R&E-SOURCE http://journal.ph-noe.ac.at
Open Online Journal for Research and Education
Sonderausgabe Nr. 23, Juli 2022, ISSN: 2313-1640

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht anhand konkreter Beispiele

Martina Müller[1]

https://doi.org/10.53349/resource.2022.iS23.a1074

Zusammenfassung

Ausgehend von Überlegungen zum Kompetenzbegriff wird der Fokus auf Modellierungs- und Argumentationsprozesse gerichtet, da diese einen wichtigen Bestandteil eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts bilden. Anhand zweier konkreter Beispiele offener Aufgaben wird gezeigt, wie es gelingen kann, ein Lernsetting zu schaffen, in dem Schüler*innen entsprechend ihrem Kenntnisstand verschiedene Abstraktionsniveaus, Zugänge und Lösungsstrategien wählen können, um in einem selbstgesteuerten Prozess zu mathematischen Erfahrungen zu gelangen. Aufgrund des Erwerbs von Kompetenzen, die sie durch geeignete Aufgaben im Unterricht erwerben, gelingt es ihnen auf Grundlage von Wissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten auch in der neuen und offenen Situation selbstorganisiert und zielorientiert zu handeln.

Schlüsselwörter:	*Keywords:*
Mathematische Kompetenzentwicklung	Mathematical Competency Development
substanzielle Mathematikaufgaben	Rich Mathematics Tasks
alternative Unterrichtsformen	Alternative Forms of Teaching

1 Einleitung – Auseinandersetzung mit dem Begriff Kompetenz

Die Auseinandersetzung mit dem konstruktivistischen Lernansatz (Reich 2012, S. 85) führt zu einer Veränderung der Sichtweise in Bezug auf das Lernen und zu einem zweifachen Paradigmenwechsel im Mathematikunterricht. Einerseits wird Mathematiklernen als selbstgesteuerter Prozess verstanden, in dem die Lernenden ihr Wissen aktiv konstruieren sowie in ihr vorhandenes Erfahrungsnetz einbinden, und andererseits hat eine Änderung bezüglich der Lerninhalte stattgefunden. Nicht mehr die Vermittlung von reinem Sach- und Fachwissen steht im Vordergrund, sondern die Förderung von Kompetenzen, die wiederum zu neuen mathematischen Erfahrungen anregen. Kompetenzorientierter Unterricht ist zu einem Synonym für einen modernen, qualitativ hochwertigen Unterricht geworden und trägt entscheidend zur Unterrichtsentwicklung bei (Wagner & Huber 2015, S. 6). Die Lehrperson ist aufgefordert, substanzielle Aufgaben zu finden und entsprechende Lernumgebungen zu schaffen, um Schüler*innen diese Erfahrungen zu ermöglichen (Fuchs 2019, S. 72). Um den Erwerb von Kompetenzen anzuregen und optimal zu unterstützen, muss zuvor eine Auseinandersetzung seitens der Lehrpersonen mit diesem Begriff stattfinden.

Als Kompetenz wird die Fähigkeit bezeichnet, Wissen und Können so zu verbinden, dass Aufgaben den Anforderungen gemäß selbstständig, eigenverantwortlich und situationsgerecht bewältigt werden können (Weinert 2001, S. 27). Kompetente Menschen zeichnen sich dadurch aus, auch in neuen, offenen, unüberschaubaren und dynamischen Situationen selbstorganisiert und zielorientiert zu handeln (Leisen 2015, S. 2). Im Folgenden wird anhand zweier Beispiele aus dem Mathematikunterricht der Sekundarstufe I aufgezeigt, wie im Lösungsprozess einer offenen Aufgabe Kompetenzen im Tun und Handeln entwickelt und als Handlungsvoraussetzungen in verwandten Aufgaben zur Problemlösung herangezogen werden können. Der Fokus richtet sich im Folgenden vor allem auf die Kompetenz des Modellierens und Argumentierens.

[1] Pädagogische Hochschule Wien, Grenzackerstraße 18, 1100 Wien.
E-Mail: martina.mueller@phwien.ac.at

R&E-SOURCE http://journal.ph-noe.ac.at
Open Online Journal for Research and Education
Sonderausgabe Nr. 23, Juli 2022, ISSN: 2313-1640

2 Der Zylinder als Ausgangspunkt für Modellieren und Argumentieren

Das Konzept der mathematischen Grunderfahrung geht davon aus, dass Schüler*innen im Mathematikunterricht Erscheinungen aus Natur, Gesellschaft und Kultur in unserer Welt, die uns alle angehen oder angehen sollten, in einer spezifischen Art wahrnehmen und verstehen sollen (Winter 1995, S. 1). Aufgaben mit Forschungs- und Entdeckungsfragen, die die Lernenden anregen, sich mit ihrer Lebenswelt und den darin vorkommenden Objekten auseinanderzusetzen, können schon sehr früh im Unterricht eingesetzt werden. Abbildung 1 zeigt ein mögliches Beispiel zum Thema Zylinder.

Abbildung 1: Entdeckungsaufgabe Zylinder

In der Praxis hat sich gezeigt, dass die Bilder, die Schüler*innen im Rahmen dieser Aufgabe in die Schule mitbringen, äußerst vielfältig sind und von Aufnahmen aus ihrer unmittelbaren Umgebung (wie z. B. Verpackungsmaterialien, Stifte, Rohre, Getränkedosen etc.) bis hin zu Fotos von Maschinenteilen aus der Industrie oder Petrischalen und Reagenzgläsern, reichen. Durch diesen ersten Bezug zum mathematischen Objekt wird eine weitere Beschäftigung mit selbigem angeregt (Fuchs 2013, S. 110). Beobachtet man Schüler*innen bei der Beschäftigung mit der in Abbildung 1 vorgestellten Aufgabe, lassen sich die Phasen „Strukturieren – Mathematisieren und mathematisch Arbeiten“, die Blum und Leiß 2007 in ihrem Modell eines Modellierungskreislaufs festgehalten haben, erkennen (Blum & Leiß 2007, S. 225). In einem ersten Schritt wird der Übergang der Realsituation, die auf dem mitgebrachten Bild vorzufinden ist, zum Realmodell, wie dem in Abbildung 1 dargestellten Zylinder, vollzogen. Oft weisen die „Zylinder“ aus der Erfahrungswelt der Kinder Unterschiede zum mathematischen Modell auf, das beispielsweise Schrauben, Verschlüsse oder ähnliches nicht abbildet, und damit eine Vereinfachung bzw. die Auswahl relevanter Informationen darstellt. In der Phase des Mathematisierens lassen sich in diesem Zusammenhang zahlreiche Gesprächsanlässe über das Modellbilden sowie notwendige Genauigkeit und Unterschiede zwischen Realität und Modell finden. Für Schüler*innen ergeben sich durch die mitgebrachten Bilder Kommunikationsanlässe und schließlich Möglichkeiten, den Schritt von ihrer Lebenswelt in die mathematische Welt zu vollziehen. Außerdem üben sie die Verwendung von Fachsprache, verbinden Begriffe mit realen Objekten und erleben Mathematik als Teil ihrer Lebenswelt. In einem weiteren Schritt kann dann mathematisches Arbeiten erfolgen, indem die Schüler*innen modellierte Probleme mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik in der mathematischen Welt lösen. Im Anschluss daran findet wieder die Rückübersetzung in die reale Welt statt.

Die prozessbezogenen Kompetenzen des Modellbildens und Argumentierens müssen, um ihren Erwerb zu gewährleisten, regelmäßig durch die im Mathematikunterricht gestellten Aufgaben eingefordert werden. Modellbilden verlangt in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen zu erkennen, um sie dann in mathematischer Form darzustellen, allenfalls Annahmen zu treffen oder Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vorzunehmen. Argumentieren meint die Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise oder Entscheidung sprechen. Dies erfordert die Verwendung mathematischer Beziehungen und Regeln, sowie die Verwendung mathematischer Fachsprache (BIFIE & BMUKK 2015, S. 10).

Argumentieren als Tätigkeit ist tief im sozialen Wesen des Menschen verankert. Unser Wunsch nach Stimmigkeit, dem Herstellen von Konsens und Orientierung an Kriterien der Rationalität ist ohne Argumentationsprozesse in der Kommunikation nicht realisierbar (Büchter & Leuders 2002, S. 44). Im Mathematikunterricht bietet es sich an, im Rahmen von Modellierungsprozessen Handlungs- und Gesprächsanlässe zu gestalten. Durch diesen Übergang von der Realität zur Mathematik müssen Annahmen und Vereinfachungen getroffen werden, die oft mit dem Verlust einer eindeutigen Lösung einhergehen. Für einen nachhaltigen Lernprozess im oben genannten Sinne müssen die subjektiven, normativen Entscheidungen, die getroffen wurden, nachvollziehbar sein. Solche Prozesse können beispielsweise sein, dass Vereinfachungen und Annahmen transparent dargestellt werden, Ergebnisse im Licht der Modellannahmen interpretiert werden und ihre Gültigkeit dargelegt wird oder Modelle miteinander verglichen und ihre Vor- und Nachteile bewertet werden (ebd., S. 46).

3 Modellieren und Argumentieren bei offenen Aufgaben

Offene Aufgaben sind dadurch gekennzeichnet, dass sie das Interesse der Lernenden wecken, durch leicht verständliche Einstiege zur Beschäftigung mit ihnen einladen und eine reichhaltige mathematische Substanz bieten. Sie zeichnen sich durch ausreichende Komplexität und ein breites Spektrum aus, das unter Umständen auch zu fächerübergreifendem Arbeiten anregt (Käpnick & Fuchs 2004, S. 9). Das Kind kann sich entsprechend seiner Interessen und seines Kenntnisstandes mit individuellen Lösungsvorschlägen und -strategien einbringen (Fuchs 2019, S. 74). Bieten Lehrpersonen ihr Wissen inklusive Denk- und Lösungsmustern von vornherein den Lernenden an, verlieren diese zunehmend die Fähigkeit sich mit einem Thema eigenständig auseinanderzusetzen und kreative Lösungsansätze gehen leicht verloren (Käpnik et al. 2005, S. 37).

Im Folgenden wird eine Aufgabe betrachtet, die Schüler*innen einer 4. Klasse im Unterricht bearbeitet wurde. Diese wurde möglichst modellierungsanregend formuliert, um die Modellierungskompetenz zu fördern - die Fähigkeit, ein Problem in einer gegebenen Situation der realen Welt zu identifizieren, dieses in die Mathematik zu übersetzen und die Lösung des mathematischen Problems in Bezug auf die gegebenen Situation zu interpretieren und zu validieren (Niss et al. 2007, S. 12). Die Lernenden sollten sich in verschiedenen Bereichen mit dem Thema Verpackung befassen.

Die Firma Kukuruz überlegt eine neue Verpackung für Maiskörner. Jeweils 330 g sollen in eine zylinderförmige Dose aus Weißblech verpackt werden.

- Mache Vorschläge, welche Abmessungen dir geeignet erscheinen.
- Um den Materialverbrauch möglichst gering zu halten, gibt es eine bestmögliche Lösung. Vielleicht hilft dir dieses Applet beim Finden: https://www.geogebra.org/m/xB5kuev8.
- Überlege dir, welche Verpackungseinheiten* für die Lieferung in einen Supermarkt geeignet sind.

* Unter Verpackungseinheit versteht man die Zusammenfassung mehrerer Verkaufseinheiten zur besseren Handhabung.

Abbildung 2: Exemplarische Aufgabe für eine 4. Klasse (von der Autorin erstellt)

Im Unterricht fanden sich die Lernenden, ihren Interessen entsprechend, zu verschiedenen Gruppen zusammen, die jeweils unterschiedliche Aspekte der Aufgabenstellung in das Zentrum ihres Forschungsinteresses setzten.

Gruppe 1
Eine Schüler*innengruppe wandte sich mittels Internetrecherche der Erforschung möglicher Dosenformate, verschiedener Materialoptionen und deren Kosten sowie den daraus resultierenden Herstellungskosten zu.

Gruppe 2
Eine andere Gruppe erforschte die Bauweise einer Dose und zerlegte diese in ihre einzelnen Bestandteile.

R&E-SOURCE http://journal.ph-noe.ac.at
Open Online Journal for Research and Education
Sonderausgabe Nr. 23, Juli 2022, ISSN: 2313-1640

Abbildung 3: Herstellung einer Dose – Materialaufwand (von der Autorin erstellt)

Gruppe 3
Aufgrund vorangegangener Unterrichtserfahrungen zum Thema „Kreis – Umfang – Fläche“ befasste sich eine dritte Gruppe mit Berechnungsmöglichkeiten für die Zylinderoberfläche, wobei im Unterrichtsverlauf zahlreiche Interaktionen mit Gruppe 2 zu beobachten waren. Mittels GeoGebra Applet versuchte die Gruppe auch die Frage nach der optimalen Verpackung hinsichtlich des Materialaufwands, des Preises und der Füllmenge zu beantworten.

Abbildung 4: Entdeckung der Oberflächenformel eines Zylinders (von der Autorin erstellt)

Gruppe 4
Schließlich befasste sich auch eine Schüler*innengruppe mit verschiedenen Möglichkeiten, die Dosen optimal für Transport und Lagerung im Supermarkt zu verpacken. Dabei spielten Überlegungen zur Stapelung, dem Gewicht und den Abmessungen der Packungen eine Rolle.

In einer Reflexion der vorgestellten Aufgabe kann festgehalten werden, dass diese gut geeignet war, um die gewünschten Modellierungs- und Argumentationsprozesse anzustoßen und vernetzendes Üben zu fördern. Ebenso erwies sich die Aufgabe als stark selbstdifferenzierend. Weiters regte sie die Kommunikation der Schüler*innen untereinander an, bot Anlass für Präsentationen und forderte von den Lernenden, sich kritischen Rückfragen der anderen Gruppen zu stellen. Ergebnisse mussten argumentiert und begründet werden, d. h. Schüler*innen mussten möglichst lückenlos mit z. B. innermathematischer Argumentation (operativ oder induktiv) auf bereits anerkannte Aussagen zurückgreifen, um z. B. Vermutungen über mathematische Zusammenhänge abzusichern.

Aufgrund der Offenheit der Aufgabe ergibt sich natürlich eine gewisse Ungewissheit bezüglich der zu erwartenden Ergebnisse. Das bringt mit sich, dass im Unterricht mit hoher Flexibilität agiert werden muss. In der Planung muss mitgedacht werden, wie man mit etwaigen motivationalen Unterschieden bei den Schüler*innen umgeht. Die Offenheit in der Bearbeitung erfordert in weiterer Folge auch eine Anpassung in der Beurteilung.

4 Fazit

Der Einsatz von offenen, substanziellen Aufgabenstellungen ermöglicht es, Schüler*innen in ihrem Kompetenzerwerb zu unterstützen. Entsprechend ihres Kenntnisstands können sie verschiedene Abstraktionsniveaus, Zugänge und Lösungsstrategien selbst wählen, um in einem selbstgesteuerten Prozess zu mathematischen Erfahrungen zu gelangen. Ein so gestalteter, kompetenzorientierter Mathematikunterricht bietet den Schüler*innen die Möglichkeit, unterschiedliche Herangehensweisen auszuprobieren, wobei auch Irrwege und Fehler im Prozess zugelassen sind.
Bei einem solchen Vorgehen können insbesondere prozessbezogene Kompetenzen in den Bereichen Modellbilden und Argumentieren gefördert werden. Es bieten sich hier vor allem Aufgabenstellungen an, bei denen die gesamte Lerngruppe an einem Problem arbeiten kann und dieses mithilfe von konkret handelnden (Raum)erfahrungen bis zu anspruchsvollen Prozessen, wie dem Systematisieren, Begriffsbilden und Argumentieren, aufgearbeitet wird. Idealerweise können die Schüler*innen verschiedene Abstraktionsniveaus

und Lösungsstrategien selbst wählen und ihre gewonnenen Erkenntnisse in Präsentationen anderen vorstellen, wodurch exakte Sprache, Fachbegriffe aber auch das Begründen, Erklären und Argumentieren geübt werden.

Literatur

BIFIE & BMUKK (Hrsg.). (2015). Praxishandbuch für „Mathematik“, 8. Schulstufe. *Bildungsstandards Mathematik: Praxishandbücher und Themenhefte für die Grundstufe I + II*. https://www.iqs.gv.at/downloads/nationale-kompetenzerhebung/materialien-u-ikm-und-bildungsstandards/publikationen-mathematik.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Hrsg.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): education, engineering and economics* (S. 222–231).

Büchter, A., Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern-Leistung überprüfen.* Cornelsen Scriptor Berlin.

Fuchs, M. (2013). Vorgehensweisen mathematisch potenziell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Empirische Untersuchungen zur Typisierung spezifischer Problemlösestile. In: *mathematica didactica* 36 (S. 97–125).

Fuchs, M. (2019). *Alle Kinder sind Matheforscher. Frühkindliche Begabungsförderung in heterogenen Gruppen*. 2. Auflage. Kallmeyer Klett Hannover.

Käpnick, F. (Hrsg.), Fuchs, M. (2004). *Mathe für kleine Asse. Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Erst- und Zweitklässler*. Volk und Wissen & Cornelsen Berlin.

Käpnick, F., Nolte, M., Walther, G. (2005). *Talente entdecken und unterstützen*. Publikation des Programms SINUS-Transfer Grundschule. Programmträger: Leibnitz Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik an der Universität Kiel.

Leisen, J. (2015). *Jetzt sollen wir im Unterricht Kompetenzen machen, wie geht das? – Die Kompetenzorientierung im Unterricht*. https://www.schulentwicklung.nrw.de/q/upload/Ganztag/Leisen_Kompetenorientierung.pdf

Niss, M., Blum, W., Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Hrsg.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (Bd. 10, S. 3–32). Springer Boston.

Reich, K. (2012). *Konstruktivistische Didaktik*. Das Lehr- und Studienbuch mit Online-Methodenpool. 5. Auflage. Beltz Weinheim Basel.

Wagner, G., Huber, W. (2015). *Kompetenzorientierten Unterricht differenziert gestalten. Anregungen für Lehrerinnen und Lehrer der Sekundarstufe*. https://www.oezbf.at/wp-content/uploads/2018/03/Kompetenzorienten-Unterricht-differenziert-gestalten_-GW_WH_Juni_2015_oezbf.pdf

Weinert, F.E. (2001). *Leistungsmessungen in Schulen*. Beltz Weinheim.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, (61), (S. 37–46). https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/69