

Von den Grundkompetenzen zum selbstständigen Handeln im Mathematikunterricht

Stefan Götz*

<https://doi.org/10.53349/resource.2022.is23.a1093>

Zusammenfassung

Der traditionelle Mathematikunterricht, welcher sich an Schulbüchern orientiert und dem gültigen Lehrplan folgt, ist im Wesentlichen nach Inhaltsbereichen organisiert. Kompetenzorientierter Mathematikunterricht betont hingegen eher handlungsorientierte Ausrichtungen. Im Workshop soll exemplarisch gezeigt werden, wie und in welchem Maße eine Orientierung an Handlungsbereichen – zum Beispiel das Argumentieren – den Mathematikunterricht verändern und bereichern könnte. Wenn der Kompetenzbegriff (im Mathematikunterricht) ernst genommen wird, so zeigt sich, dass sowohl Grundkompetenzen vermittelt werden müssen, die einerseits längerfristig verfügbar sein sollen und andererseits auch überprüfbar sind, als auch Kompetenzen, die nur in prozessorientierten Lernumgebungen entwickelt werden können (z. B. das Modellieren), und die nicht herkömmlichen Testszenarios unterworfen werden können. Dieses Spektrum an mathematischen Kompetenzen fordert unterschiedliche Indikationen des Technologieeinsatzes ein. In letzter Konsequenz hierzu ist eine Neubewertung gefragt.

Keywords:

Kompetenzorientierter Mathematikunterricht
 Einheitsquadrat
 uvw-Sprache
 Intelligentes Üben
 Füllfunktionen

1 Grundkompetenzen

Das Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung (ssRP) in Mathematik (AHS) (Stand: Februar 2021) beschreibt Grundkompetenzen als Fähigkeiten, die für den Unterrichtsgegenstand grundlegend, längerfristig verfügbar und gesellschaftlich relevant sind bzw. sein sollten. So können allgemeingebildete – also konstruktive, engagierte und reflektierte – Bürger*innen Mathematik als ein sinnvolles und brauchbares Instrument ihrer unmittelbaren Lebenswelt erkennen bzw. einsetzen (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2021, S. 2). Dazu werden Typ-1-Aufgaben für die Reifeprüfung konzipiert, die auf genau eine Grundkompetenz (ebd., S. 4) aus einem vorgegebenen Katalog (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2021) fokussieren.

Z. B. ist zur Grundkompetenz „AG 2.3 quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können“ (ebd., S. 2 im Anhang) folgende Aufgabe (Nummer 3) beim Wintertermin 2020/21 am 12. Jänner 2022 gestellt worden: „Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + k \cdot x + 4 \cdot k = 0$ mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}$. Aufgabenstellung: Ermitteln Sie die zwei unterschiedlichen Werte k_1 und k_2 von k , für die die gegebene Gleichung genau eine Lösung hat. [...]“¹ Es konnten dabei 0, $\frac{1}{2}$ oder 1 Punkt(e) entsprechend der beiden gesuchten Lösungen erzielt werden. Sind also Grundkompetenzen teilbar?! Oder soll hier nicht gerade erkannt werden,

dass die aus $x_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - 4k}$ resultierende quadratische Gleichung $\frac{k^2}{4} = 4k$ eben zwei verschiedene Lösungen $k_1 = 0$ und $k_2 = 16$ hat?

*Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Oskar Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien.

E-Mail: stefan.goetz@univie.ac.at

2 Kreuztabellen

Im Entwurf des Lehrplanes für die Sekundarstufe I der Beratungsgruppe Mathematik vom 12.08.2021 ist für die vierte Klasse „Kreuztabellen erstellen und interpretieren“ im Kompetenzbereich 4 „Daten und Zufall“ vorgesehen².

Vierfeldertafeln wie Tabelle 1 als Spezialfall zeigen die absoluten oder relativen Häufigkeiten von Kombinationen zweier Merkmale (in Tabelle 1: Geschlecht

	spielt Instrument (<i>i</i>)	spielt kein Instrument (<i>-i</i>)	Summe
Junge (<i>j</i>)	0.125 (4)	0.25 (8)	0.375 (12)
Mädchen (<i>m</i>)	0.46875 (15)	0.15625 (5)	0.625 (20)
Summe	0.59375 (19)	0.40625 (13)	1 (32)

Tabelle 1: Vierfeldertafel mit fingierten Daten

und Instrumentenaffinität) in Form von *UND-Verknüpfungen* (Konjunktionen). Zusätzlich werden oft Randsummen (Zeilen, Spalten) angegeben. Z. B. sind also ein Viertel der 32 Schüler*innen einer Klasse in Tabelle 1 männlich (*j*) UND spielen kein Instrument (*-i*). Die Gruppe besteht insgesamt aus 20 Mädchen (*m*) und 12 Burschen. Auf die Frage „Wie groß ist der Anteil der ... unter den ...?“ definieren wir sogenannte *bedingte relative Häufigkeiten* als Antwort: $r(i|m) = \frac{r(i \cap m)}{r(m)}$ bezeichnet z. B. den Anteil der Instrumente spielenden Personen unter den Mädchen. Wir legen also eine neue (i. Allg. eingeschränkte) Grundgesamtheit, hier die Mädchen, zugrunde. Wir vergleichen $r(i|m) = \frac{0.46875}{0.625} = \frac{15}{20} = 0.75$ mit $r(i|j) = \frac{0.125}{0.375} = \frac{4}{12} = 0.\bar{3}$ und schließen: Mädchen spielen häufiger ein Instrument als die Burschen in dieser Klasse. Eine graphische Veranschaulichung geschieht durch das Einheitsquadrat (Quadrat mit Seitenlänge eins). Die senkrechte Linie in Abbildung 1 (erstellt mit ProVis³) teilt die Seite(nlänge 1) im Verhältnis $r(j):r(m)$. Die Höhe *h* des linken oberen Rechtecks resultiert aus der Forderung $h \cdot r(j) = r(j \cap i)$, d. h. die Fläche der Rechtecke entspricht jeweils den relativen UND-Häufigkeiten. Bedingte relative Häufigkeiten treten als Seitenlängen dieser Rechtecke – in Abbildung 1 sind zwei davon blau markiert – auf. Als Stärke der Abhängigkeit der beiden Merkmale Geschlecht und Instrumentenaffinität ist das *Assoziationsmaß* $d = r(i|m) - r(i|j) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \approx 0.4$ eine einfach zu bestimmende Größe, ebenfalls in Abbildung 1 in grün zu sehen (Döllner & Götz, 2021).

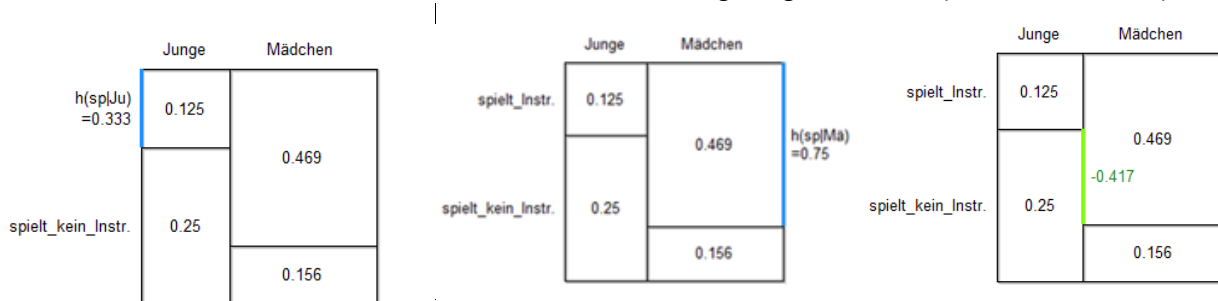


Abbildung 1: Einheitsquadrate mit relativen (bedingten) Häufigkeiten und dem Assoziationsmaß

3 Zum Kompetenzbegriff

„Kompetenzen sind die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.“ (Weinert, 2002, S. 27 f.) und „Mathematische Grundbildung wird [...] definiert als die Fähigkeit einer Person, in einer Vielzahl von Kontexten Problemstellungen mathematisch zu formulieren, zu bearbeiten und zu interpretieren sowie mathematisch zu argumentieren. [...] [Sie] unterstützt Personen dabei zu erkennen und zu verstehen, welche Rolle Mathematik in der Welt spielt sowie fundierte Urteile und Entscheidungen zu treffen, die den Anforderungen des Lebens als konstruktive, engagierte und reflektierte Bürger*innen entsprechen.“ (PISA 2022)⁴ sind zwei bekannte Definitionen von „Kompetenz“, wobei die zweite den sozialen Aspekt im Gegensatz zur ersten nicht berücksichtigt und an das in Abschnitt 1 angeführte Motiv für die Festlegung von Grundkompetenzen erinnert.

Konkrete Charakterisierungen von Kompetenzorientierung für den Mathematikunterricht geben Hanisch & Benischek (2012, S. 45). Er sollte sich danach ausrichten, dass Aufgaben für Lernende so vorbereitet werden, dass sie zu deren Lösung einerseits auf vorhandene Ressourcen zurückgreifen können und andererseits neue

Lösungsstrategien entdecken und üben können. So kann bereits vorhandenes Wissen mit neuem verknüpft werden. Für verschiedene Unterrichtsphasen explizieren Mürwald-Scheifinger & Weber (2011, S. 112) das Entdecken neuer Inhalte und Fragestellungen, das Systematisieren von Ergebnissen herausgefundener Problemstellungen, das Reflektieren über mathematische Einsichten und Werkzeuge und das Zusammenschließen von altem und neuem Wissen bei der *Erarbeitung*. In den *Übungs-* und *Vertiefungsphasen* geht es um das Sichern von Grundkompetenzen, das Gestalten von produktiven, motivierenden Übungseinheiten und um Binnendifferenzierung.

4 Kompetenzorientierter Mathematikunterricht

4.1 Die uvw -Sprache zum Beweisen in der Dreiecksgeometrie

Zur Demonstration soll die Existenz des *Eckenschwerpunkts* eines allgemeinen Dreiecks ABC bewiesen werden (Götz, 2017). Dazu legen wir das Dreieck so, dass eine Seite auf der x -Achse liegt und der dieser Seite gegenüberliegende Eckpunkt auf der y -Achse: Abbildung 2. Der Eckpunkt A hat die Koordinaten $(u|0)$, B $(v|0)$ und C $(0|w)$. Weiters setzen wir $u < v$ und $w > 0$. Die Mittelpunkte M_{AB} und M_{BC} der Dreiecksseiten AB bzw. BC sind ebenfalls in Abbildung 2 eingezeichnet und ihre Koordinaten sind dort – nach der Formel $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$ berechnet – angegeben. Für die Schwerelinie s_{AB} durch den Eckpunkt C finden wir die Parameterform $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} u+v \\ -w \end{pmatrix}$, analog ist

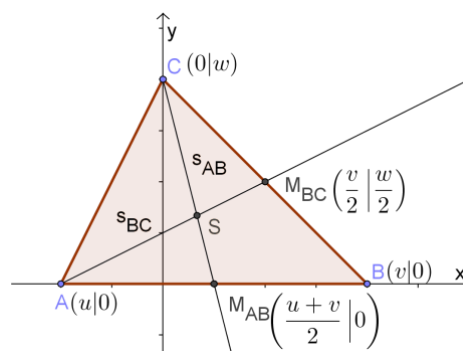


Abbildung 2: Dreieck in uvw -Sprache mit Schnittpunkt S zweier Schwerelinien

$\vec{X} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v-u \\ w \end{pmatrix}$ eine Parameterform der Schwerelinie s_{BC} durch

den Eckpunkt A . Der Schnittpunkt S dieser beiden Schwerelinien hat die Koordinaten $(\frac{u+v}{3} | \frac{w}{3})$ mit dem Parameterwert $s = t = \frac{2}{3}$. Das bedeutet, der Schnittpunkt teilt die Schwerelinien im „Inneren des Dreiecks“ im Verhältnis 2:1. Man kann nun leicht zeigen, dass der Punkt S auch auf der dritten Schwerelinie s_{AC} liegt und auch diese im Inneren des Dreiecks im Verhältnis 2:1 teilt.

Die Kernidee der uvw -Sprache ist, Problemstellungen aus der Euklid'schen (Dreiecks-)Geometrie (zum Teil aus der Sekundarstufe I) allgemein analytisch zu beschreiben („koordinatisieren“), und dann (direkt, ohne Umwege!) „nachzurechnen“. Eine *Exploration* mittels dynamischer Geometriesoftware kann zu einer *Behauptung* führen, für die wir ein (für den Unterricht) mächtiges Mittel zur (eigenständigen) Generierung von mathematischen *Begründungen* gefunden haben. So ist eine Quelle *sinnvoller (Standard-)Rechnungen* (Parameterform einer Geraden, Schnitt zweier Geraden, Inzidenzfragen: auch mit einem Computeralgebrasystem) zur Erkenntnisgewinnung durch Operieren erschlossen worden. Dabei spielt weiters eine gewisse Haltung eine Rolle, diese Methoden auch einzusetzen. Aufgaben mit *konkreten* Belegungen für u , v und w können zur Binnendifferenzierung (Abschnitt 3) herangezogen werden.

4.2 Intelligentes Üben

Kenntnisse, Fertigkeiten, Verstehen/Vorstellungen, Anwendungsfähigkeit, (übergreifende) Strategien, Reflexionsfähigkeit und Einstellungen können zu beliebigen mathematischen Themen geübt werden. Tabelle 2 zeigt eine Aufgabe, die *Kenntnisse* über quadratische Gleichungen anspricht. Zusatzaufgaben wie

- Such dir drei Aufgaben aus! Löse sie! Begründe, warum du diese gewählt hast!
- Stell dir vor, du musst alle Aufgaben lösen und darfst fünf aussortieren. Welche würdest du aussortieren? Warum?

(Block, 2018, S. 24) sprechen auch *Vorstellungen* und *Reflexionsfähigkeit* der Schülerinnen und Schüler dazu an.

Übergreifende Strategien zu diesem Thema werden bei Aufgaben benötigt, bei denen mehrere Repräsentationsformen durch Transformationen ineinander übergeführt werden müssen. Die Nullstellen von *Graphen* quadratischer *Funktionen* bzw. die x -Koordinaten der Schnittpunkte von *Graphen* quadratischer mit jenen linearer *Funktionen* können als Lösungen quadratischer *Gleichungen* interpretiert werden.

4.3 Füllfunktionen

„Die Chance, Mathematik mit Erfahrungen zu verbinden, sollte man [...] nutzen, denn Erkenntnisse, die aus einem enaktiven Erleben erwachsen, bleiben auch nachhaltiger im Gedächtnis.“ (Barzel, 2009, S. 10). Grundvorstellungen zum funktionalen Denken (Zuordnungsaspekt, Kovariationsaspekt und der Objektaspekt (Barzel, 2009, S. 13)) werden bei der Erstellung von Füllfunktionen angesprochen (Lampert & Hilgers, o. J.). In Sergi (2022, S. 76 ff.) wird ein Kegelstumpf mit konstanter Rate befüllt. Gesucht ist nun eine Funktion, die

die Füllhöhe in Abhängigkeit von der Zeit angibt. Es zeigt sich, dass eine Herleitung in der 5. Klasse AHS mittels $V = \frac{H\pi}{3} \cdot (r_2^2 + r_2 \cdot r_1 + r_1^2)$ für das Volumen V eines Kegelstumpfs der Höhe H und mit den Radien r_1 und r_2 der Basis- bzw. der Dachfläche viel aufwändiger ist als mit Hilfe von $V(h) = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r_2-r_1}{H} \cdot x + r_1 \right)^2 dx$ für das Volumen von Rotationskörpern in der 8. Klasse AHS. Hier liegt eine schöne Anwendung des Spiralprinzips vor.

Literatur

- Barzel, B. (2009). Mathematik mit allen Sinnen erfahren – auch in der Sekundarstufe! In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente*. Cornelsen Berlin (S. 6–17).
- Block, J. (2018). Sortieren und Variieren. Aufgaben werden zu Aufgaben. *mathematik lehren* 209, S. 22–27.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2021). *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS)*. Stand: Februar 2021. Redaktionelle Änderungen für die Neuauflage: Abteilung III/6. <https://www.matura.gv.at/srdp/mathematik>
- Döller, V., & Götz, S. (2021). Baumdiagramme und Einheitsquadrate 4.0. *Stochastik in der Schule*, 41 (Heft 3), S. 9–19.
- Götz, S. (2017). Die *uvw*-Sprache in der analytischen Geometrie. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG*, Heft 50, S. 9–27. <https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2017%20Band%2050/VortragGoetz.pdf>
- Hanisch, G., & Benischek, I. (2012). Kompetenzorientierter Mathematikunterricht – Wie kann er umgesetzt werden? *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG*, Heft 45, S. 43–55. <https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2012%20Band%2045/VortragHanischBenischek.pdf>
- Lambert, A., & Hilgers, A. (o. J.). *Füllgraphen – wie man sieht!* <https://www.friedrich-verlag.de/mathematik/funktionen/funktionale-zusammenhaenge-zwischen-fuellgraph-und-gefaess-erkunden/>
- Mürwald-Scheifinger, E. & Weber, W. (2011). Kompetenzorientierter Unterricht – Sekundarstufe I – Mathematik. In bifie (Hrsg.), *Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis*. Leykam Graz (S. 109–137). [http://www.nms-rennweg.ksn.at/allmann/allgemeines/bist links zu dokumenten/kompetenzorientierter unterricht i n theorie und praxis 2011-03-23.pdf](http://www.nms-rennweg.ksn.at/allmann/allgemeines/bist%20links%20zu%20dokumenten/kompetenzorientierter%20unterricht%20in%20theorie%20und%20praxis%202011-03-23.pdf)
- Sergi, L. (2022). *Das Erstellen von GeoGebra-Applets und ihre Anwendungsmöglichkeiten in der 9. Schulstufe AHS*. Masterarbeit an der Universität Wien. <https://theses.univie.ac.at/detail/62449>
- Weinert, F. (Hrsg.) (2002). *Leistungsmessungen in Schulen* (2. Auflage). Beltz Weinheim und Basel.

Gleichungen sortieren

Schreibe die Gleichungen auf Kärtchen und schneide sie aus. Sortiere die Karten mit den Gleichungen. Nenne deine Kriterien und erlaüttere sie.
 Beachte: Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Gleichungen zu sortieren.

A $-2x^2 = 3x^2 + 15x - 10$	B $x^2 + 4x = 0$	C $(x - 8)^2 = 0$	D $2x + x^2 - 10 = 0$
E $-10 = (x + 4)^2$	F $x^2 + x - 4 = 0$	G $x^2 = -16x - 64$	H $(x - 5)(x + 3) = 9$
I $6x^2 - 15 = 0$	J $x^2 = x$	K $5x^2 = -26$	L $(2x - 7)^2 = 20$
M $40 = 8x^2$	N $4x \cdot (3x + 12) = 0$	O $4x^2 + 16x + 20 = 0$	P $x^2 = 50$
Q $(x - 5)(x + 3) = 0$	R $(x + 3) = \frac{6}{(x - 9)}$	S $x^2 = -14$	T $x^2 + 9x - 20 = 16$

Tabelle 2: Block (2018, S. 23)

¹ <https://www.matura.gv.at/downloads/download/wintertermin-2020-21-mathematik-ahs>

² <https://bgm.univie.ac.at/lp-sekundarstufe-1/>

³ <https://austria.omilab.org/psm/content/provis/info>

⁴ <https://www.pisa.tum.de/pisa/kompetenzbereiche/mathematische-kompetenz/>