

Raumvorstellungsvermögen als Prädiktor für Karrieren im MINT-Bereich

Förderung der Raumvorstellung im Geometrieunterricht

Isabella Linzer-Sommer¹

<https://doi.org/10.53349/resource.2022.is23.a1092>

Zusammenfassung

Obwohl ein Zusammenhang zwischen einem gut ausgebildeten Raumvorstellungsvermögen und erfolgreichen Karrieren im MINT-Bereich nachweisbar ist, wird der Förderung des Raumvorstellungsvermögens im schulischen Bereich eine untergeordnete Rolle zugeordnet. Mithilfe des geometrischen Grundobjekts Würfel und von Würfelnetzen kann ein Lernsetting gestaltet werden, welches zur Förderung von räumlichem Denken der Schüler*innen beiträgt.

Keywords:

Fachdidaktik Mathematik
Raumgeometrie
Unterrichtsmaterialien

1 Raumvorstellungsvermögen (kurz: Raumvorstellung)

„Das Raumvorstellungsvermögen ist die Fähigkeit eines Individuums, sich räumliche Objekte mental vorstellen zu können, diese rein gedanklich manipulieren (schieben, skalieren, drehen, spiegeln, ...) zu können, Relationen zwischen mehreren räumlichen Objekten erkennen zu können und sich rein in der Vorstellung an unterschiedliche Positionen im Raum versetzen zu können (also sich den Raum aus anderen Perspektiven vorstellen zu können).“ (Maresch, 2021, S.34)

Diese Definition von räumlichen Vorstellungsvermögen ist den folgenden Überlegungen grundgelegt.

Das Raumvorstellungsvermögen ist eine Fähigkeit, die zwar genetisch bedingt ist, aber im Laufe des Lebens durch verschiedene Umwelteinflüsse veränderbar und trainierbar ist (Glück et al., 2005). Kompetenzen im Bereich des Raumvorstellungsvermögens werden in den letzten Jahren vermehrt im Zusammenhang mit dem Fachkräftemangel im MINT-Bereich (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik) genannt, da ein Zusammenhang zwischen einem gut ausgebildeten Raumvorstellungsvermögen und erfolgreichen Karrieren im MINT-Bereich nachgewiesen wurde (Wai et al., 2009).

Raumvorstellungsaufgaben sind nicht auf den MINT-Bereich im schulischen Kontext beschränkt, sondern finden sich auch in Assessments für Piloten oder in Aufnahmetests für medizinisches Personal. Da Mitte des vorigen Jahrhunderts die Raumvorstellung als eine von sieben Primärfaktoren der Intelligenz identifiziert wurde (Thurstone, 1938), werden damit in diesem Rahmen Rückschlüsse auf die kognitiven Leistungen von Personen gezogen.

Das laufende EU Projekt SellSTEM – Spatially Enhanced Learning Linked to STEM (Science, technology, engineering and mathematics) untersucht seit 2021 bei einer Dauer von 4 Jahren die Rolle der räumlichen Fähigkeiten im und für das Lernen im MINT-Bereich. In diesem Projekt sollen europaweit Daten über die räumlichen Fähigkeiten von Kindern – differenziert nach Geschlecht, Religion und sozioökonomischen Gesichtspunkten – erhoben und verglichen werden. Die Beziehung zwischen

¹ Pädagogische Hochschule Niederösterreich, Mühlgasse 67, 2500 Baden.

E-Mail: i.linzer@ph-noe.ac.at

schulischen Leistungen und Berufswahl soll wissenschaftlich untersucht und die räumlichen Fähigkeiten von Kindern durch das Bereitstellen von Lehr- und Lernmaterial zu Online-Lernen, taktile Aktivitäten und projektbasiertes Lernen gefördert werden. In Österreich nimmt die Universität Salzburg als eine von 10 Universitäten aus Deutschland, Irland, Norwegen, Großbritannien, Lettland, Österreich und den Niederlanden an diesem Projekt teil. (siehe dazu: sellstem.eu)

Visuelle Wahrnehmungen und anatomische Voraussetzung bilden die Grundlage für die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Durch schulischen Geometrieunterricht verbessert sich das räumliche Vorstellungsvermögen jedoch nachweislich, wie an einer Längsschnittstudie von Schüler*innen im Sekundarstufenbereich nachgewiesen werden konnte, insbesondere Lernende mit einem niedrigen Ausgangsniveau bei Raumvorstellungstests profitieren von einem Geometrieunterricht am meisten (Gittler, 1994).

Im Folgenden werden zwei Beispiele zur Förderung des Raumvorstellungsvermögens beschrieben, welche zur Schulung des Raumvorstellungsvermögens für alle Altersklassen ab Grundstufe II herangezogen werden können.

2 Lernumgebung Würfelnetze

2.1 Raumgeometrische Aufgaben im schulischen Bereich

Der Zusammenhang zwischen mathematischen Rechenleistungen und räumlichen Vorstellungsvermögen wurde bereits mehrfach nachgewiesen (Büchter, 2011; Gilbert, 2005; Shawky et al., 2020; Zöggeler & Maresch, 2018). Dennoch spielen raumgeometrische Aufgaben im Mathematikunterricht meist eine untergeordnete Rolle. Für die Vernachlässigung geometrischer Inhalte in der Praxis vermuten Franke und Reinhold (2016) folgende Ursachen:

- *„Die Lernziele für den Geometrieunterricht erscheinen nicht so klar wie für den Arithmetikunterricht.*
- *Arithmetische Inhalte werden insbesondere im Anfangsunterricht von Lehrkräften oft als wichtiger angesehen.*
- *Obwohl es zahlreiche und ansprechende Unterrichtsbeispiele gibt, erfordert Geometrieunterricht oftmals einen relativ hohen Vorbereitungsaufwand.*
- *Die Ergebnisse geometrischer Aktivitäten spiegeln sich oft nicht sofort in einem Zuwachs an Wissen wider und sind mitunter nur schwer zu prüfen.*
- *Geometrische Themen werden häufig eher aufgrund ihres Unterhaltungswertes als wegen ihrer mathematischen Bedeutung behandelt.“*

(Franke & Reinhold, 2016, 4ff)

Insbesondere im letzten Punkt sehen sie eine Begründung dafür, dass „anspruchsvolle Lehrende“ auf Geometrie im Unterricht verzichten, da die Beschäftigung mit der Geometrie zu einem unreflektierten Aktionismus führt. Soll dieser von einem zielgerichteten Geometrieunterricht abgelöst werden, ist auf die Gestaltung der Lernumgebung zu achten.

2.2 Gestaltung der Lernumgebung

Damit Schüler*innen tatsächlich räumliche Objekte erzeugen und transformieren können und sich im Unterricht ihr Raumvorstellungsvermögen weiterentwickelt, müssen bei der Gestaltung der Lernumgebung einige Rahmenbedingungen erfüllt sein.

Die rein mentale Beschäftigung mit einem geometrischen Körper kann nur dann erfolgen, wenn der Lernende durch Denken räumliche Objekte mental erzeugen kann. Das zu behandelnde Objekt sollte

daher aus der Erfahrungswelt der Lernenden sein und bereits durch haptische Erfahrungen bekannt sein. Würfelaufgaben erweisen dabei gute Dienste, da der Würfel zu den geometrischen Grundobjekten zählt, aus der unmittelbaren Erfahrungswelt der Schüler*innen stammt und davon auszugehen ist, dass die Lernenden auf haptische Erfahrungen im Zusammenhang mit diesem Objekt zurückgreifen können.

Daneben sind auch Begrifflichkeiten zu klären. So wird im Schulbuch „Das ist Mathematik 1“ das Netz eines Würfels wie folgt definiert:

*„Breitet man die Begrenzungsflächen eines Quaders (Würfels) in der Ebene aus (z.B.: durch Zerlegen einer Kartonschachtel), so erhält man das Netz eines Quaders (Würfels). Umgekehrt handelt es sich bei einer ebenen Figur um das Netz eines Quaders (Würfels), wenn sich daraus ein Quader (Würfel) „basteln“ lässt.“
(Humenberger et al, 2016, S 252)*

Die Lernenden sollten demnach in der Lage sein, ebene Gebilde zu einem räumlichen Würfel aufzuhalten, aber ebenso aus dem Raum durch Auffalten eine Verebnung des räumlichen Gebildes vorzunehmen. Damit Aufgabenstellungen in diesem Zusammenhang gelöst werden können, ist es erforderlich Begriffe wie *Quadrat, Mantel, Deckfläche, Grundfläche, Seitenfläche, Ecke, Kante, Kantenlänge* zu klären. Das kann beispielsweise in Form Wortschatzspeichern erfolgen. Wurden die Begrifflichkeiten verstanden, können bereits einfache Sätze wie die folgenden von den Schüler*innen auf ihren Wahrheitsgehalt überprüft werden:

*Der Würfel steht auf der Grundfläche.
Die Deckfläche ist parallel zu Grundfläche.
Der Mantel besteht aus vier Seitenflächen.
Ein Würfel hat 8 Ecken.
Ein Würfel hat 6 Seitenflächen. Die sechs Seitenflächen eines Würfels sind Quadrate.
Die 12 Kanten eines Würfels sind alle gleich lang.
Je 4 Kanten sind zueinander parallel und gleich lang.*

In weiterer Folge sind Aufgabenstellungen mit Würfelnetzen lösen, welche das Raumenken anregen und im Folgenden näher beschrieben werden.

2.3 Hexominos und Würfelnetze

Bei der Beschäftigung mit Würfelnetzen werden den Schüler*innen meist Kombinationen aus sechs Quadraten, die entlang von Kanten aneinandergereiht sind, vorgegeben. Man spricht von sogenannten Hexominos oder Quadratsechslingen. Die Aufgabe der Lernenden ist es, zu entscheiden, ob es sich bei dem dargebotenen Hexomino um ein Würfelnetz handelt oder nicht.

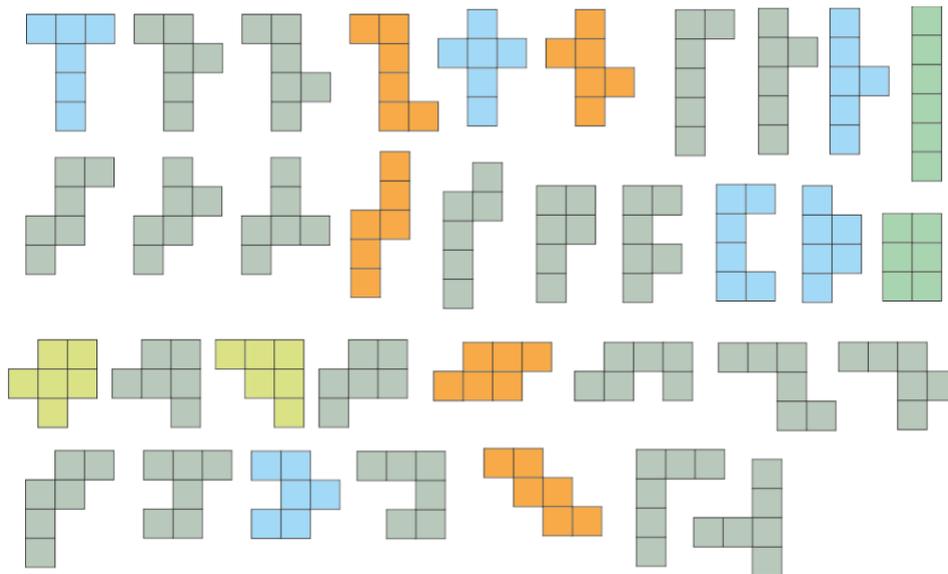


Abbildung 1: Die 35 Hexominos (Quelle: Eigene Darstellung)

Die 35
möglichen

Hexominos können in beliebiger Kombination zu unterschiedlichen Lernumgebungen zusammengefasst werden, wobei die Schwierigkeit der Lernaufgabe je nach zur Verfügung gestellten, unterstützenden, haptischen Material stark variiert.

Schwierigkeitsgrad I: Die Netze werden in Papierform vorgegeben, die Schüler*innen können durch Falten entscheiden, ob es sich um „ein Würfelnetz“ oder „kein Würfelnetz“ handelt.

Schwierigkeitsgrad II (Kombination aus I und III): Die Schüler*innen erhalten ein Arbeitsblatt und werden aufgefordert, die Aufgabe mental zu lösen. Würfelnetze aus Karton oder Papier werden als Tipp oder als Lösungshilfe für nicht gelöste Aufgaben angeboten.

Schwierigkeitsgrad III: Die Schüler*innen entscheiden ohne haptische Hilfestellung, ob es sich beim vorgegebenen Hexomino um ein Würfelnetz handelt.

Ergänzend kann man die Schüler*innen auffordern, verbal ihre Überlegungen zu beschreiben, welche zur Identifikation eines Hexominos als Würfelnetz geführt haben. Auch hierbei kann man mehrere Stufen bei der Entscheidung beobachten:

Stufe 1: Am Anfang der Beschäftigung mit Würfelnetzen wird das räumliche Falten angewendet, um ein Netz als Würfelnetz zu erkennen.

Stufe 2: Die 11 Würfelnetze, welche nicht durch Rotation oder Spiegelung (durch Wenden) deckungsgleich sind, werden nach wenigen Unterrichtsstunden von vielen Kindern wiedererkannt. Die Kinder geben den Würfelnetzen Namen („Das ist die Ente“, „Das ist das Kreuz“) und erkennen die Netze in verschiedenen Lagen wieder („Auf den Kopf gedrehtes T“).

Stufe 3: In weiterer Folge können Netze durch verschiedene Strategien, aus bereits bekannten Netzgrundformen abgeleitet werden. Ein systematisches Probieren und das Formulieren von kennzeichnenden Aussagen führt dann zu weiteren Formen von Würfelnetzen (vgl. Schüler*innenbeschreibungen <https://kira.dzlm.de/node/54>).

Eine anspruchsvollere Lernaufgabe, ohne weiteren Einsatz von Lernmaterialien, bietet die Möglichkeit Würfelnetze auf kariertem Papier aufzuzeichnen. Durch Ausschneiden kann überprüft werden, ob es sich tatsächlich um ein Würfelnetz handelt. Beim Übereinanderstapeln der Würfelnetze von verschiedenen Lernenden ist schnell klar, dass es offensichtlich Kombinationen gibt, die viele Mitschüler*innen als Würfelnetz erkennen, während andere nur schwer zu finden sind. Die Lernenden können so charakterisierende Eigenschaften von Würfelnetzen finden.

Es gilt:

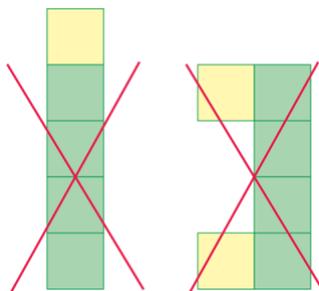


Abbildung 2: Mögliche Anordnungen
(Quelle: Eigene Darstellung)

Drehen und wenden der Würfelnetze führt nicht zu einem neuen Typ von Würfelnetz.

Mehr als vier Quadrate in einer Reihe sind nicht möglich.

Bei 4er Kombination können nicht zwei Quadrate auf derselben Seite einer „Viererstange“ sein.

Es bleiben sechs Möglichkeiten für „Vierstangen“ über, wenn man deckungsgleiche Kombinationen ausschließt (Abbildung 2). In Abbildung 3 sieht man alle mögliche Kombinationen aus „Dreierstangen“ und die einzige Kombination mit „Zweierstangen“, insgesamt erhält man alle 11 möglichen Würfelnetze.

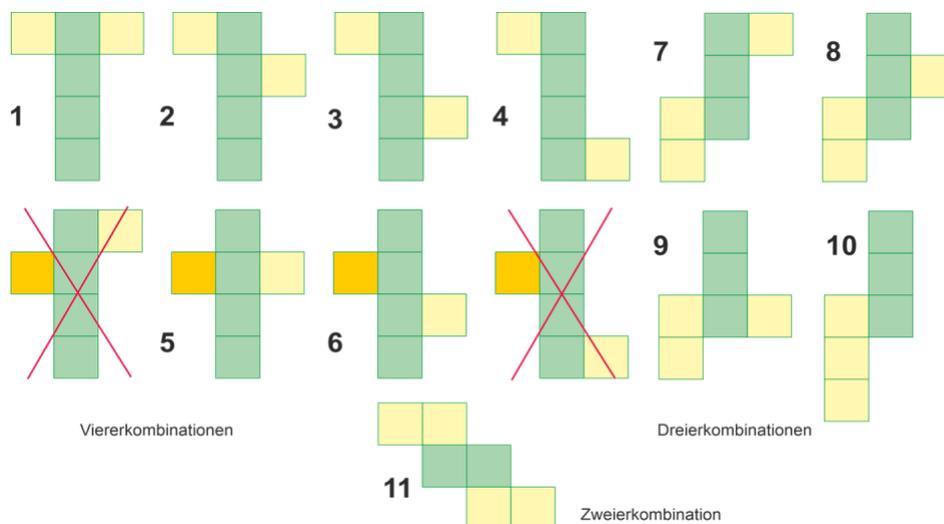


Abbildung 3: Die 11 Würfelnetze (Quelle: Eigene Darstellung)

Damit Lernende nach mehreren Lerneinheiten weiterhin räumliche Strategien beim Lösen und Erkennen von Würfelnetzen verwenden, sollte man die Netzaufgaben erweitern und auf aufgefaltete Formationen zurückgreifen. Die Schwierigkeit der Aufgaben hängt dann wesentlich von der dargestellten Darstellung ab. Ansichten, welche mental um einen großen Winkel gedreht werden müssen, sind dabei besonders herausfordernd.

Eine umfassende Sammlung von Netzen, die halb oder ganz zusammengefaltet dargeboten werden, findet man unter <https://pikas.dzlm.de/fortbildung/gute-aufgaben/75-inter-netzso>.

Der Einsatz solcher teilweise aufgefalteter Hexominos zwingt den Betrachter die räumlichen Konfigurationen in die Ebene auszubreiten, um deren Gleichwertigkeit beurteilen zu können. Sie sind daher eine notwendige Ergänzung zum Auffalten im obigen Sinn, um sich mit dem Thema Würfelnetze in beide Richtungen - Verebnen und Auffalten – auseinanderzusetzen.

3 Fazit

Würfelnetze sind ein unverzichtbarer Bestandteil für die Schulung des Raumvorstellungsvermögens und ermöglichen durch den Einsatz von haptischen Material leistungsdifferenzierte Lernumgebungen für Lerngruppen ab der Grundstufe II.

4 Literatur

- Büchter, A. (2011). *Zur Erforschung von Mathematikleistung*. <https://doi.org/10.17877/DE290R-13411>
- Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (3. Aufl.). *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Springer Spektrum.
- Gilbert, J. K. (2005). *Visualization in Science Education. Models and Modeling in Science Education: Bd. 1*. Springer.
- Gittler, G. (1994). Intelligenzförderung durch Schulunterricht: Darstellende Geometrie und räumliches Vorstellungsvermögen: *Die Seele ist ein weites Land*, 105–122 (Aktuelle Forschung am Wiener Institut für Psychologie).
- Glück, J., Kaufmann, H., Dünser, A. & Steinbügl, K. (2005). Geometrie und Raumvorstellung – Psychologische Perspektiven. *Informationsblätter der Geometrie (IBDG)*, 24(1), 4–11.
- Humenberger, H et al (2016), *Das ist Mathematik 1, öbv*
- Maresch, G. (2021). Struktur des Räumlichen Denkens. *Informationsblätter der Geometrie (IBDG)*, 40(1), 23-36 .
- Shawky, A., Elbiblawy, E. & Maresch, G. (2020). Spatial ability differences between students with a math learning disability and their other normal colleagues. *Journal of Humanities and Applied Social Sciences, ahead-of-print*(ahead-of-print). <https://doi.org/10.1108/JHASS-01-2020-0016>
- Thurstone, L. L. (1938). Primary Mental Abilities. *American Journal of Sociology*, 44(2), 310–311. <https://doi.org/10.1086/217986>
- Wai, J., Lubinski, D. & Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 817–835. <https://doi.org/10.1037/a0016127>
- Zöggeler, M. & Maresch, G. (2018). Raumvorstellungsvermögen und mathematische Kompetenzen: Vorstellung einer Studie bei zweitsemestrigen Lehramt-Mathematik-Studierenden. *Mathematik im Unterricht* (9).
- KIRA Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik <https://kira.dzlm.de/node/54>), abgerufen am 18. April 2022
- PIKAS Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik <https://pikas.dzlm.de/fortbildung/gute-aufgaben/75-inter-netzzo>, abgerufen am 8. April 2022