

Zufällig Mathematik

Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik für die Grundschule handlungsorientiert aufbereitet

Sabine Apfler¹, Monika Musilek², Anita Summer³

DOI: <https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1169>

Zusammenfassung

Die Themen Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik werden neu in den Lehrplan der Volksschule aufgenommen. Dies macht es notwendig, dass sich Lehrpersonen damit auseinandersetzen, wie diese Themenbereiche handlungsorientiert im Unterricht bearbeitet werden können. Beim Tag der Mathematik wurden in einem Workshop konkrete Praxisbeispiele zu allen Themenbereichen vorgestellt und der fachdidaktische Hintergrund diskutiert. Exemplarisch wird in diesem Beitrag jeweils ein Beispiel veranschaulicht.

Stochastik, Handlungsorientierung, Praxisbeispiele, Grundschule

1 Ausgangslage

Mit Inkrafttreten des neuen Lehrplans der Volksschule (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung [BMBWF], 2023) ist auch die Vermittlung stochastischer Inhalte vorgesehen. So sollen Schüler*innen ...

Daten aus ihrer unmittelbaren Lebenswelt erheben und mit Strichlisten und Tabellen darstellen; Strichlisten und Tabellen interpretieren (1. Schulstufe), [...] Daten aus ihrer Lebenswelt erheben und mit Säulen- und Balkendiagrammen darstellen; Säulen- und Balkendiagramme sowie Piktogramme interpretieren (2. Schulstufe), [...] einfache kombinatorische Abzählaufgaben darstellen und lösen; die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen ihrer Lebenswelt qualitativ beschreiben und vergleichen (3. Schulstufe), [...] sowie einfache Zufallsexperimen-

¹ Pädagogische Hochschule Niederösterreich, Mühlgasse 67, 2500 Baden.

E-Mail: s.apfler@ph-noe.ac.at

² Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.

E-Mail: monika.musilek@phwien.ac.at

³ Kirchliche Pädagogische Hochschule Wien/Krems, Mayerweckstraße 1, 1210 Wien.

E-Mail: anita.summer@kphvie.ac.at

te durchführen und wiederholen; Ergebnisse und ihre absoluten Häufigkeiten darstellen sowie Wahrscheinlichkeiten qualitativ vergleichen (4. Schulstufe).

Diese Vorgaben stellen neue fachliche Anforderungen an die (angehenden) Lehrpersonen. Die Vorerhebung „DaWaKo“ (Musilek, Apfler & Summer, im Druck) zeigt für die Stichprobe aus den Hochschulen NÖ, Wien und KPH, dass in den Bereichen Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik sowohl in der Einschätzung des eigenen Wissens als auch im Wissen um die unterrichtliche Umsetzung Mängel bei angehenden Grundschullehrpersonen bzw. Lehrpersonen in den ersten Dienstjahren bestehen.

Dies belegen Studien im deutschsprachigen Raum, obwohl diese Bereiche dort schon seit längerem in den Curricula verankert wurden. So bestätigen Sill & Kurtzmann (2019, S. 3 f), dass Lehrende der Primarstufe aufgrund ihrer Ausbildung den fachlichen Anforderungen möglicherweise nicht ausreichend gewachsen wären.

Es besteht daher die dringende Notwendigkeit, die Bereiche der Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik bei Lehrerfortbildungen, Konferenzen und Tagungen nicht nur zu thematisieren, sondern auch konkrete Umsetzungsmöglichkeiten für die Bearbeitung zu präsentieren. Dies hatte der am „Tag der Mathematik 2023“ durchgeführte Workshop zum Ziel: Die Teilnehmer*innen arbeiteten an den drei Themenbereichen und erhielten konkrete Umsetzungsideen für die Schulwirklichkeit. Exemplarisch soll im vorliegenden Artikel jeweils ein Handlungsfeld pro Themenbereich eröffnet werden.

2 Zur Arbeit mit Daten in der Primarstufe

2.1 Theoretischer Hintergrund

Die theoretische Basis für die Entwicklung von Datenkompetenz bei Kindern der Primarstufe stellt der Datenanalyse-Zyklus (PPDAC-Cycle) nach Wild und Pfannkuch (1999) dar. Dieser Zyklus besteht aus den Phasen *Problem* (Entwicklung einer statistischen Fragestellung), *Plan* (Planen der Datenerhebung), *Data* (Datenerhebung auf Basis einer Umfrage, Beobachtung oder eines Experiments), *Analysis* (Darstellung und Analyse der gesammelten Daten) und *Conclusions* (Interpretation der Ergebnisse). Zentrale Unterrichtsziele der Primarstufe sind das Erheben, Strukturieren und Darstellen von Daten (PIKAS, 2020b).

Die Schüler*innen sollen demnach lernen, wie man Daten über Objekte oder Ereignisse erfasst, wie man sie dokumentiert, und dass es erforderlich ist, Kriterien oder Merkmale festzulegen, nach denen die beobachteten Objekte oder Ereignisse unterschieden werden sollen. Weiters sollen die so erfassten Daten sinnvoll dargestellt werden (z.B. in Diagrammen und Tabellen) und es soll erarbeitet werden, wie man aus derartigen Darstellungen Informationen entnimmt und diese benutzt, also beispielsweise vergleicht und interpretiert (Neubert, 2012, S. 37).

Zu Beginn können den Kindern Fragestellungen aus dem schulischen Kontext oder aus Themengebieten wie Haustiere, Hobbies etc. zur Verfügung gestellt werden. Allerdings wirkt sich die Generierung eigener Fragestellungen besonders positiv auf die Motivation der Kinder aus. Dabei müssen die Lernenden allerdings z. B. durch Wortspeicher, die bereits Fragesegmente vorgeben, unterstützt werden (PIKAS, 2020a).

Die gesammelten Daten sollen von den Kindern in geeigneter und übersichtlicher Form festgehalten werden. Strukturierte Strichlisten oder die Übertragung von Säulen aus Bausteinen in ein einfaches Säulendiagramm werden erarbeitet. Die Achsenbeschriftung und das Finden von kurzen und aussagekräftigen Kategorienamen stellen hierbei eine große Herausforderung dar (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 54 f).

Ergebnisse von Datenerhebungen können auch beispielsweise auf einem Plakat präsentiert werden, verschiedene Darstellungsformen (wie z. B. Säulendiagramm, Kreisdiagramm, Strichliste) von Daten sollen miteinander vergleichen und Vor- bzw. Nachteile herausgearbeitet werden (PIKAS, 2020a). Die Interpretation von Daten kann in drei Typen von Fragestellungen unterteilt werden:

1. reading the data („Auslesen“ von Informationen zur Beantwortung expliziter Fragen, für welche die offensichtliche Antwort direkt im Diagramm zu finden ist)
2. reading between the data (Interpolieren und Auffinden von Beziehungen zwischen den dargestellten Daten)
3. reading beyond the data (Extrapolieren, Vorhersagen machen oder von der Darstellung ableiten, um implizite Fragen zu beantworten) (Monteiro & Ainley, 2003, S. 32).

In der Primarstufe wird der Fokus auf die ersten beiden Fragetypen gelegt.

Ruwisch (2020, S. 7) weist darauf hin, dass Kinder am Ende der Volksschulzeit dazu in der Lage sind, „auch anhand gegebener Daten in verschiedenen Repräsentationsformen [zu] argumentieren, ohne diese selbst erhoben haben zu müssen“, wenn statistische Betrachtungen im Laufe der Volksschulzeit immer wieder einbezogen wurden.

2.2 Praktische Umsetzung

Im Rahmen des Workshops „Zufällig Mathematik“ wurden verschiedene praktische Umsetzungsmöglichkeiten zur Einführung der Arbeit mit Daten in der Grundschule vorgestellt. Ein Beispiel zum handlungsorientierten Erheben von Daten, das bereits ab der ersten Klasse Volksschule eingesetzt werden kann, ist die Frage:

„Wie bist du heute zur Schule gekommen?“

In einem ersten Schritt legen die Kinder einen Baustein zu jenem Fahrzeug, mit dem sie in der Früh zur Schule gekommen sind.

In einem nächsten Schritt werden die Bausteine gestapelt und so die erhobenen Daten strukturiert. So können die Kinder nachvollziehen, dass je ein Stein für ein Kind steht. Bei der Übertragung der so entstandenen Säulendiagramme auf kariertes Papier wird für jeden Baustein, also für jedes Kind, ein Kästchen angemalt.



Abbildung 1: Von der Erhebung zum Säulendiagramm.

Durch die handlungsorientierte Erarbeitung mit Materialien gelingt den Kindern der nächste Abstraktionsschritt und sie können die aus den Bausteinen entstandenen Säulendiagramme ins Heft übertragen. Dabei muss auf die korrekte Beschriftung der Achsen Acht gegeben werden.

3 Zur Arbeit mit der Wahrscheinlichkeit in der Primarstufe

3.1 Theoretischer Hintergrund

Wahrscheinlichkeit befasst sich mit dem Zufall. „Aufgabe des Unterrichts ist es [...], die sehr subjektiven und intuitiven kindlichen Vorstellungen über die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen zu mehr objektiven und in einfachen Spielsituationen auch quantitativen Einschätzungen zu führen.“ (Schipper, 2009, S. 284). Gegenstand des Mathematikunterrichts der Primarstufe ist keinesfalls die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Junge Kinder verfügen häufig über eine deterministische Vorstellung von Wahrscheinlichkeit. Das Kind ist beispielsweise überzeugt, dass es schwieriger ist, die Zahl Sechs zu würfeln als eine andere Zahl. Diese Vorstellung soll durch stochastisches Denken abgelöst werden, wobei dem Kind bewusst werden soll, dass es Ereignisse gibt, die nicht mit Sicherheit, sondern nur mit einem gewissen Grad von Wahrscheinlichkeit vorhergesagt werden können. Die Anbahnung des stochastischen Denkens ist ein lang andauernder Prozess und kann nicht innerhalb einer Unterrichtseinheit vollzogen werden. Vielmehr bedarf es aufeinander aufbauender Erfahrungen, die bereits in der Elementar- und Primarstufe beginnen sollen (Schipper, 2009, S. 284 f).

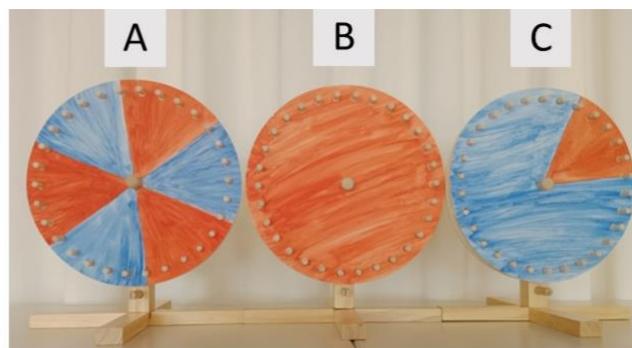
Bei der Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs kann zur Darstellung der qualitativen Schätzung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses eine vertikale Wahrscheinlichkeitsskala

eingesetzt werden. Durch die Kennzeichnung der Schätzung des Kindes auf der Skala wird angegeben, für wie wahrscheinlich das Kind das Eintreten des Ereignisses hält (Sill & Kurtzmann 2019, S. 17).

Ein wesentlicher Schwerpunkt in der Grundschule liegt auf der Begriffsbildung: Begriffe wie *sicher*, *möglich* und *unmöglich* sowie in weiterer Folge auch *wahrscheinlich* und *unwahrscheinlich* sollen erarbeitet werden. Schipper (2009, S. 285) weist auch auf die Bedeutung der Begriffe *wahrscheinlicher als*, *weniger wahrscheinlich als* und *gleich wahrscheinlich* hin. Diese Begriffe sind auch zentrale Inhalte im neuen Lehrplan der Volksschule (BMBWF, 2023).

3.2 Praktische Umsetzung

Glücksräder sind der Lebenswelt der Kinder entnommen und stellen eine gute Möglichkeit dar, Begriffsbildung zum Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten anzubahnen. Schüler*innen beschreiben mögliche Ausgänge beim Drehen des Glücksrads mit den Begriffen „sicher, möglich und unmöglich“ und begründen ihre Entscheidung. Abbildung 2 zeigt eine mögliche Aufgabenstellung. Durch das Drehen der Glücksräder machen die Schüler*innen Handlungserfahrungen, welche zum Beantworten der Fragestellungen hilfreich sind.



	sicher	möglich	unmöglich
Wenn ich das Glücksrad A drehe, zeigt der Zeiger auf rot.			
Wenn ich das Glücksrad B drehe, zeigt der Zeiger auf rot.			
Wenn ich das Glücksrad C drehe, zeigt der Zeiger auf grün.			
Wenn ich das Glücksrad B drehe, zeigt der Zeiger auf blau.			

Abbildung 2: Aufgabenstellung zum Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten.

In Folge können ähnliche Glücksräder entwickelt oder weitere Aussagen formuliert werden. Das Drehen von Glücksrädern kann wieder in Bezug zum Erheben von Daten gesetzt werden: Die Kinder drehen die Glücksräder und sammeln mit einer Strichliste die möglichen Versuchsausgänge.

4 Zur Arbeit mit Kombinatorik in der Primarstufe

4.1 Theoretischer Hintergrund

Die Kombinatorik wird auch als „Kunst des geschickten Abzählens“ (Neubert, 2019, S. 7) bezeichnet. Das Ziel kombinatorischer Aufgabenstellungen ist demnach einerseits die Ermittlung, *welche Kombinationsmöglichkeiten es gibt*, andererseits herauszufinden, *wie viele solcher Kombinationen* möglich sind.

Durch kombinatorische Aufgabenstellungen können systematisches Zählen sowie stochastisches Denken angebahnt werden (Häring, 2017).

Sill und Kurtzmann (2019, S. 170) beschreiben folgende Zielsetzungen kombinatorischer Aufgaben im Unterricht der Primarstufe:

- Entwicklung und Freude am selbstständigen Lösen von Problemen,
- Entwicklung der geistigen Beweglichkeit und Kreativität,
- Förderung der Kommunikations- und Argumentationsfähigkeit,
- Festigung des Rechnens mit natürlichen Zahlen,
- Beitrag zur Umwelterschließung.

Je jünger Kinder sind, umso wichtiger ist es, konkretes Material zur Lösung kombinatorischer Aufgabenstellungen bereit zu stellen, um strukturiertes Herangehen zu ermöglichen (Neubert 2022b, S. 21). Durch die Offenheit der Aufgabenstellungen lassen kombinatorische Aufgaben unterschiedliche Herangehensweisen und Lösungsmöglichkeiten zu und eignen sich dadurch besonders zur Differenzierung (Sill & Kurtzmann 2019, S. 171).

Kombinatorische Aufgaben können auf unterschiedliche Art gelöst werden. Zu Beginn werden die Kinder noch ohne System probieren, um auf eine Lösung zu kommen. Am besten eignen sich dafür konkrete Materialien wie Steckbausteine, Tierfiguren oder reale Objekte. In einem nächsten Schritt werden die Gegenstände durch ikonische Darstellungen ersetzt und erst in einem weiteren Abstraktionsschritt wird auf der symbolischen Ebene gearbeitet.

Durch das unsystematische Probieren können die Schüler*innen erkennen, dass entweder Lösungen doppelt gefunden oder nicht alle Möglichkeiten entdeckt wurden. Dies kann zum Anlass genommen werden, über Möglichkeiten der Systematisierung nachzudenken und Lösungsstrategien, wie Tabellen oder ein Baumdiagramm, zu entwickeln.

Kombinatorische Aufgaben, wie etwa die Suche der Anzahl an Möglichkeiten, ein Menü zusammenzustellen, können mit Hilfe des kartesischen Produkts gelöst werden. Weitere Aufgabenstellungen, die sich dafür eignen, sind etwa die Bildung von Gruppen, das Ermitteln verschiedener Wege zu einem Zielort, der Code eines Zahlenschlosses oder das Bekleiden von Puppen etc.

4.2 Praktische Umsetzung

Ein Beispiel, das sich ohne großen Vorbereitungsaufwand in der Klasse umsetzen lässt, ist die Anordnung von Personen. Bei dieser Aufgabenstellung stehen wieder die grundlegenden Fragen kombinatorischer Aufgabenstellungen im Fokus:

- Welche Kombinationsmöglichkeiten ergeben sich?
- Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten ergeben sich für die Personen, nebeneinander zu stehen?
- Wie können diese Varianten dokumentiert werden?



Abbildung 3: Drei in einer Reihe.

Die Abbildung 3 zeigt eine Möglichkeit, wie die Kinder für das erste Foto angeordnet werden können. Um die Kombinationsmöglichkeiten zu dokumentieren, können Handyfotos gemacht und miteinander verglichen werden. Diese eignen sich auch gut dazu, beim Auflegen der Fotos Strukturen zu erkennen.

5 Fazit

Durch die Implementierung des neuen Lehrplans für die Volksschule (BMBWF, 2023) sind die Lehrpersonen gefordert, sich mit den Themen Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik auseinanderzusetzen. Werden die Forderungen nach Handlungsorientierung und Veranschaulichung in die Überlegungen mit einbezogen, so ist es notwendig, diese Themenbereiche in Fortbildungsveranstaltungen, wie dem „Tag der Mathematik“, aufzugreifen. Die in diesem Beitrag vorgestellten Beispiele zeigen, wie eine *handlungsorientierte Bearbeitung der Themen Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik* gelingen kann.

Literatur

- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) (2. Jänner 2023). *Lehrplan der Volksschule*. BGBl. II Nr. 1/2023, Anlage A zu Artikel 1. Wien.
- Häring, G. (2017). Zählen, ohne zu zählen. *Grundschule Mathematik*, 52, S. 2–5.
- Monteiro, C., Ainley, J. (2003). Interpretation of Graphs: Reading through the Data. In: Williams, J. (Hrsg.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 23(3), pp. 31–36.
- Musilek, M., Apfler, S., Summer, A. (im Druck). DaWaKo in der Primarstufe. Empirische Untersuchung zum fachlichen und methodischen-didaktischen Vorwissen von angehenden Lehrpersonen. *Forschungsperspektiven* 15, LIT Wien.
- Neubert, B. (2012): *Leitidee: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Aufgabenbeispiele für die Grundschule*. Offenburg Mildenerger.
- Neubert, B. (2019): *Kombinatorik. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule*. Offenburg Mildenerger.
- PIKAS (2020a). *Daten und Diagramme*. Verfügbar unter: https://pikas-kompakt.dzlm.de/sites/pikas-kompakt/files/uploads/11-DatenUndHaeufigkeiten/diagramme_daten_sammeln_und_diagramme_darstellen.pdf
- PIKAS (2020b). *Statistische Projekte. Reale und umfangreiche Datensätze mit der Software Tinker-PLots erforschen*. https://pikas-digi.dzlm.de/sites/pikasdg/files/uploads/Unterricht/StatistischeProjekte/um_statistische_projekte_digi_tinkerplots.pdf
- Ruwisch, S. (2020). *Das Diagramm ist viel zu perfekt. Kinder auf dem Weg zur kompetenten Datenanalyse*. *Grundschule Mathematik*, 65, S. 4–7.
- Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schrödel Hannover.
- Sill, H., Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer Spektrum Berlin Heidelberg.
- Wild, C.J., Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67, 3, pp. 223-265.