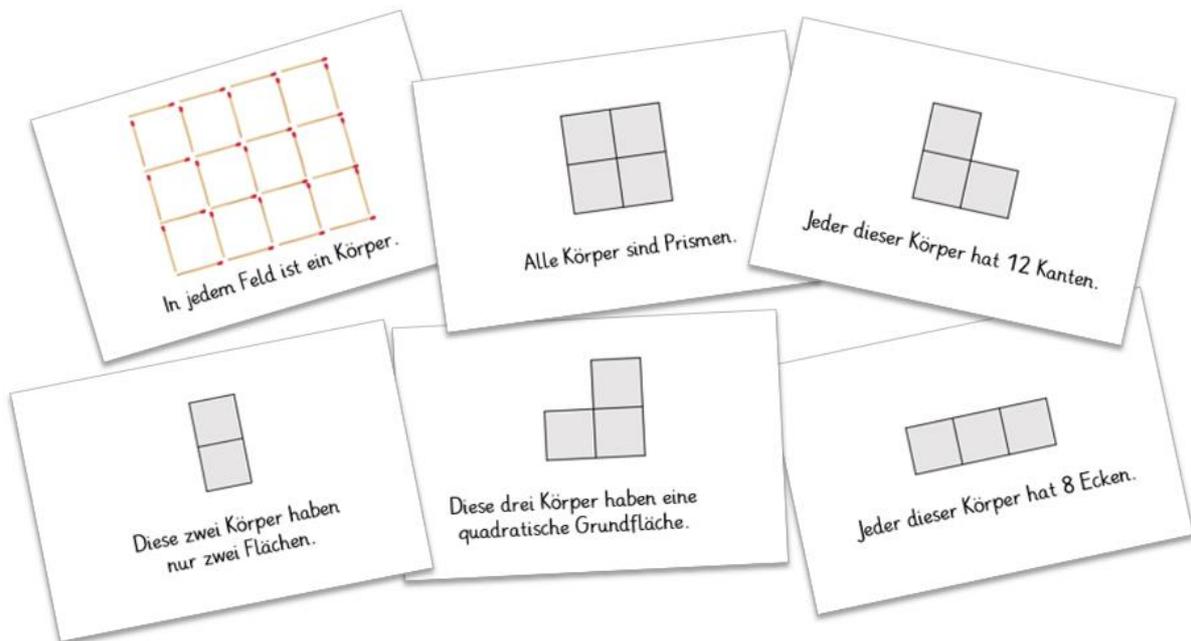


Abbildung 3: Hinweiskarten für „Ordnung muss sein“ (eigene Darstellung)

### Hinweise zur Unterstützung:

Bei diesem kooperativen Lernsetting ist die Idee, nur über das Hören Informationen zu teilen. Die Lernenden lesen sich die Hinweiskarten gegenseitig vor und müssen im Blick haben, dass bei der Anordnung der Körper „ihre“ Karten erfüllt sind. Dabei verwenden sie Fachsprache, so zum Beispiel: Ecken, Kanten, Grundfläche, Prisma, ... (siehe Abbildung 3)

### Reflexionsfragen:

- Welche Dinge habt ihr in eurer Gruppe getan, die euch geholfen haben das Problem erfolgreich zu lösen?
- Welche Dinge habt ihr getan, die es schwieriger gemacht haben?
- Was könnten die Gruppen in Zukunft besser machen?
- Was hast du persönlich schwer gefunden? Was war leicht für dich? Warum?

### Weitere Einsatzmöglichkeiten:

Die Lernenden können eine eigene Anordnung erfinden und ein Set von Hinweiskarten entwickeln. Hierbei geht es dann stark darum, zu begründen, ob diese Anordnung tatsächlich nur zu einer einzigen, eindeutigen Lösung führt.

### 3.3 Algebra Donut

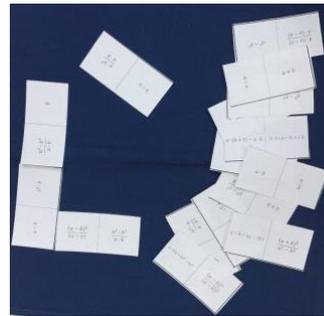
Dieses kooperative Lernsetting wurde nach einer Idee von nrich (2024b) gestaltet und weiterentwickelt.

**Ziele:**

- Terme umformen
- Gleichheit von Termen erkennen
- auf die Bedürfnisse der anderen reagieren

**Material:**

16 Algebra-Dominokarten mit Termen

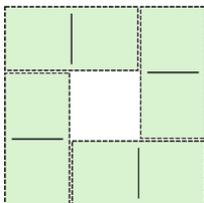


**Gruppengröße:**

4 Personen

**Anweisungen:**

Nimm dir vier Algebra-Dominokarten und lege sie offen vor dich hin. Tausche mit den Mitspielenden die Algebra-Dominokarten so, dass am Ende jede Person einen Algebra-Donut vor sich liegen hat.



Algebra- Donut

**Weitere Regeln:**

Es darf nicht gesprochen werden!  
Du hast zu jeder Zeit mindestens zwei Algebra-Dominokarten vor dir liegen.  
Du darfst Algebra-Dominokarten hergeben, aber nicht nehmen.

**Hinweise zur Unterstützung:**

Manches Mal brauchen die Lernenden den simplen Tipp, dass sie die Terme auf den Feldern der Dominokarten vereinfachen dürfen, um so leichter ihre Gleichheit zu sehen.

Hinweise, die beim Lösungsprozess unterstützen können:

- Wie viele Dominokarten haben ein Feld mit dem Ergebnis  $a^2 + b^2$  ?
- Wie viele Dominokarten haben ein Feld mit dem Ergebnis  $a^2 \cdot b$  ?

**Weitere Einsatzmöglichkeiten:**

Man kann statt vier Algebra-Donuts auch gemeinsam daran arbeiten, eine geschlossene Dominokette zu legen. Lernende können mit einer Vorlage (die im Downloadbereich erhältlich ist) eigenständig eine Algebra-Dominokette erstellen.

Falls zu geringes Wissen oder noch keine Fertigkeiten im Bereich der Termumformungen vorliegen, kann eine ähnliche Übungen mit einem normalen Dominospiel (von 0-0 bis 6-6) gemacht werden.

Legt mit allen 28 Dominosteinen 4 (verschieden große) Quadrate:

Die Summe aller Dominopunkte einer Quadratseite muss für jedes Quadrat 13 sein.  
Die Steine müssen NICHT passend aneinander gelegt werden.

Abbildung 4: Variation zum Algebra-Donut (eigene Darstellung)

## 4 Zusammenschau

Mathematikunterricht dient nicht nur der Vermittlung von mathematischem Fachwissen, sondern trägt auch dazu bei, dass überfachliche Kompetenzen gefördert werden. Als eine methodische Umsetzung für den Unterricht bietet sich das kooperative Lernen an. Die vorgestellten konkreten Beispiele für kooperative Lernsettings haben zum Ziel, die Förderung von mathematischen Inhalten, mathematischen Prozessen und überfachlichen Kompetenzen gleichermaßen anzuregen.

Da die vorgestellten Lernsettings davon ausgehen, dass in Kleingruppen gearbeitet wird, zu denen die Lernenden zufällig zugeteilt werden, wird hier noch ein Kartenset (mit 24 Karten) vorgestellt, mit dem die Gruppenbildung erfolgen kann: Der Aufbau der Karten macht es möglich durch Anweisungen auf vielfältigste Weise Zufallsgruppen in bestimmter Größe zu generieren (siehe Abbildung 5).



Finde alle Personen, die den Farbklecks in der gleichen Farbe wie du auf der Karte haben!

Abbildung 5: Kartenset zur Bildung von Zufallsgruppen (eigene Darstellung)

Alle hier vorgestellten Materialien und weiterführende Überlegungen für den Unterricht können hier (<https://shorturl.at/emFI2>) nachgelesen werden.

## Literatur

- Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2014). *Mathematik-Methodik* (7. Aufl.). Cornelsen. BGBl. II Nr. 1/2023 (2023). <https://www.ris.bka.gv.at/eli/bgbl/II/2023/1>
- Bleck, V., & Lipowsky, F. (2021). Kooperatives Lernen – Theoretische Perspektiven, empirische Befunde und Konsequenzen für die Implementierung. In T. Hascher, T.-S. Idel, & W. Helsper (Hrsg.), *Handbuch Schulforschung* (S. 1–19). Springer Fachmedien Wiesbaden. [https://doi.org/10.1007/978-3-658-24734-8\\_44-1](https://doi.org/10.1007/978-3-658-24734-8_44-1)
- Brägger, G. (2017). *Kartenset Kooperatives Lernen: 7 x 30 Schülerkarten für Feedback, Kommunikation und Kooperatives Lernen: ab Klasse 5*. Beltz.
- Cohen, E. G., & Lotan, Rachel A. (2014). *Designing groupwork: Strategies for the heterogeneous classroom* (3. Aufl.). Teachers College Press.
- Hattie, J. (2023). *Visible Learning: The Sequel: A Synthesis of Over 2,100 Meta-Analyses Relating to Achievement* (1. Aufl.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003380542>
- Heckt, M., Klitsche, S., & Pohlmann, B. (2019). Überfachliche Kompetenzen als Grundlage erfolgreicher Bildungsprozesse. *Hamburg macht Schule: Forschendes Lernen*, 02/2019, S. 39–42.
- Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Smith, K. A. (2006). *Active learning: Cooperation in the college classroom* (3. ed). Interaction Book Co.
- Jurkowski, S. (2011). *Soziale Kompetenzen und Lernerfolg beim kooperativen Lernen*. Kassel Univ. Press.
- nrich. (2024a). *Making Rectangles*. <https://nrich.maths.org/6936>
- nrich. (2024b). *Simplifying Doughnut*. <https://nrich.maths.org/6943>
- Pauli, C., & Reusser, K. (2000). Zur Rolle der Lehrperson beim kooperativen Lernen. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften*, 22, S. 421–442. <https://doi.org/10.25656/01:3747>
- Salvin, R. E. (2013). Cooperative Learning And Achievement: Theory And Research. In I. B. Weiner, W. B. Reynolds, & G. E. Miller (Hrsg.), *Handbook of psychology, Volume 7, Educational Psychology* (2. ed, Bd. 7, S. 179–198). Wiley.