Natürlich Mathematik

Monika Musilek[1]

DOI: https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1167

Zusammenfassung

Objekte aus der Natur können für Mathematiktreiben herangezogen werden. Vorgestellt wird ein Lernsetting, bei dem ausgehend von kugelförmigen Früchten (Orangen) die Leitidee des Messens handlungsorientiert umgesetzt wird. Mathematische Merkmale wie Volumen, Oberflächeninhalt werden mit Orangen untersucht. Es wird gezeigt, wie sich eine Verkettung von allen zentralen fachlichen Konzepten mit allen mathematischen Prozessen gemäß des Lehrplans 23 für die Sekundarstufe 1 realisieren lässt. Dokumente aus der Erprobung und dem Workshop ergänzen die Beschreibung.

Lernsetting, Handlungsorientierung, Leitidee Messen

1 Einleitung

Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen, soll Lernenden, laut Winter, im Mathematikunterricht ermöglicht werden (Winter, 1996). Daher richten wir den Blick auf die Natur und betrachten sie mit der mathematischen Brille.

Im Workshop „Natürlich Mathematik“ beim Tag der Mathematik 2023 an der PH Niederösterreich wurde ein Lernsetting vorgestellt und bearbeitet, bei dem der mathematische Inhalt „Körper“ mit allen weiteren zentralen fachlichen Konzepten aber auch mit allen mathematischen Prozessen verknüpft wurde (siehe Abbildung 1).

Grundidee dieses Lernsettings ist es, dass durch einen lebensnahen Kontext Schüler*innen zu motivieren, sich mit mathematischen Inhalten aktiv auseinanderzusetzen. Grundvorstellungen zu mathematischen Körpern, insbesondere zu den Eigenschaften Volumen und Oberflächeninhalt von Kugeln sollen aktiviert und in Vernetzung zu anderen Körpern bzw. ebenen geometrischen Figuren ausgebaut werden.

In den Vordergrund dabei rückt das Finden eigener Lösungswege auf selbsterfundene oder von der Lehrperson aufgeworfene Fragen, bei deren Beantwortung es möglich ist, eine starke Handlungsorientierung zu bieten und dadurch das Arbeiten mit Formeln erst an das Ende des Lernprozesses gestellt wird.

[1] Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.
E-Mail: monika.musilek@phwien.ac.at

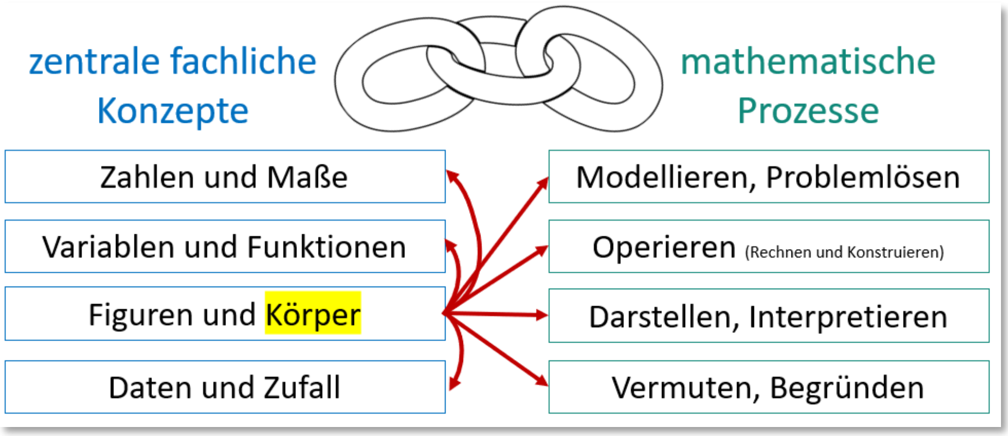


Abbildung 1: zentrale fachliche Konzepte und mathematische Prozesse im Lehrplan der Sekundarstufe 1 (vgl. BGBl. II Nr. 1/2023, 2023).

Eigenschaften von Körpern können durch das Messen zugänglich gemacht werden. Die Grundidee des Messens hat viele Gesichter oder Aspekte. Messen kann bedeuten, dass

- … verglichen wird (Vergleichsaspekt),
- ... mit einer ausgezeichneten Größe ausgelegt wird (Messen-durch-Auslegen-und-Zählen-Aspekt),
- … abgelesen wird (Messgerät-Aspekt),
- … gerechnet wird (Messen-als-Berechnen-Aspekt). (vgl. Weigand et al., 2018, S. 150)

In vielen unterrichtlichen Situationen wird der Idee des Messens zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt, oft wird schnell zu einem Berechnen übergegangen. Doch gerade die Leitidee des Messens bietet die Möglichkeit, verständnisorientiert Eigenschaften einer Kugel zu erarbeiten.
Im hier vorgestellten Lernsetting werden alle Aspekte des Messens berücksichtigt. Als Modell einer Kugel werden kugelförmige Früchte herangezogen, wie etwa Äpfel, Mandarinen, Klementinen oder in unserem Fall der Jahreszeit entsprechend Orangen.

2 Fragen über Fragen

Zu Beginn des Lernsettings wird die mathematische Brille aufgesetzt und mögliche Fragen an die Orange formuliert.
Abbildung 2 zeigt die Zusammenfassung der Erhebung während des Workshops am Tag der Mathematik 2023. Man erkennt, dass Fragen zur (Körper-)Form, zum Volumen und zur Oberfläche mit Abstand am häufigsten genannt werden. Unter der Kategorie „sonstige“ sind alle Fragen zusammengefasst worden, die nur jeweils von einer einzigen Person formuliert wurden. Diese Fragen, die sich natürlich in weiterer Folge noch für Untersuchungen anbieten

würden, beziehen sich beispielsweise auf das Bestimmen des Verhältnisses essbarer/trinkbarer Teile zur Gesamtfrucht. Aber auch kamen Vorschläge, Experimente durchzuführen, so zum Beispiel: Wie weit kann die Orange rollen?

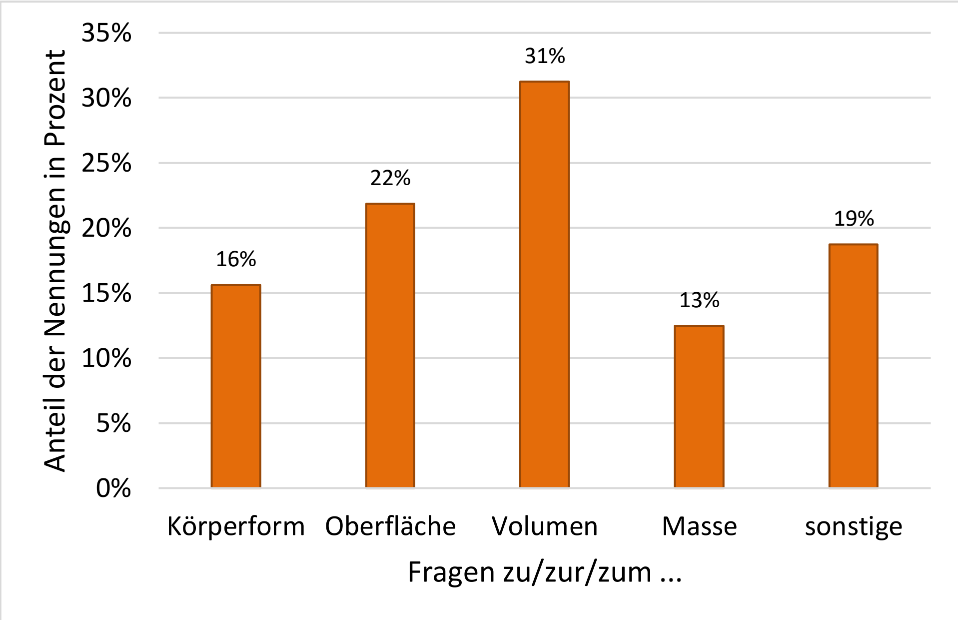


Abbildung 2: Relative Häufigkeit, dass die gestellte Frage einem bestimmten Inhalt zuzuordnen ist.

Es zeigt sich somit, dass in dieser ersten Phase des Lernsettings sehr wohl den Schüler*innen die vermeintliche Freiheit eingeräumt werden kann, ihre brennendste mathematische Frage an die Orange zu formulieren. Als Lehrperson kann man mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, dass Fragen zur Körperform, zum Volumen und zur Oberfläche gestellt werden.

Nachdem die möglichen Fragen formuliert sind, wird im Lernsetting darauf geachtet, dass alle Untersuchungen mit einem Stück Obst pro Lernenden durchgeführt werden kann, d.h. dass zuerst Fragen beantwortet werden, deren Lösungswege ein „Zerstören“ der Frucht vermeiden.

Der Tisch wird im Sinne Maria Montessori als „vorbereitete Umgebung“ eingesetzt. Die vorbereitete Umgebung ist eine, die der Aktivität der Lernenden Rechnung trägt. Sie ist genau und klar durchstrukturiert und hält alle notwendigen Materialien geordnet bereit (vgl. Montessori & Michael, 2021). Es werden den Lernenden im Ablauf des Lernsettings daher immer nur ganz bestimmte Materialien zur Verfügung gestellt, die für die Lösung einer Aufgabenstellung eingesetzt werden dürfen. Und diese Materialien sind zu Beginn der Bearbeitung ordentlich, ohne weitere Materialien, auf dem Tisch platziert. Durch die Vorgabe des Materials kann u.U. auch ein Denken in eine bestimmte Richtung gelenkt werden. Da Schulstunden nur eine beschränkte Zeitdauer aufweisen, ist dies manches Mal eine adäquate

Möglichkeit, Hilfestellung zu geben oder auch den Lernprozess ein Stück weit zu beschleunigen.
Die nachstehenden Fragen sind in einer gleichbleibenden Struktur dargestellt: Die Materialliste gibt Auskunft, welche Materialien (zusätzlich) verwendet werden dürfen. Die Anweisung formuliert den Auftrag für die Schüler*innen. Ein antizipierender Lösungsweg wird vorgestellt. Weitere Lösungswege oder Umsetzungsmöglichkeiten im Unterricht werden aufgezeigt.

2.1 Wie groß ist der Radius?

Materialliste:

1 Orange, 1 Maßband, 1 Smartphone, 1 Stift, 1 Blatt Papier

Anweisung:

Bestimme möglichst genau den Radius der Orange in cm.

Antizipierender Lösungsweg:

1. Umfang entlang des Äquators mit dem Maßband messen (siehe Abbildung 3).
2. Wert mit Stift auf Papier notieren.
3. Recherche nach der Formel für den Umfang eines Kreises mit dem Smartphone.
4. Umformen der Formel zu $r = \frac{u}{2 \cdot \pi}$
5. Einsetzen des gemessenen Wertes.
6. Mehrmalige Wiederholung der Prozedur und bilden des arithmetischen Mittelwerts der Messergebnisse, um den Radius „möglichst genau“ zu bestimmen.

Abbildung 3: Lösungsweg zur Bestimmung des Radius.

Bei der Erprobung des Lernsettings ergab sich eine weitere sehr interessante Methode, die kurz erläutert werden soll: Während eine Person die Taschenlampe des Smartphones verwendete und einen Schatten der Orange auf das Blatt Papier projizierte, der genauso groß wie der Umfang der Orange war, zog eine andere Person den Rand dieses Schattens mit dem Stift nach. Die Orange wurde beiseitegelegt und der Durchmesser konnte bequem gemessen werden. Die Berechnung des Radius erfolgte (im Kopf) durch Halbieren.

ISSN 2313-1640

2.2 Wie groß ist das Volumen?

Um das Volumen eines Körpers zu bestimmen, bieten sich vier verschiedene Zugänge an (vgl. Helmerich & Lengnink, 2016, S. 167). Man kann einerseits den Körper mit Einheitswürfeln ausmessen. Das klappt bei Kugeln nur sehr eingeschränkt. Man kann durch Umschütten den Rauminhalt bestimmen. Das geht aber nur bei Hohlkörpern. Man kann Formeln zur Berechnung verwenden. Das widerspricht der Idee, mit Handlungsorientierung diese Größe zu bestimmen. Also bleibt nur der vierte Zugang, der auf dem Archimedischen Prinzip basiert. Dieser Messvorgang wurde schon vor mehr als 2000 Jahren vom griechischen Gelehrten Archimedes entdeckt. Grundidee ist es, dass das Volumen eines Körpers genau so groß ist wie das Volumen des von ihm verdrängten Wassers.
Dementsprechend wurde der Tisch „vorbereitet“ und zusätzlich Material ausgehändigt:

Materialliste:

1 Messbecher mit Skalierung in ml gefüllt mit Wasser bis zu einer definierten Marke, 1 Zahnstocher

Anweisung:

Bestimme das Volumen der Orange in cm^3.

Antizipierender Lösungsweg:

1. Ablesen des Wasserstandes.
2. Orange in den Messbecher geben und mit dem Zahnstocher unter die Wasseroberfläche drücken.
3. Den neuen Wasserstand ablesen.
4. Das gesuchte Volumen ergibt sich aus der Differenz der beiden abgelesenen Werte.
5. Umwandeln der Einheiten von ml in cm^3.

2.3 Wie groß ist die Oberfläche?

Materialliste:

1 Blatt kariertes Papier, wobei die einzelnen Kästchen genau 1 cm^2 groß sind.

Anweisung:

Bestimmt den Oberflächeninhalt der Orange in cm^2. Dokumentiert euren Lösungsweg mit Fotos. Ladet am Ende eure Fotos hoch und präsentiert euren Lösungsweg.

Antizipierender Lösungsweg:

1. Orange schälen.
2. Die Schalenstücke in möglichst einfacher geometrischer Form (Rechteck oder Quadrat) auf das karierte Papier legen (siehe Abbildung 4).
3. Durch Zählen der Kästchen die Größe der Oberfläche in cm^2 bestimmen.

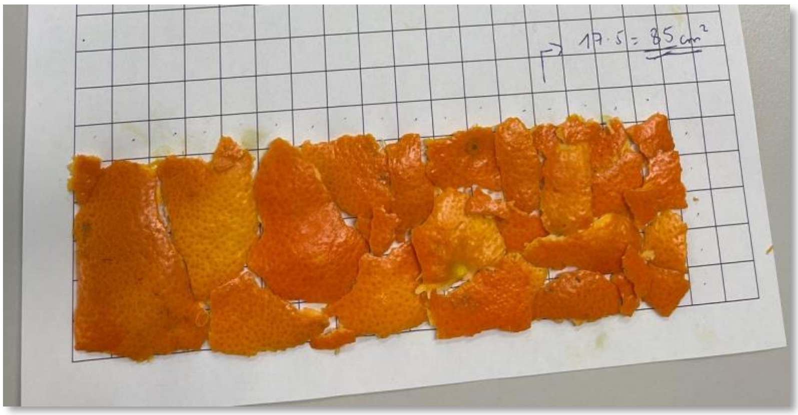
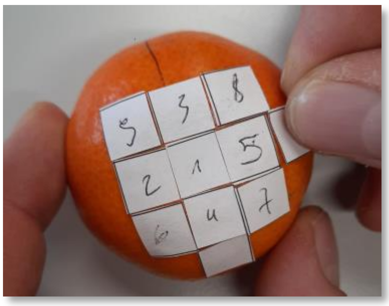


Abbildung 4: Bestimmung der Größe der Oberfläche durch Auflegen der Schale.

Die Bestimmung des Oberflächeninhalts kann auf unterschiedliche Weise passieren, obwohl das Material beschränkt ist. Daher ist es hier besonders reizvoll, eine Unterrichtsphase einzuplanen, in der die verschiedenen Wege vorgestellt und auf ihre Plausibilität hin überprüft werden. Während der Bearbeitung müssen die Lösungsschritte daher mit Fotos dokumentiert werden. Diese werden dann einfach auf ein Flinga Whiteboard [1] geladen. Für die Schüler*innen reicht es aus, den Link (am besten über einen QR-Code) aufzurufen, und die Bilder hochzuladen, es sind keine weiteren Registrierungsschritte notwendig. Wenn alle Gruppen die Größe der Oberfläche bestimmt haben, wird das Whiteboard projiziert und die Schüler*innen haben, durch ihre eigenen Bilder unterstützt, die Möglichkeit, ihren Lösungsweg vorzustellen und für andere nachvollziehbar zu machen. Auf diese Weise werden das Kommunizieren und Argumentieren anhand geometrischer Eigenschaften sehr gefördert.
Bei der Erprobung des Lernsettings ergaben sich, wie in

Abbildung 5 dargestellt, weitere spannende Lösungswege, um die Größe der Oberfläche zu bestimmen:

	Die Orange wird mit Einheitsquadraten ausgelegt.

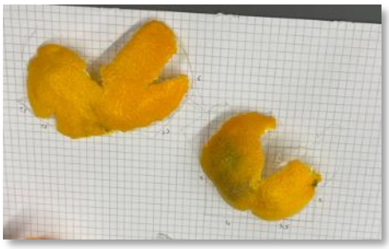
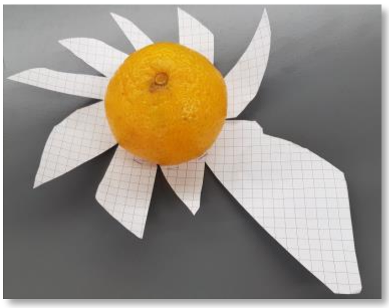
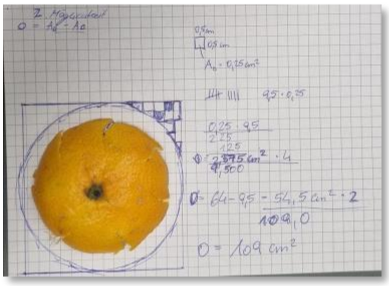
	Schalenteile werden umrandet. Die so gezeichneten ebenen Figuren durch Dreiecke, Rechtecke, … annähern.
	Es wird versucht, ein Netz über die Orange zu legen. Und nach dem Auffalten dessen Größe bestimmt.
	Die Hälfte der Orangenschale wird plattgedrückt. Umfang gezeichnet. Ein Quadrat, das den Kreis umschließt, wird gezeichnet. Und die Kästchen außerhalb des Kreises von der Gesamtanzahl der Kästchen im Quadrat subtrahiert.

Abbildung 5: Verschiedene Lösungswege zur Bestimmung der Größe der Oberfläche.

2.4 Wie viele Kreise (mit dem Radius der Orange) lassen sich mit der Schale füllen?

Materialliste:
    1 Zirkel
Anweisung:
    Schätze zuerst!
    Zeichne dann die geschätzte Anzahl an Kreisen. Fülle sie mit der Schale.
    Was fällt dir auf?
Antizipierender Lösungsweg:

1. Einen Kreis zeichnen. Mit Orangenschalenstücken befüllen.
2. Schätzung durchführen.
3. Weitere Kreise gemäß der Schätzung zeichnen.
4. Die Schalenstücke in die Kreise legen (siehe Abbildung 6).
5. Zusammenhang beschreiben.

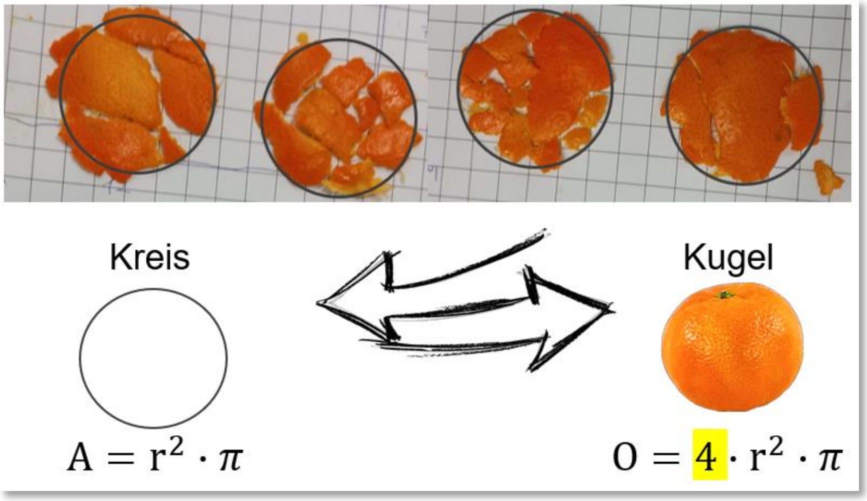


Abbildung 6: Zusammenhang Flächeninhalt Kreis und Oberflächeninhalt Kugel.

3 Weitere Ideen

Es lassen sich noch viele weitere Aufgabenstellungen finden, die eine Vernetzung zu anderen Inhaltsbereichen gewährleisten.
Will man beispielsweise das Thema „funktionale Zusammenhänge“ aufgreifen, so können die bisher ermittelten Werte (Radius, Volumen, Oberfläche) verwendet werden. In einem von allen Lernenden gemeinsam genutzten Tabellenkalkulationsblatt tragen die Schüler*innen ihre ermittelten Werte ein. In der graphischen Darstellung der Punktewolke werden dann zwei Trendlinien ergänzt: einerseits die Größe der Oberfläche in Abhängigkeit vom Radius (O(r)) und andererseits das Volumen in Abhängigkeit vom Radius V(r). Es lässt sich erkennen, dass die Funktion O(r) eine Potenzfunktion vom Grad 2 und die Funktion V(r) eine Potenzfunktion vom Grad 3 ist.
Um Vernetzungen innerhalb der Geometrie aufzugreifen, ist nachstehende Aufgabenstellung denkbar:

Materialliste:
    1 Blatt Papier, Geodreieck
Anweisung:
    Haben eine Kugel und ein Würfel mit gleichem Volumen die gleiche Oberfläche? Zeichne das Netz eines Würfels, der das gleiche Volumen wie die Orange hat. Lege es mit der Orangenschale aus. Was fällt dir auf?

Durch das Auslegen stellt man fest, dass nur rund 5 der 6 Quadrate des Netzes befüllt werden können. Die wichtige Erkenntnis, die daraus anschaulich wird, ist, dass bei Volumen-Gleichheit die Kugel einen kleineren Oberflächeninhalt als der Würfel hat. Der Oberflächeninhalt der

Kugel beträgt nur rund 80% der Würfeloberfläche. Diese Veranschaulichung kann man rechnerisch noch verifizieren (siehe Abbildung 7):

Kugel | Würfel

Radius r

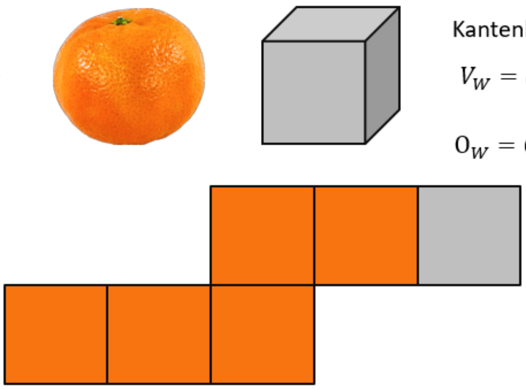
$$V_K = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O_K = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

Kantenlänge a

$$V_W = a^3$$

$$O_W = 6 \cdot a^2$$



$$\mathrm{a} = \sqrt[3]{V_K} = \sqrt[3]{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} = r \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3} \cdot \pi}$$

$$\frac{O_K}{O_W} = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi}{6 \cdot a^2} = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \pi}{3 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi\right)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot \pi}{3 \cdot 2^4}} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0{,}806$$

Abbildung 7: Verhältnis der Größe der Oberflächen bei gleichem Volumen.

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass auf YouTube ein Rap[2] über das Volumen und den Oberflächeninhalt einer Kugel von DorFuchs zu finden ist.

4 Zusammenschau

Die Natur als Ausgangspunkt zu nutzen war das Ansinnen dieses Beitrags. Die Orange als Prototyp für eine Kugel wird im Hinblick auf ihre mathematischen Eigenschaften (Volumen, Oberfläche) handlungsorientiert untersucht. Das Lernsetting ist so konzipiert, dass vielfältige Vernetzungen in Bezug zu zentralen fachlichen Konzepten und mathematischen Prozessen realisiert werden: Bei der Bestimmung des Radius geht es um Problemlösen, aber auch um den Umgang mit Daten. Für das Messen des Volumens sind Interpretieren und Maße zentrale Punkte. Problemlösen, Operieren, Interpretieren kombiniert mit Körpern sind bei der Suche nach dem Zusammenhang von Flächeninhalt des Kreises und Oberflächeninhalt der Kugel gefordert. Operieren, Technologieeinsatz und funktionale Zusammenhänge (insbesondere Potenzfunktionen) werden bei weiteren Ideen gebraucht. Und dass bei gleichem Volumen die Kugel wirklich kleinere Oberfläche als der Würfel hat, kann zentrale fachliche Konzepte aus dem Bereich Variable mit Operieren verknüpfen.

Wenn am Ende des Lernsettings sich der Raum mit dem Duft nach Orangen gefüllt hat, dann weiß man, dass die Natur in den Mathematikunterricht Einzug gehalten hat.

Literatur

BGBl. II Nr. 1/2023, (2023). https://www.ris.bka.gv.at/eli/bgbl/II/2023/1

Helmerich, M. A., & Lengnink, K. (2016). *Einführung Mathematik Primarstufe—Geometrie*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-47206-4

Montessori, M. & Michael, B. (2021). *Grundlagen meiner Pädagogik: Und weitere Aufsätze zur Anthropologie und Didaktik* (13., unveränderte Auflage). Quelle & Meyer Verlag.

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3., erweiterte und überarbeitete Auflage). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *4*(2), S. 35–41. https://doi.org/10.1515/dmvm-1996-0214

[1] www.flinga.fi

[2] https://www.youtube.com/watch?v=jQoHp_P8Y0A