R&E-SOURCE http://journal.ph-noe.ac.at
Open Online Journal for Research and Education
Sonderausgabe Nr. 23, Juli 2022, ISSN: 2313-1640

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

Frei entfalten

Mathematische Begabungsförderung in der Grundschule

Franziska Strübbe[1], *Nina Berlinger*[2]

https://doi.org/10.53349/resource.2022.iS23.a1077

Zusammenfassung

Eine der Grundpositionen mathematikdidaktischer Begabungsforschung besagt, dass sich eine Begabung umso besser entfalten kann, desto früher sie erkannt und gefördert wird. Begabungsfördernden Enrichmentprojekten kommt insofern eine besondere Aufgabe zu. Im Lehr-Lern-Labor ‚Mathe für kleine Asse' an der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster greifen demgemäß verschiedene Akteur*innen in ihren Aufgaben ineinander und verzahnen Theorie, Diagnostik und Förderung im Kontext mathematischer Begabungen. Diese Trias wird durch den Beitrag leiten.

Keywords:
Mathematikdidaktische Begabungsforschung
Diagnostik und Förderung
Aufgabenmaterialien

1 Einleitung

Im Projekt ‚Mathe für kleine Asse' (Käpnick, 2008; Brüning, 2018) an der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster können Kinder ihr individuelles Begabungspotenzial frei entfalten. In regelmäßig stattfindenden Knobelstunden bieten offene, substanzielle Problemfelder (Fuchs & Käpnick, 2009) Anreize zum produktiven mathematischen Tätigsein. Diese bewährten und innovativen Konzepte ermöglichen sowohl eine Förderung der Matheasse als auch Explikationen des Begabungspotenzials im Sinne einer ganzheitlichen Diagnostik. Das Entdecken von mathematischen Begabungen wird im Projekt als ein theoriegeleiteter, feinfühliger und längerfristiger Prozess umgesetzt (Käpnick & Benölken, 2020). Die erprobten Aufgabenformate lassen sich leicht für die Schulpraxis und den Regelunterricht im Sinne einer Förderung für alle Kinder adaptieren. Diesem Ansatz entsprechend soll in diesem Beitrag am Beispiel von ‚Faltaufgaben' ein geeignetes Materialangebot zur Förderung mathematisch begabter Kinder vorgestellt werden. Ergänzend liefern Eigenproduktionen von Matheassen aus der Grundschule praxisnahe Einblicke zum Aufgabenfeld.

2 Mathematikdidaktische Begabungsforschung

In der Mathematikdidaktik und deren Bezugsdisziplinen – wie der Pädagogik, Psychologie und weiteren Fachdidaktiken – liegen vielfältige Theorieansätze und Studien zum Begabungsbegriff vor, die ein heterogenes, sich wechselseitig ergänzendes Begriffsfeld zum Themenkomplex Begabungen aufspannen (Käpnick, 2013). Es besteht in der fachdidaktischen Forschung jedoch ein mehrheitlicher Konsens über die nachfolgenden Grundpositionen zum mathematischen Begabungsbegriff. Demnach kennzeichnet sich eine mathematische Begabung durch einen hochkomplexen Charakter, eine Bereichsspezifik, eine dynamische Entwicklung sowie Notwendigkeit zum frühzeitigen Erkennen und sinnvollen Fördern mathematisch begabter Kinder (Käpnick, 2014). Besonders der letztgenannte Grundposition widmet sich dieser Beitrag. Der Notwendigkeit einer

[1] Westfälische Wilhelms-Universität Münster, ICBF, Georgskommende 14, 48143 Münster.
E-Mail: struebbe@uni-muenster.de
[2] Westfälische Wilhelms-Universität Münster, GIMB, Fliednerstraße 21, 48149 Münster.
E-Mail: n.berlinger@uni-muenster.de

frühzeitigen Diagnostik und Förderung mathematischer Begabungen liegt die Faustregel zugrunde „wonach sich eine Begabung umso besser entfalten kann, je früher sie erkannt und gefördert wird“ (Käpnick, 2014, S. 538).
Neben den Grundpositionen sind in der Mathematikdidaktik Begabungsmodelle entwickelt worden, die die Begabungsentwicklung verschiedener Altersstufen beschreiben (Käpnick & Fuchs, 2006; Meyer, 2015; Sjuts, 2017). Käpnick (1998) legte diesen altersspezifischen Modellen vorab ein ‚Merkmalssystem mathematischer Begabungen‘ zugrunde, in dem er mathematikspezifische Begabungsmerkmale und begabungsstützende Persönlichkeitseigenschaften mathematisch begabter Schüler*innen der dritten und vierten Schulstufe herausstellte. Entsprechend der Modellierungen wird unter einer mathematischen Begabung „ein sich dynamisch entwickelndes und individuell geprägtes Potenzial [verstanden]. Dieses Potenzial weist bezüglich der […] für wesentlich erachteten mathematikspezifischen Begabungsmerkmale ein weit über dem Durchschnitt liegendes Niveau auf und entwickelt sich in wechselseitigen Zusammenhängen mit begabungsstützenden bereichsspezifischen Persönlichkeitseigenschaften“ (Fuchs & Käpnick, 2009, S. 8).

3 Diagnostik und Förderung

Die genannten Modelle können bei der Diagnose mathematischer Begabungen (im Grundschulalter) leitend wirken, sodass das multifaktorielle Geschehen, das an der Entfaltung einer Begabung beteiligt ist, ganzheitlich im Blick behalten wird. Der Komplexität mathematischer Begabungen kann am besten in einem feinfühligen und prozessbegleitenden Diagnoseprozess gerecht geworden werden, der die verschiedenen Aspekte wie die Ausprägung der mathematikspezifischen Begabungsmerkmale und der begabungsstützenden Persönlichkeitseigenschaften sowie fördernde bzw. hemmende typprägende intra- und interpersonalen Katalysatoren berücksichtigt (Käpnick & Benölken, 2020). Eine punktuelle, testähnliche Leistungsüberprüfung in Form von Intelligenztest o.ä. scheint mit Blick auf die theoretischen Grundlagen ungeeignet bzw. nicht ausreichend für die Diagnose mathematischer Begabungen im Grundschulalter zu sein. Vielmehr müssen sich verschiedene ‚diagnostische Mosaiksteine‘ (wie Gespräche mit dem Kind, den Eltern, den Lehrkräften, die Bearbeitung von Indikatoraufgaben, die Analyse von Eigenproduktionen, die Beobachtung beim Bearbeiten von offenen, substanziellen Problemfeldern) zu einem diagnostischen Gesamtbild zusammenfügen. Dieser Diagnoseprozess ist eng verwoben mit Aspekten der Förderung einer mathematischen Begabung. Einerseits stellt eine detaillierte Diagnostik eines Kindes in Bezug auf die mathematische Begabung eine grundlegende Voraussetzung für eine angemessene Förderung dar. Andererseits bietet sich in zahlreichen Fördersituationen aber auch die besonderen Chancen der prozessbegleitenden Diagnostik, indem Kinder zum Beispiel beim Bearbeiten offener, substanzieller Problemfelder beobachtet werden (Käpnick, 2001).

3.1 Offene, substanzielle Problemfelder

Durch die veränderte Sichtweise auf kindliches Lernen hin zu einem konstruktivistischen und kompetenzorientierten Verständnis, wird in der Mathematikdidaktik davon ausgegangen, dass Kinder ihr Wissen selbst aktiv konstruieren und in vorhandene Wissens- und Erfahrungsmuster einbinden (Käpnick & Benölken, 2020). Auf dieser Grundlage bietet sich der Einsatz offener, substanzieller Problemfelder (Käpnick & Fuchs, 2009; Benölken et al., 2016) besonders gut an, um den Kindern in geeigneten Situationen, entdeckendes und individuelles Mathematiklernen im Sinne einer natürlichen Differenzierung prozessorientiert zu ermöglichen. Offene, substanzielle Problemaufgaben sind dabei durch eine starke Kindesorientierung und problemorientierte Aktivitäten mit bewusst gewählten Materialien geprägt. Als zentrale Anforderungen an offene, substanzielle Problemaufgaben (Käpnick & Benölken, 2020, S. 147-148) ergibt sich folglich, dass

- die Chance für möglichst alle Kinder bestehen sollte, sich erfolgreich mit der Aufgabe auseinanderzusetzen (natürliche Differenzierung vom Kinde aus),
- möglichst für alle Kinder der Aufgabeninhalt interessant und motivierend sein sollte,
- der Aufgabeninhalt eine reichhaltige mathematische Substanz aufweisen sollte und
- eine Offenheit bzgl. der Wahl von Lösungswegen und Hilfsmitteln sowie der Ergebnisdarstellung bestehen sollte.

Dabei genügt eine dogmatische Orientierung an den genannten inhaltlichen und methodischen Aspekten für einen gelingenden Einsatz offener, substanzieller Problemfelder allein nicht aus. Eine fachdidaktisch geschulte Begleitung der Kinder im Problemlöseprozess ist parallel ebenso notwendig, sodass folgende allgemeine Grundorientierungen einer Lehrkraft bei der Förderung zu berücksichtigen sind (ebd., S. 147):

R&E-SOURCE http://journal.ph-noe.ac.at
Open Online Journal for Research and Education
Sonderausgabe Nr. 23, Juli 2022, ISSN: 2313-1640

- In die Problemlösekompetenzen aller Kinder Vertrauen haben,
- eine ‚Kunst der pädagogischen Zurückhaltung' beherzigen und somit ‚Hilfe zur Selbsthilfe geben' und den Kindern dabei als Ansprechpartner*innen zur Verfügung stehen,
- Entscheidungen über ihre Organisationsform, die Nutzung von Arbeitsmaterialien, ihren Lösungsweg, die Lösungsdarstellung, etc. die Kinder selbst entscheiden lassen,
- den Kindern Hilfe zum Finden und Entwickeln ihrer individuell bevorzugten Problemlösestile geben,
- bei der Planung für die Phase der Problembearbeitung sowie der Ergebnispräsentation und -diskussion ausreichend Zeit einräumen.

Eine besondere Herausforderung besteht in der Erhaltung dieser Anforderungen im Kontext des Distanzlernens. Als effektive Organisationsform zur digitalen Begabungsförderung scheinen digitale Pinnwände geeignet. Das Padlet ‚Begabungen entfalten in der Grundschule'[3] bietet in diesem Sinne eine Möglichkeit zur Förderung des mathematischen Kompetenzerwerbs von Kindern im Grundschulalter.

3.2 Faltaufgaben

Das offene, substanzielle Problemfeld ‚Faltaufgaben' (Nolte, 2008; Käpnick, 2001) stellt ein klassisches sowie erprobtes Aufgabenformat zur Förderung mathematisch begabter Kinder in der Grundschule dar. Es zeichnet sich insbesondere dadurch aus, dass es realistische Chancen für alle Kinder bereithält, erfolgreich zu lernen. Kinder können z. B. reichhaltige Entdeckungen tätigen und Anschlussprobleme finden, die dem Schulstoff nichts vorwegnehmen, sondern diesen vielmehr anreichern. Im Folgenden sollen die ersten Falt- und Schneideschritte erklärt werden, um so in die der Faltaufgabe zugrundeliegende Aufgabenstellung einzuführen.

3.2.1 Aufgabenstellung

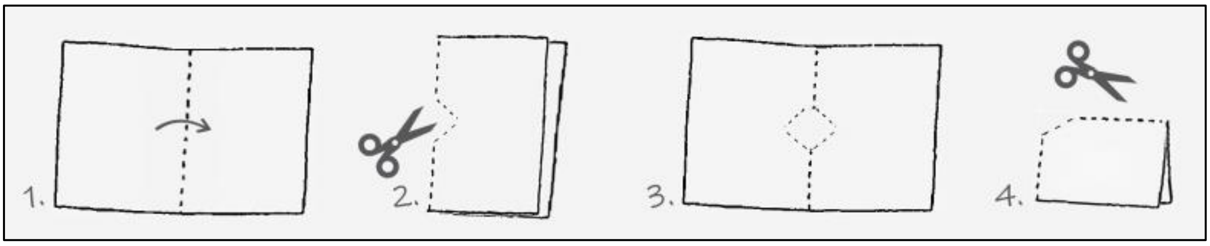


Abbildung 1: Illustration der Faltaufgabe.

Für die Faltaufgabe wird ein rechteckiges Papier (im Idealfall DinA4-Papier) und eine Schere benötigt. Das Papier wird quergelegt. Nun erfolgt die erste Faltung entlang der kurzen Seite einmal in der Mitte, sodass die jeweiligen Ecken aufeinander liegen. Es folgt der zweite Schritt, indem in die Mitte der Faltlinie ein Loch geschnitten wird. Dieses Loch kann beispielsweise in Form eines Dreiecks eingeschnitten werden. Beim Auffalten ist zu erkennen, dass das Papier nun in der Mitte ein rautenförmiges Loch aufweist. Bei der ersten Faltung ist somit ein Loch entstanden. Nun wird die zweite Faltung vorgenommen. Das bereits einmal gefaltete Blatt wird von oben nach unten gefaltet. Das ursprünglich in DinA4-Größe vorliegende Papier ist nun auf A6-Größe gefaltet. Der zweite Schneidevorgang setzt in der Mitte der neu entstandenen Faltkante (der Längsseite des Papiers) an. Hier wird ein weiteres Loch eingeschnitten. Diese Faltvorgänge können gedanklich beliebig weit fortgesetzt werden und führen zu der Frage: Wie viele Löcher entstehen, wenn man auf diese Weise siebenmal faltet und schneidet?

3.2.2 Lösungen von Matheassen

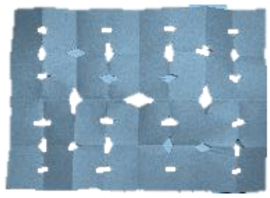
Mathematisch begabte Kinder am Ende der Grundschulzeit bearbeiten und lösen Faltaufgaben auf vielfältige Art und Weise. Innerhalb dieses Prozesses werden verschiedene Problemlösekompetenzen geschult. Beispielsweise können Kinder enaktiv die Lage und Anzahl der Löcher direkt bestimmen, sie können Muster erkennen, beschreiben und fortsetzen und auf dieser Grundlage Hypothesen entwickeln und begründen. Die Aufgabe regt darüber hinaus zu einem Wechsel zwischen den Repräsentationsebenen an, sodass auf symbolischer Ebene die Anzahl der Löcher als Produkt von Zahlen oder Termen dargestellt werden kann (Nolte, 2008). Ausgewählte

[3] Die digitale Pinnwand wurde als Padlet von Franziska Strübbe und Nina Berlinger erstellt. Einen Zugang zum Material kann bei den Autorinnen angefragt werden.

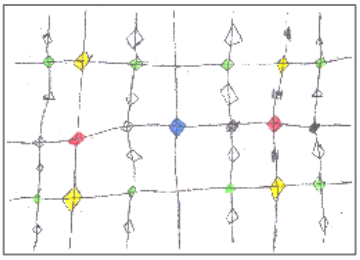
R&E-SOURCE http://journal.ph-noe.ac.at
Open Online Journal for Research and Education
Sonderausgabe Nr. 23, Juli 2022, ISSN: 2313-1640
PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

Eigenproduktionen sollen den individuellen Problemlöseprozess sowie die dabei auftretenden kindlichen Denk- und Handlungsweisen nachzeichnen und illustrieren.

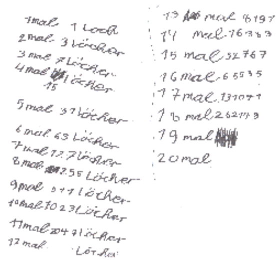
Mia ist handelnd vorgegangen. Sie hat die Falt- und Schneidevorgänge fortgesetzt und bemerkt, dass sie mit ihrer Schere gut viermal schneiden kann. Das fünfte Mal war schon deutlich aufwändiger. Danach konnte Mia mit ihrer Schere keine weiteren Schneidevorgänge durchführen oder das Papier weiter falten. Sie fasst daraufhin zusammen: „Fünf mal Falten und Schneiden geht. Aber das fünfte Mal ist schon ganz schön schwer."



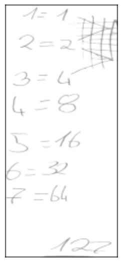
Cora hat die Faltung nicht durchgeführt, sondern sich die Faltlinien vorgestellt und eingezeichnet. Dadurch ist ein Gitternetz entstanden. An Schnittpunkten der eingezeichneten Linien markiert sie die Löcher entsprechend der Faltanzahl (1. Faltung blau, 2. Faltung rot, 3. Faltung gelb, 4. Faltung grün). Die 5. Faltung hat sie nicht mehr vollständig lösen können. Dabei entdeckt sie ein Munster. Cora bemerkt, dass es bei den nächsten Löchern immer vom vorherigen Loch nach links und rechts und dann nach oben und unten weitergeht.



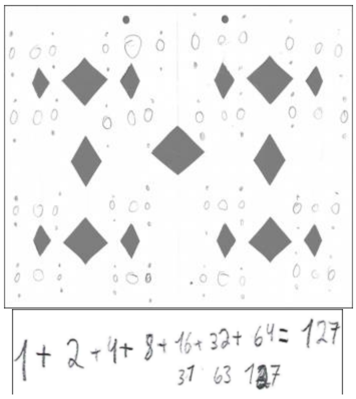
Finn überträgt das geometrische Muster auf arithmetische Ebene und notiert sich die Anzahl an Faltungen und Löchern. Er schreibt dementsprechend immer die Notiz pro Faltung: „1 mal 1 Loch", „2 mal 3 Löcher", „3 mal 7" und kann so die Anzahl von Löchern bei 18 Faltungen bestimmen. Dabei merkt er ein Zahlenmuster. Ihm wird klar, dass es einen Zusammenhang zwischen den Zahlen geben muss und überlegt, wie eine entsprechende Formel aussehen könnte, mit der der die Löcheranzahl bei einer beliebigen Anzahl an Faltungen bestimmen kann.



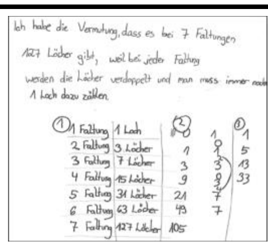
Gesa konnte sich die ersten drei Faltungen problemlos im Kopf vorstellen und nutze somit das räumliche Vorstellungsvermögen, um einen Einstieg in die Aufgabe zu bekommen. Da sie erkannte, dass sich die Zahl der pro Faltung hinzukommenden Löcher jeweils verdoppelt, wechselte sie in ihrer Bearbeitung nun auf die formal-symbolische Ebene und addierte jeweils die Anzahl der hinzukommenden Löcher. Auf diese Weise erhielt sie das Ergebnis von 127 Löchern nach der siebten Faltung. Im Anschluss überprüfte sie ihr Ergebnis auf enaktiver Ebene bis zur vierten Faltung (Berlinger, 2015).



Anton führte die ersten vier Faltungen enaktiv mit Papier und Schere aus und erkannte dabei, dass die neu hinzukommenden Löcher jeweils mit der Längs- bzw. der Querfaltung in Verbindung stehen. Er stellte sich daraufhin mental die Faltungen und die Anzahl und die Stellen der entstehenden Löcher nach der fünften, sechsten und siebten Faltung vor. Diese malte er mit einem Bleistift an den entsprechenden Stellen auf. Durch abschließendes Abzahlen der geschnittenen und gemalten Löcher kam er auf das Ergebnis von 127 Löchern. Er erkannte also auf der ikonischen Ebene die entscheidende Struktur. Auf Nachfrage einer Betreuerin zeigte Anton, dass er die Aufgabe ebenso rechnerisch auf der formal-symbolischen Ebene hätte lösen können, dass er für sich aber eine räumlich-visuelle Strategie präferierte (ebd.).



Aaron fiel es schwer, sich die Faltungen mental vorzustellen. Er bemerkte jedoch schon während der Aufgabenpräsentation eine Struktur in den Anzahlen der Löcher. Diese Struktur hielt er in Form einer Tabelle fest. Zudem formulierte er seine Entdeckung ebenfalls verbal-symbolisch: *„weil bei jeder Faltung werden die Löcher verdoppelt und man muss immer noch ein Loch dazu zählen"*. Es schien, als wenn Aaron von Beginn an einen



gewissen ‚Lösungsplan' im Kopf hatte, den er konsequent weiterverfolgte (ebd.).

Tabelle 1: Lösungen von Matheassen.

Mittels einer vergleichenden Analyse von Eigenproduktionen und Vorgehensweisen im Problemlöseprozesses kommt Käpnick (2001) zu vier Hauptstrategien, die bei Kindern während des Bearbeitens der Faltaufgabe zu beobachten sind:

- Analysieren des schrittweisen Fortsetzens der Lochmuster (z. B. Mia, Cora)
- Analysieren der Lochmuster eines Teilschrittes (z. B. Anton)
- Analysieren des schrittweisen Ergänzens von Gliedern der Zahlenfolge (z. B. Finn, Aaron)
- Wechselndes Probieren, Bilden von Vermutungen und Prüfen der Vermutung (z. B. Gesa)

Die verschiedenen Eigenproduktionen der Kinder illustrieren die vielfältigen Lösungsprozesse beim Bearbeiten offener, substanzieller Problemfelder, wodurch deren Potenziale bezüglich der Förderung und Diagnose mathematischer Begabungen deutlich werden. Durch natürlich differenzierende Aufgabenstellungen dieser Art kann der Individualität der Ausprägungen mathematikspezifischer Begabungsmerkmale und begabungsstützender Persönlichkeitseigenschaften sowie den verschiedenen Problemlösestilen in besonderem Maße entsprochen werden.

4 Fazit: Begabungen entfalten mit Faltaufgaben

Als zentralen Abschlussgedanken, der am Ende dieses Beitrags stehen soll, sei zusammengefasst: Mathematisch begabt sein heißt, begabt sein für Mathematik (Käpnick, 1998). Pädagogische Fachkräfte haben die bedeutsame Aufgabe diese Begabungen bei Kindern zur Entfaltung zu bringen. Dabei können offene, substanzielle Aufgaben, wie am Beispiel von Faltaufgaben gezeigt, eine Möglichkeit zur Begabungsentfaltung darstellen.

Literatur

Benölken, R.; Berlinger, N. & Käpnick, F. (2016). Offene substanzielle Aufgaben und Aufgabenfelder. In F. Käpnick (Hrsg.), *Verschieden verschiedene Kinder. Inklusives Fördern im Mathematikunterricht der Grundschule.* Seelze: Klett, Kallmeyer (S. 157-172).

Berlinger, N. (2015): *Die Bedeutung des räumlichen Vorstellungsvermögens für mathematische Begabungen bei Grundschulkindern. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen*. Münster: WTM.

Brüning, A.-K. (2018). *Das Lehr-Lern-Labor „Mathe für kleine Asse".* Münster: WTM.

Fuchs, M. (2015). *Alle Kinder sind Matheforscher. Frühkindliche Begabungsförderung in inklusiven Gruppen.* Seelze: Klett Kallmeyer.

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2009). *Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr.* Band 2. Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder.* Frankfurt a. M.: Lang.

Käpnick, F. (2001). *Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr*. Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (2008). „Mathe für kleine Asse" – Das Münsteraner Konzept zur Förderung mathematisch begabter Kinder. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft.* Berlin: LIT-Verlag (S. 135-148).

Käpnick, F. (2013). Theorieansätze zur Kennzeichnung des Konstrukts „Mathematische Begabung" im Wandel der Zeit. In T. Fritzlar & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven.* Münster. WTM-Verlag (S. 9-40).

Käpnick, F. (2014). Mathematische Talente erkennen und fördern. In: Stamm, M. (Hrsg.), *Handbuch Talententwicklung. Theorien, Methoden und Praxis in Psychologie und Pädagogik.* Bern: Verlag Hans Huber (S. 537-547).

Käpnick, F. & Benölken, R. (2020). *Mathematiklernen in der Grundschule.* 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Meyer, K. (2015). *Mathematisch begabte Kinder im Vorschulalter.* WTM: Münster

Nolte, M. (2008). Herausfordernde und förderliche Aufgaben für alle? Teil 1. Überlegungen zu unserem Förderkonzept. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft.* Berlin: LIT-Verlag (S. 149-161).

Sjuts, B. (2017). *Mathematisch begabte Fünft- und Sechstklässler.* WTM: Münster.