Verschiedene Zugänge zur Zahl e

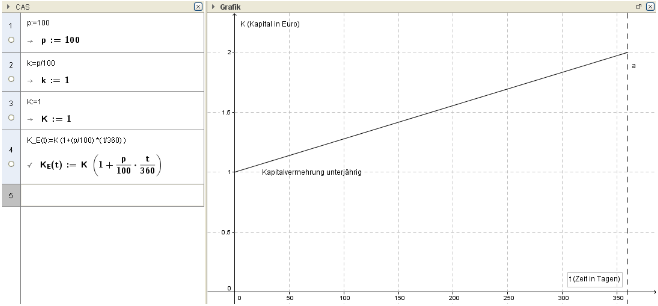
Dr. Josef Lechner

Technology in Mathematics Education
Krems, 4.Juli 2014

Leonhard Euler (1707-1783)

$$e = 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\,47093\,69995$$
$$95749\,66967\,62772\,40766\,30353\,54759\,45713\,82178\,52516\,64274$$
$$27466\,39193\,20030\,59921\,81741\,35966\,29043\,57290\,03342\,95260$$
$$59563\,07381\,32328\,62794\,34907\,63233\,82988\,07531\,95251\,01901\ldots$$

Die unterjährige Verzinsung: ein lineares Modell



Link: Modell 1

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Steigerung der Verzinsungsperioden mit gleichbleibendem Zinssatz

Stellen wir uns vor, wir finden eine Bank, die p%= 100% Zinsen gibt: nach einem Jahr werden aus einem Euro zwei Euro.

$$K_{1a} = 1 \cdot (1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{360}{360}) = 1 \cdot (1 + 1) = 2$$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Steigerung der Verzinsungsperioden mit gleichbleibendem Zinssatz

Stellen wir uns vor, wir finden eine Bank, die p%= 100% Zinsen gibt: nach einem Jahr werden aus einem Euro zwei Euro.

$$K_{1a} = 1 \cdot (1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{360}{360}) = 1 \cdot (1 + 1) = 2$$

Dessen nicht genug, wollen wir die Geschäftsbedingungen ausreizen und heben nach einem Jahr den angelaufenen Betrag (das sind 1,5) ab und legen ihn sofort wieder ein.

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Steigerung der Verzinsungsperioden mit gleichbleibendem Zinssatz

Stellen wir uns vor, wir finden eine Bank, die p%= 100% Zinsen gibt: nach einem Jahr werden aus einem Euro zwei Euro.

$$K_{1a} = 1 \cdot (1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{360}{360}) = 1 \cdot (1 + 1) = 2$$

Dessen nicht genug, wollen wir die Geschäftsbedingungen ausreizen und heben nach einem Jahr den angelaufenen Betrag (das sind 1,5) ab und legen ihn sofort wieder ein. Dann bekommen wir für das verbleibende Jahr noch 50% Zinsen für $K_{0,5a} = 1,5$, also:

$$K_{1a} = K_{0,5a} \cdot (1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{180}{360}) = K_{0,5a} \cdot (1 + \frac{1}{2}) = 1,5 \cdot 1,5 = 2.25$$

oder

$$K_{1a} = 1 \cdot (1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{180}{360})^2 = 1 \cdot (1 + \frac{1}{2})^2 = 2,25$$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Steigerung der Verzinsungsperioden mit gleichbleibendem Zinssatz

Das können wir iterieren:

Steigerung der Verzinsungsperioden mit gleichbleibendem Zinssatz

Das können wir iterieren:

ganzjährlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1 + 1) = 2$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Steigerung der Verzinsungsperioden mit gleichbleibendem Zinssatz

Das können wir iterieren:

ganzjährlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1 + 1) = 2$

halbjährlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{2})^2 = 2,25$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Steigerung der Verzinsungsperioden mit gleichbleibendem Zinssatz

Das können wir iterieren:

ganzjährlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1 + 1) = 2$

halbjährlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{2})^2 = 2,25$

monatlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{12})^{12} \approx 2,61304$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Steigerung der Verzinsungsperioden mit gleichbleibendem Zinssatz

Das können wir iterieren:

ganzjährlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1+1) = 2$

halbjährlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1+\frac{1}{2})^2 = 2,25$

monatlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1+\frac{1}{12})^{12} \approx 2,61304$

stündlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1+\frac{1}{8760})^{8760} \approx 2,71813$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Steigerung der Verzinsungsperioden mit gleichbleibendem Zinssatz

Das können wir iterieren:

ganzjährlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1 + 1) = 2$

halbjährlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{2})^2 = 2,25$

monatlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{12})^{12} \approx 2,61304$

stündlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{8760})^{8760} \approx 2,71813$

sekündlich: $K_{1a} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{31536000})^{31536000} \approx 2,71828$

...

Link: Modell 2a

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Übergang zur stetigen Verzinsung

... ist nur mittels Grenzübergang möglich!

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2,718281828\ldots$$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Übergang zur stetigen Verzinsung

... ist nur mittels Grenzübergang möglich!

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,718281828\ldots$$

Wie können wir von einem diskreten zu einem kontinuierlichen Prozess übergehen?

Link: Modell 2b

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Grenzwert

Die Euler'sche Zahl als Grenzwert

Die Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ konvergiert gegen $e = 2,718281828...$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Grenzwert

Die Euler'sche Zahl als Grenzwert

Die Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ konvergiert gegen $e = 2,718281828...$

Begründung durch Intervallschachtelung:

Wir zeigen dass

die Folge $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ streng monoton wächst (linke Intervallgrenzen),

die Folge $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ streng monoton fallend ist (rechte Intervallgrenzen).

Weiters ist jedes beliebige Folgenglied b_n eine obere Schranke für alle Folgenglieder von a_n.
Da nun $c_n = b_n = a_n$ (=Intervallbreite) eine Nullfolge bildet, wird damit genau eine reelle Zahl (=e) festgelegt.

Link: Intervallschachtelung

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert existiert

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist streng monoton wachsend:

Um zu zeigen, dass eine Folge streng monoton wachsend ist, können wir auch zeigen, dass das Verhältnis $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ist.

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert existiert

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist streng monoton wachsend:

Um zu zeigen, dass eine Folge streng monoton wachsend ist, können wir auch zeigen, dass das Verhältnis $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ist.

Diese Verhältnis formen wir zunächst um:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} : (1 + \frac{1}{n})^n = (\frac{n+2}{n+1})^{n+1} \cdot (\frac{n}{n+1})^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot (\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot (1 - \frac{1}{n^2+2n+1)})^n$$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert existiert

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist streng monoton wachsend:

Um zu zeigen, dass eine Folge streng monoton wachsend ist, können wir auch zeigen, dass das Verhältnis $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ist.

Diese Verhältnis formen wir zunächst um:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} : (1 + \frac{1}{n})^n = (\frac{n+2}{n+1})^{n+1} \cdot (\frac{n}{n+1})^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot (\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot (1 - \frac{1}{n^2+2n+1)})^n$$

Nun können wir nach der Bernoulli-Ungleichung $(1-a)^n > 1 - n \cdot a$
den letzten Term folgendermaßen abschätzen: $(1 - \frac{1}{n^2+2n+1})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2+2n+1}$

Der Grenzwert existiert

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist streng monoton wachsend:

Um zu zeigen, dass eine Folge streng monoton wachsend ist, können wir auch zeigen, dass das Verhältnis $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ist.

Diese Verhältnis formen wir zunächst um:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} : (1 + \frac{1}{n})^n = (\frac{n+2}{n+1})^{n+1} \cdot (\frac{n}{n+1})^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot (\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot (1 - \frac{1}{n^2+2n+1)})^n$$

Nun können wir nach der Bernoulli-Ungleichung $(1-a)^n > 1 - n \cdot a$ den letzten Term folgendermaßen abschätzen: $(1 - \frac{1}{n^2+2n+1})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2+2n+1}$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot (1 - \frac{1}{n^2+2n+1})^n \geq \frac{n+2}{n+1} \cdot (1 - \frac{n}{n^2+2n+1}) =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} = \frac{(n^3+3n^2+3n+1)+1}{n^3+3n^2+3n+1} = 1 + \frac{1}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert existiert

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ist streng monoton fallend:

Um zu zeigen, dass eine Folge streng monoton fallend ist, können wir auch zeigen, dass das Verhältnis $\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$ ist.

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert existiert

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ist streng monoton fallend:

Um zu zeigen, dass eine Folge streng monoton fallend ist, können wir auch zeigen, dass das Verhältnis $\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$ ist.

Diese Verhältnis formen wir zunächst um:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} : (1 + \frac{1}{n-1})^n = (\frac{n+1}{n})^{n+1} \cdot (\frac{n-1}{n})^n = \frac{n+1}{n} \cdot (\frac{n^2-1}{n^2})^n =$$

$$= \frac{n+1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{n^2)})^n$$

Der Grenzwert existiert

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ist streng monoton fallend:

Um zu zeigen, dass eine Folge streng monoton fallend ist, können wir auch zeigen, dass das Verhältnis $\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$ ist.

Diese Verhältnis formen wir zunächst um:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} : (1 + \frac{1}{n-1})^n = (\frac{n+1}{n})^{n+1} \cdot (\frac{n-1}{n})^n = \frac{n+1}{n} \cdot (\frac{n^2-1}{n^2})^n =$$

$$= \frac{n+1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{n^2)})^n$$

Nun können wir wieder nach der Bernoulli-Ungleichung $(1 - a)^n > 1 - n \cdot a$ den letzten Term folgendermaßen abschätzen:

$(1 - \frac{1}{n^2})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2}$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert existiert

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ist streng monoton fallend:

Um zu zeigen, dass eine Folge streng monoton fallend ist, können wir auch zeigen, dass das Verhältnis $\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$ ist.

Diese Verhältnis formen wir zunächst um:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} : (1 + \frac{1}{n-1})^n = (\frac{n+1}{n})^{n+1} \cdot (\frac{n-1}{n})^n = \frac{n+1}{n} \cdot (\frac{n^2-1}{n^2})^n =$$
$$= \frac{n+1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{n^2)})^n$$

Nun können wir wieder nach der Bernoulli-Ungleichung $(1 - a)^n > 1 - n \cdot a$ den letzten Term folgendermaßen abschätzen:

$(1 - \frac{1}{n^2})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2}$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{n^2})^n \geq \frac{n+1}{n} \cdot (1 - \frac{n}{n^2}) =$$
$$= \frac{n+1}{n} \cdot (1 - \frac{n}{n^2}) = \frac{n+1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{n}) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} < 1$$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert existiert

Jedes Folgenglied von $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ist eine obere Schranke jedes beliebigen Folgenglieds von a_n:

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert existiert

Jedes Folgenglied von $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ist eine obere Schranke jedes beliebigen Folgenglieds von a_n:

Es ist $a_n < a_n \cdot (1 + \frac{1}{n}) = b_n$

Es gilt aber noch allgemeiner $a_m \leq b_n \quad \forall m, n$.

Falls $m < n$, gilt wegen Monotonie der a-Folge: $a_m \leq a_n \leq b_n$.

Falls $m > n$, gilt wegen der Monotonie der b-Folge: $a_m \leq b_m \leq b_n$.

Damit gilt also stets: $a_m \leq b_n \quad \forall m, n$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert existiert

Die Folge $c_n = b_n - a_n$ ist streng monoton fallend und bildet eine Nullfolge.

Wegen der Monotonie der beiden Folgen gilt:

$$c_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - (b_n - b_{n+1}) - a_n - (a_{n+1} - a_n) =$$
$$= c_n - (b_n - b_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) \leq c_n$$

Damit ist also die c-Folge fallend.

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert existiert

Die Folge $c_n = b_n - a_n$ ist streng monoton fallend und bildet eine Nullfolge.

Wegen der Monotonie der beiden Folgen gilt:

$$c_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - (b_n - b_{n+1}) - a_n - (a_{n+1} - a_n) =$$
$$= c_n - (b_n - b_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) \leq c_n$$

Damit ist also die c-Folge fallend.

Schließlich gilt $c_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n \cdot (1 + \frac{1}{n} - 1) = (1 + \frac{1}{n})^n \cdot \frac{1}{n}$

Der erste Faktor strebt für $n \to \infty$ gegen e, der zweite nach 0 und damit geht das Produkt ebenfalls 0.

Geschafft!

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert ist irrational

Die Euler'sche Zahl e ist irrational.

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert ist irrational

Die Euler'sche Zahl e ist irrational.

Begründung:

Wir starten mit der von Euler stammenden Darstellung der Zahl e als Reihe.

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Der Grenzwert ist irrational

Die Euler'sche Zahl e ist irrational.

Begründung:

Wir starten mit der von Euler stammenden Darstellung der Zahl e als Reihe.

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Wir nehmen nun an, die reelle Euler'sche Zahl e sei rational. Dann ließe sie sich als vollständig gekürzter Bruch $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ darstellen. Da $2 < e < 3$, ist e keine ganze Zahl, und somit ist $q > 1$.

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert ist irrational

Die Euler'sche Zahl e ist irrational.

Begründung:

Wir starten mit der von Euler stammenden Darstellung der Zahl e als Reihe.

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Wir nehmen nun an, die reelle Euler'sche Zahl e sei rational. Dann ließe sie sich als vollständig gekürzter Bruch $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ darstellen. Da $2 < e < 3$, ist e keine ganze Zahl, und somit ist $q > 1$.

Wir multiplizieren die Reihenentwicklung mit $q!$, womit wir diese neue Reihe erhalten:

$$\underbrace{q! \cdot e}_{\in\mathbb{N}} = \underbrace{\frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!}}_{a\in\mathbb{N}} + \underbrace{\frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \cdots}_{0<b<1}$$

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert ist irrational

Linke Seite

Es ist $q! \cdot e = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)! \cdot p \in \mathbb{N}$, da nach Voraussetzung $p, q \in \mathbb{N}$.

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert ist irrational

Linke Seite

Es ist $q! \cdot e = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)! \cdot p \in \mathbb{N}$, da nach Voraussetzung $p, q \in \mathbb{N}$.

Rechte Seite, erste Teilsumme

Die Glieder $q!$ bis $\frac{q!}{q!} = 1$ auf der rechten Seite der Gleichung sind ebenfalls alle natürlich, da alle Nenner $1!$ bis $q!$ Teiler des Zählers $q!$ sind. Die Summe dieser natürlichen Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl.

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert ist irrational

Linke Seite

Es ist $q! \cdot e = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)! \cdot p \in \mathbb{N}$, da nach Voraussetzung $p, q \in \mathbb{N}$.

Rechte Seite, erste Teilsumme

Die Glieder $q!$ bis $\frac{q!}{q!} = 1$ auf der rechten Seite der Gleichung sind ebenfalls alle natürlich, da alle Nenner $1!$ bis $q!$ Teiler des Zählers $q!$ sind. Die Summe dieser natürlichen Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl.

Rechte Seite, zweite Teilsumme

Die Summe aller Glieder, vom Glied $\frac{q!}{(q+1)!}$ ist größer 0, da alle Zähler und Nenner von null verschieden und positiv sind, und zudem kleiner 1, wie folgende Überlegung zeigt:
Das erste Glied ist
$\frac{q!}{(q+1)!} = \frac{1}{q+1} \leq \frac{1}{3}$, da $q > 1$, das zweite Glied ist $\frac{q!}{(q+2)!} = \frac{1}{(q+1)(q+2)} \leq \frac{1}{9}$, das dritte Glied ist $\leq \frac{1}{27}$, etc.
Die Summe dieser oberen Schranken ist eine unendliche, konvergierende geometrische Reihe :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Für die zweite Teilsumme b gilt also $0 < b < 1$, daher ist b keine natürliche Zahl.

Widerspruch!

Zugang 1: Die stetige Verzinsung

Der Grenzwert ist transzendent

Die Euler'sche Zahl e ist transzendent.

Der Grenzwert ist transzendent

Die Euler'sche Zahl e ist transzendent.

Begründung:

Dass e transzendent ist, ist ebenfalls indirekt beweisbar, aber komplizierter und wurde erstmals 1873 von Charles Hermite (1822-1901) geführt.

Siehe z.B.

- Link: Transzendenz von e und pi (Beweisarchiv Wikibooks) oder ausführlicher
- Link: Stephan Wojtowytsch, Uni Heidelberg

Zugang 2: Ein Wachstumsmodell

Die Steigerung der Verzinsungsperioden bei gleichbleibendem Endkapital

Herleitung des Zusammenhangs zwischen der auf die Einheit bezogenen Zuwachsrate k_1 und der auf das Zeitintervall Δt bezogenen Zuwachsrate $k_{\Delta t}$ durch Verfeinerung der Schrittweite beim diskreten Wachstumsmodell:

$$\Delta t = 1: \qquad y_{n+1} - y_n = k_1 \cdot y_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n + k_1 \cdot y_n = y_n \cdot (1 + k_1)$$

$$\Delta t < 1: \qquad \frac{y_{n+\Delta t} - y_n}{\Delta t} = k_{\Delta t} \cdot y_n \Rightarrow y_{n+\Delta t} = y_n + k_{\Delta t} \cdot y_n \cdot \Delta t = y_n \cdot (1 + k_{\Delta t} \cdot \Delta t)$$

Zugang 2: Ein Wachstumsmodell

Die Steigerung der Verzinsungsperioden bei gleichbleibendem Endkapital

Herleitung des Zusammenhangs zwischen der auf die Einheit bezogenen Zuwachsrate k_1 und der auf das Zeitintervall Δt bezogenen Zuwachsrate $k_{\Delta t}$ durch Verfeinerung der Schrittweite beim diskreten Wachstumsmodell:

$$\Delta t = 1: \qquad y_{n+1} - y_n = k_1 \cdot y_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n + k_1 \cdot y_n = y_n \cdot (1 + k_1)$$

$$\Delta t < 1: \qquad \frac{y_{n+\Delta t} - y_n}{\Delta t} = k_{\Delta t} \cdot y_n \Rightarrow y_{n+\Delta t} = y_n + k_{\Delta t} \cdot y_n \cdot \Delta t = y_n \cdot (1 + k_{\Delta t} \cdot \Delta t)$$

Bei einer Schrittweite von $\Delta t < 1$ sind dann in einer Zeiteinheit $n = \frac{1}{\Delta t}$ Schritte möglich:

$$y_n \cdot (1 + k_1) = y_n \cdot (1 + k_{\Delta t} \cdot \Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}}$$

$$(1 + k_1) = (1 + k_{\Delta t} \cdot \Delta t)^{\frac{1}{\Delta t}}$$

$$(1 + k_1)^{\Delta t} = (1 + k_{\Delta t} \cdot \Delta t)$$

$$k_{\Delta t} = \frac{(1 + k_1)^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$$

Link: Modell 2c

Der Übergang zum stetigen Wachstumsmodell

Wir also ausgegangen vom diskreten Wachstumsmodell:

$$y_{n+\Delta t} = y_n \cdot (1 + k_{\Delta t} \cdot \Delta t)$$

und haben für die auf den Zeitschritt Δt bezogene Zuwachsrate erhalten:

$$k_{\Delta t} = \frac{(1+k_1)^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$$

Mit $q = 1 + k_1$ können wir schreiben:

$$k_{\Delta t} = \frac{q^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$$

Die momentane Zuwachsrate λ erhalten wir (nur!) über einen Grenzwert:

$$\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} k_{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = ?$$

Mit $n = \frac{1}{\Delta t}$ bzw. $\Delta t = \frac{1}{n}$ können wir umformen auf die Folge:

$$k_{\Delta t} = k_{\frac{1}{n}} = \frac{q^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = n \cdot (\sqrt[n]{q} - 1)$$

Für $q = 2$ müssen sich also den folgenden Grenzwert ermitteln:

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} (n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1))$$

Zugang 2: Ein Wachstumsmodell

Der Übergang zum stetigen Wachstumsmodell

CAS

1	Grenzwert[(q^Δt-1)/Δt,Δt,0]
	✓ $\text{Grenzwert}\left[\frac{q^{\Delta t}-1}{\Delta t}, \Delta t, 0\right]$
2	Grenzwert[(q^Δt - 1) / Δt,Δt,0]
	→ $\ln(q)$
3	Grenzwert(n*(q^(1/n)-1),n,inf)
	✓ $\text{Grenzwert}\left[n\left(q^{\frac{1}{n}}-1\right), n, \infty\right]$
4	Grenzwert[n (q^(1 / n) - 1),n,∞]
	→ $\ln(q)$
5	Grenzwert(n*(2^(1/n)-1),n,inf)
	✓ $\text{Grenzwert}\left[n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right), n, \infty\right]$
6	Grenzwert[n (2^(1 / n) - 1),n,∞]
	→ $\ln(2)$
7	ln(2)
	≈ 0.6931471806

Potenzen mit natürlichen Exponenten

$q^1, q^2, q^3, \ldots$

Einschub: Die Konstruktion der Exponentialfunktion

Potenzen mit natürlichen Exponenten

$q^1, q^2, q^3, \ldots$

Potenzen mit ganzen Exponenten

q^0

$q^{-1}, q^{-2}, q^{-3}, \ldots$

Potenzen mit natürlichen Exponenten

$q^1, q^2, q^3, \ldots$

Potenzen mit ganzen Exponenten

q^0

$q^{-1}, q^{-2}, q^{-3}, \ldots$

Potenzen mit rationalen Exponenten

$q^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{4}{3}}, q^{-\frac{2}{5}}, \ldots$

Einschub: Die Konstruktion der Exponentialfunktion

Potenzen mit natürlichen Exponenten

$q^1, q^2, q^3, \ldots$

Potenzen mit ganzen Exponenten

q^0

$q^{-1}, q^{-2}, q^{-3}, \ldots$

Potenzen mit rationalen Exponenten

$q^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{4}{3}}, q^{-\frac{2}{5}}, \ldots$

Potenzen mit reellen Exponenten

Potenzen mit natürlichen Exponenten

$q^1, q^2, q^3, \ldots$

Potenzen mit ganzen Exponenten

q^0

$q^{-1}, q^{-2}, q^{-3}, \ldots$

Potenzen mit rationalen Exponenten

$q^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{4}{3}}, q^{-\frac{2}{5}}, \ldots$

Potenzen mit reellen Exponenten

... und wieder ist ein Grenzübergang notwendig

$q^{\sqrt{2}}$

Einschub: Die Konstruktion der Exponentialfunktion

Für jedes $q > 0$ hat die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = q^x$ folgende Eigenschaften:

- $f(1) = q$.
- $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.
- $f(x)$ ist stetig.
- $f(x)$ ist monoton; streng monoton wachsend für $q > 1$, konstant 1 für $q = 1$ und streng monoton fallend für $q < 1$.
- Für $q > 1$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
- Wenn $g(x) = \frac{1}{q}$, so gilt $g(x) = f(-x)$.

Einschub: Die Konstruktion der Exponentialfunktion

Für jedes $q > 0$ hat die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = q^x$ folgende Eigenschaften:

- $f(1) = q$.
- $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.
- $f(x)$ ist stetig.
- $f(x)$ ist monoton; streng monoton wachsend für $q > 1$, konstant 1 für $q = 1$ und streng monoton fallend für $q < 1$.
- Für $q > 1$ ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
- Wenn $g(x) = \frac{1}{q}$, so gilt $g(x) = f(-x)$.

Erfüllt umgekehrt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen:

- $f(x) \neq 0$ für wenigstens ein $x \in \mathbb{R}$.
- $f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \qquad \forall x, y, \in \mathbb{R}$.
- f ist stetig an wenigstens einem Punkt von $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dann ist $q := f(1) > 0$ und $f(x) = q^x$

Die verschiedenen Formen der Exponentialfunktion

Aus der folgenden Umformung ergeben sind die verschiedenen Darstellungen der Exponentialfunktion:

$$1 + \frac{p}{100} = 1 + k_1 = q = e^{\ln(q)} = e^{\lambda} = e^{\frac{\ln 2}{\tau}}$$

Die verschiedenen Formen der Exponentialfunktion

Aus der folgenden Umformung ergeben sind die verschiedenen Darstellungen der Exponentialfunktion:

$$1 + \frac{p}{100} = 1 + k_1 = q = e^{\ln(q)} = e^{\lambda} = e^{\frac{\ln 2}{\tau}}$$

$$f(x) = c \cdot (1 + \frac{p}{100})^x = f(0) \cdot (1 + \frac{p}{100})^x$$

Die verschiedenen Formen der Exponentialfunktion

Aus der folgenden Umformung ergeben sind die verschiedenen Darstellungen der Exponentialfunktion:

$$1 + \frac{p}{100} = 1 + k_1 = q = e^{\ln(q)} = e^{\lambda} = e^{\frac{\ln 2}{\tau}}$$

$$f(x) = c \cdot (1 + \tfrac{p}{100})^x = f(0) \cdot (1 + \tfrac{p}{100})^x$$
$$f(x) = c \cdot (1 + k_1)^x = f(0) \cdot (1 + k_1)^x$$

Die verschiedenen Formen der Exponentialfunktion

Aus der folgenden Umformung ergeben sind die verschiedenen Darstellungen der Exponentialfunktion:

$$1 + \frac{p}{100} = 1 + k_1 = q = e^{\ln(q)} = e^{\lambda} = e^{\frac{\ln 2}{\tau}}$$

$$f(x) = c \cdot (1 + \tfrac{p}{100})^x = f(0) \cdot (1 + \tfrac{p}{100})^x$$
$$f(x) = c \cdot (1 + k_1)^x = f(0) \cdot (1 + k_1)^x$$
$$f(x) = c \cdot q^x = f(0) \cdot q^x$$

Aus der folgenden Umformung ergeben sind die verschiedenen Darstellungen der Exponentialfunktion:

$$1 + \frac{p}{100} = 1 + k_1 = q = e^{\ln(q)} = e^{\lambda} = e^{\frac{\ln 2}{\tau}}$$

$$f(x) = c \cdot (1 + \frac{p}{100})^x = f(0) \cdot (1 + \frac{p}{100})^x$$
$$f(x) = c \cdot (1 + k_1)^x = f(0) \cdot (1 + k_1)^x$$
$$f(x) = c \cdot q^x = f(0) \cdot q^x$$
$$f(x) = c \cdot e^{\ln(q) \cdot x} = f(0) \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$$

Die verschiedenen Formen der Exponentialfunktion

Aus der folgenden Umformung ergeben sind die verschiedenen Darstellungen der Exponentialfunktion:

$$1 + \frac{p}{100} = 1 + k_1 = q = e^{\ln(q)} = e^{\lambda} = e^{\frac{\ln 2}{\tau}}$$

$$f(x) = c \cdot (1 + \tfrac{p}{100})^x = f(0) \cdot (1 + \tfrac{p}{100})^x$$
$$f(x) = c \cdot (1 + k_1)^x = f(0) \cdot (1 + k_1)^x$$
$$f(x) = c \cdot q^x = f(0) \cdot q^x$$
$$f(x) = c \cdot e^{\ln(q) \cdot x} = f(0) \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$$
$$f(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x} = f(0) \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

Die verschiedenen Formen der Exponentialfunktion

Aus der folgenden Umformung ergeben sind die verschiedenen Darstellungen der Exponentialfunktion:

$$1 + \frac{p}{100} = 1 + k_1 = q = e^{\ln(q)} = e^{\lambda} = e^{\frac{\ln 2}{\tau}}$$

$$f(x) = c \cdot (1 + \tfrac{p}{100})^x = f(0) \cdot (1 + \tfrac{p}{100})^x$$
$$f(x) = c \cdot (1 + k_1)^x = f(0) \cdot (1 + k_1)^x$$
$$f(x) = c \cdot q^x = f(0) \cdot q^x$$
$$f(x) = c \cdot e^{\ln(q) \cdot x} = f(0) \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$$
$$f(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x} = f(0) \cdot e^{\lambda \cdot x}$$
$$f(x) = c \cdot e^{\frac{\ln 2}{\tau} \cdot x} = f(0) \cdot e^{\frac{\ln 2}{\tau} \cdot x}$$

Link: Exponentialfunktion 1
Link: Exponentialfunktion 2

Das Wesentliche an der Exponentialfunktion

- Geometrisch: Bei welcher Basis ist die Steigung gleich dem Funktionswert?

Link: Erkundung
Link: Exponentialfunktion

Das Wesentliche an der Exponentialfunktion

- Geometrisch: Bei welcher Basis ist die Steigung gleich dem Funktionswert?
- Systemdynamisch: Bei welcher Basis ist die momentane Änderung gleich dem aktuellen Bestand?

Link: Erkundung
Link: Exponentialfunktion

Das Wesentliche an der Exponentialfunktion

- Geometrisch: Bei welcher Basis ist die Steigung gleich dem Funktionswert?
- Systemdynamisch: Bei welcher Basis ist die momentane Änderung gleich dem aktuellen Bestand?
- Funktional: Bei welcher Basis ist die Ableitungsfunktion gleich der Funktion?

Link: Erkundung
Link: Exponentialfunktion

Der Kern der Sache: Eine vernünftige Grundvorstellung von der Exponentialfunktion

„Die natürliche Exponentialfunktion ist mir ihrer eigenen Ableitung identisch.

Dies ist die eigentliche Quelle aller Eigenschaften der Exponentialfunktion und die wahre Ursache ihrer Bedeutung für die Anwendungen."

- Richard Courant und Herbert Robbins, Was ist Mathematik? (1962)

Die verschiedenen Änderungsmaße

Neben ausreichenden Grundvorstellungen und Kenntnissen vom Grenzwert sind solche von den Änderungsmaßen unabdingbare Voraussetzungen für einen erfolgreichen Einstieg in die Differential- (und auch Integral-)rechnung.

Zugang 3: Die Änderungsmaße

Änderung der Bestandswerte (im betrachteten Intervall)

Die absolute Änderung

$$f(x+\Delta x) - f(x)$$

Beispiel:

$$f(x+1) - f(x) = c \cdot q^{x+1} - c \cdot q^x = c \cdot q^x \cdot (q-1) = f(x) \cdot (q-1)$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = c \cdot q^{x+\Delta x} - c \cdot q^x = c \cdot q^x \cdot (q^{\Delta x} - 1) = f(x) \cdot (q^{\Delta x} - 1)$$

Zugang 3: Die Änderungsmaße

Neuer Bestand bezogen auf den aktuellen(alten) Bestand

Änderungsfaktor

$$\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}$$

Beispiel:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{c \cdot q^{x+1}}{c \cdot q^{x}} = q$$

$$\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)} = \frac{c \cdot q^{x+\Delta x}}{c \cdot q^{x}} = q^{\Delta x}$$

Zugang 3: Die Änderungsmaße

Neuer Bestand bezogen auf den alten Bestand in Prozent

Prozentuelle Änderung

$$\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)} \cdot 100$$

= Änderungsfaktor in Prozent ausgedrückt

Absolute Bestandsänderung bezogen auf den aktuellen (alten) Bestand

Relative Änderungsrate

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+\Delta x)}{f(x)} - \frac{f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+\Delta x)}{f(x)} - 1$$

Beispiel:

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)} = \frac{c\cdot q^{x+1}-c\cdot q^x}{c\cdot q^x} = q-1$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)} = \frac{c\cdot q^{x+\Delta x}-c\cdot q^x}{c\cdot q^x} = q^{\Delta x}-1$$

Zugang 3: Die Änderungsmaße

Absolute Bestandsänderung bezogen auf die Intervallbreite

Mittlere Änderung(srate)

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Beispiel:

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{1} = \frac{c\cdot q^{x+1}-c\cdot q^x}{1} = c\cdot q^x\cdot(q-1) = f(x)\cdot(q-1)$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{c\cdot q^{x+\Delta x}-c\cdot q^x}{\Delta x} = \frac{c\cdot q^x\cdot(q^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = f(x)\cdot\frac{q^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

Link: Änderungsmaße

Zugang 3: Die Änderungsmaße

Grenzwert der mittleren Änderung für unbegrenzt kleine Intervallbreite

Momentane Änderung(srate)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Beispiel:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \frac{q^{\Delta x}-1}{\Delta x} = f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{q^{\Delta x}-1}{\Delta x} = ?$$

Zugang 3: Die Änderungsmaße

Momentane Änderung(srate) - Herleitung 1

Betrachten wir den Spezialfall $q = e$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = ?$

Zugang 3: Die Änderungsmaße

Momentane Änderung(srate) - Herleitung 1

Betrachten wir den Spezialfall $q = e$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = ?$

Schranken für e^x:

$1 + x \leq e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^x \leq \frac{1}{1-x}$ für $x < 1$

Zugang 3: Die Änderungsmaße

Momentane Änderung(srate) - Herleitung 1

Betrachten wir den Spezialfall $q = e$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = ?$

Schranken für e^x:

$1 + x \leq e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^x \leq \frac{1}{1-x}$ für $x < 1$

Aus den Schranken für e^x folgt für $\Delta x < 1$:

$1 + \Delta x \leq e^{\Delta x} \leq \frac{1}{1-\Delta x} | \ -1$

$\Delta x \leq e^{\Delta x} - 1 \leq \frac{\Delta x}{1-\Delta x}$

Momentane Änderung(srate) - Herleitung 1

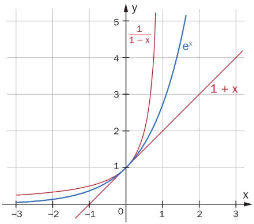
Betrachten wir den Spezialfall $q = e$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = ?$

Schranken für e^x:

$$1 + x \leq e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \text{ für } x < 1$$

Aus den Schranken für e^x folgt für $\Delta x < 1$:

$$1 + \Delta x \leq e^{\Delta x} \leq \frac{1}{1-\Delta x} \Big| -1$$
$$\Delta x \leq e^{\Delta x} - 1 \leq \frac{\Delta x}{1-\Delta x}$$



Fall 1: Falls $0 \leq \Delta x \leq 1$ erhalten wir durch Division durch Δx:

$$1 \leq \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} \leq \frac{1}{1-\Delta x}$$
$$\frac{1}{1-\Delta x} \leq \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} \leq 1$$

Der mittlere Term ist somit eingeschrankt zwischen 1 und $\frac{1}{1-\Delta x}$, der für $\Delta x \to 0$ ebenfalls 1 wird.
Damit ergibt sich schließlich: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$ und damit ist wieder

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x$$

Zugang 3: Die Änderungsmaße

Momentane Änderung(srate) - Herleitung 1

Betrachten wir den Spezialfall $q = e$: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = ?$

Schranken für e^x:

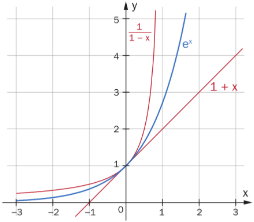
$$1 + x \leq e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \text{ für } x < 1$$

Aus den Schranken für e^x folgt für $\Delta x < 1$:

$$1 + \Delta x \leq e^{\Delta x} \leq \frac{1}{1-\Delta x} \Big| \, - 1$$
$$\Delta x \leq e^{\Delta x} - 1 \leq \frac{\Delta x}{1-\Delta x}$$

Fall 1: Falls $0 \leq \Delta x \leq 1$ erhalten wir durch Division durch Δx:

$$1 \leq \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \leq \frac{1}{1-\Delta x}$$
$$\frac{1}{1-\Delta x} \leq \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \leq 1$$



Der mittlere Term ist somit eingeschrankt zwischen 1 und $\frac{1}{1-\Delta x}$, der für $\Delta x \to 0$ ebenfalls 1 wird.

Damit ergibt sich schließlich: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$ und damit ist wieder

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

Den allgemeinen Fall erhalten wir dann einfach unter Anwendung der Kettenregel:

$$(q^x)' = (e^{\ln(q) \cdot x})' = e^{\ln(q) \cdot x} \cdot ln(q) = q^x \cdot ln(q)$$

Momentane Änderung(srate) - Herleitung 2

Wir starten bei der momentanen Änderung des natürlichen Logarithmus:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Momentane Änderung(srate) - Herleitung 2

Wir starten bei der momentanen Änderung des natürlichen Logarithmus:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Setzen wir nun $\frac{x}{\Delta x} = n$, so geht n für $\Delta x \to 0$ gegen ∞, womit dann gilt:

$$\frac{1}{x} \cdot \lim_{n \to \infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{x} \cdot \ln(e) = \frac{1}{x}$$

Momentane Änderung(srate) - Herleitung 2

Wir starten bei der momentanen Änderung des natürlichen Logarithmus:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln(\frac{x+\Delta x}{x}) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln((1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}})^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Setzen wir nun $\frac{x}{\Delta x} = n$, so geht n für $\Delta x \to 0$ gegen ∞, womit dann gilt:

$$\frac{1}{x} \cdot \lim_{n \to \infty} \ln(1+\frac{1}{n})^n = \frac{1}{x} \cdot \ln(e) = \frac{1}{x}$$

Für die Exponentialfunktion ergibt sich dann:

$$\ln(e^x) = x$$
$$\frac{1}{e^x}(e^x)' = 1 \Rightarrow (e^x)' = e^x$$

Zugang 3: Die Änderungsmaße

Momentane Änderung(srate) - Herleitung 2

Wir starten bei der momentanen Änderung des natürlichen Logarithmus:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln(\frac{x+\Delta x}{x}) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln((1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}})^{\frac{1}{x}} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Setzen wir nun $\frac{x}{\Delta x} = n$, so geht n für $\Delta x \to 0$ gegen ∞, womit dann gilt:

$$\frac{1}{x} \cdot \lim_{n \to \infty} \ln(1+\frac{1}{n})^n = \frac{1}{x} \cdot \ln(e) = \frac{1}{x}$$

Für die Exponentialfunktion ergibt sich dann:

$$\ln(e^x) = x$$
$$\frac{1}{e^x}(e^x)' = 1 \Rightarrow (e^x)' = e^x$$

Den allgemeinen Fall erhalten wir wieder zuvor unter Anwendung der Kettenregel:

$$(q^x)' = (e^{\ln(q)\cdot x})' = e^{\ln(q)\cdot x} \cdot ln(q) = q^x \cdot ln(q)$$

Zugang 4: Ein diskretes und kontinuierliche Wachstumsmodell

Die explizite Darstellung der Folge bzw. die Funktion ist ja nicht Ausgangspunkt sondern eigentlich das Ergebnis ...

... die explizite geometrische Folge ergibt sich als Lösung der Differenzengleichung des exponentiellen Wachstums

....die Exponentialfunktion ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung des exponentiellen Wachstums

Zugang 4: Ein diskretes und kontinuierliche Wachstumsmodell

Das diskrete Wachstumsmodell
Ausgangspunkt: Schrittweises Wachstum bei dem der Zuwachs proportional zum aktuellen Bestand ist und ein Anfangswert bekannt ist.

Mittlere Änderung pro Zeitschritt Δt:
$\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta t} = k_{\Delta t} \cdot y_n$ und y_0 gegeben

Zugang 4: Ein diskretes und kontinuierliche Wachstumsmodell

Das diskrete Wachstumsmodell

Ausgangspunkt: Schrittweises Wachstum bei dem der Zuwachs proportional zum aktuellen Bestand ist und ein Anfangswert bekannt ist.

Mittlere Änderung pro Zeitschritt Δt:
$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = k_{\Delta t} \cdot y_n$ und y_0 gegeben

Iterationsgleichung:
$y_{n+1} = y_n + k_{\Delta t} \cdot y_n \cdot \Delta t$ und y_0 gegeben

Zugang 4: Ein diskretes und kontinuierliche Wachstumsmodell

Das diskrete Wachstumsmodell

Ausgangspunkt: Schrittweises Wachstum bei dem der Zuwachs proportional zum aktuellen Bestand ist und ein Anfangswert bekannt ist.

Mittlere Änderung pro Zeitschritt Δt:

$\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta t} = k_{\Delta t} \cdot y_n$ und y_0 gegeben

Iterationsgleichung:

$y_{n+1} = y_n + k_{\Delta t} \cdot y_n \cdot \Delta t$ und y_0 gegeben

Für $\Delta t = 1$ ergeben sich daraus die wohlbekannten Schritte:

$$y_1 = y_0 + k_1 \cdot y_0 = y_0 \cdot (1 + k_1) = y_0 \cdot q$$

$$y_2 = y_1 \cdot q = y_0 \cdot q^2$$

$$y_3 = y_2 \cdot q = y_0 \cdot q^3$$

...

$$y_n = y_{n-1} \cdot q = y_0 \cdot q^n$$

$$y_n = y_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n = y_0 \cdot (1 + k_1)^n = y_0 \cdot q^n$$

Zugang 4: Ein diskretes und kontinuierliche Wachstumsmodell

Das kontinuierliche Wachstumsmodell

Ausgangspunkt: Kontinuierliches Wachstum bei dem der Zuwachs proportional zum aktuellen Bestand ist und ein Anfangswert bekannt ist.

Zugang 4: Ein diskretes und kontinuierliche Wachstumsmodell

Das kontinuierliche Wachstumsmodell
Ausgangspunkt: Kontinuierliches Wachstum bei dem der Zuwachs proportional zum aktuellen Bestand ist und ein Anfangswert bekannt ist.

Momentane Änderung:

$\frac{dy}{dt} = \lambda \cdot y$

$\frac{1}{y} dy = \lambda \cdot dt$

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \lambda \cdot dt$

$\ln|y| = \lambda \cdot t + c$

$e^{ln|y|} = e^{\lambda \cdot t + c}$

$|y| = \underbrace{e^{k \cdot t + c}}_{>0}$

$y(t) = e^{\lambda \cdot t + c} = e^{k \cdot t} \cdot e^{c}$

Da $y(0) = e^{\lambda \cdot 0} \cdot e^{c} = e^{c} \Rightarrow y(t) = y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

Link: Exponentielles Wachstum kontinuierlich
Link: Diskretes und kontinuierliches exponentielles Wachstum in der Gegenüberstellung

Potenzieren - Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} x^k$$

$$(1+\frac{x}{1000})^{1000} = 1 + \frac{1000}{1!}(\frac{x}{1000}) + \frac{1000 \cdot 999}{2!}(\frac{x}{1000})^2 + \frac{1000 \cdot 999 \cdot 998}{3!}(\frac{x}{1000})^3 + \dots$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + 0,999 \cdot \frac{x^2}{2!} + 0,999 \cdot 0,998 \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Tabelle

B2 =B1 / A1

	A	B	C	D
1	1	1		
2	2	1		
3	3	0.5		
4	4	0.166666666666667		
5	5	0.041666666666667		
6	6	0.008333333333333		
7	7	0.001388888888889		
8	8	0.000198412698413		
9	9	0.000024801587302		
10	10	0.000002755731922		
11	11	0.000000275573192		
12	12	0.000000025052108		
13	13	0.000000002087676		2.718281828286169

Zugang 5: Die numerische Seite der Euler'schen Zahl

Reihenentwicklung - Taylor'scher Lehrsatz

Wir wollen die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ in der Nähe von $x_0 = 0$ durch Polynome vom Grad 1, 2 und 3 approximieren.

Reihenentwicklung - Taylor'scher Lehrsatz

Wir wollen die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ in der Nähe von $x_0 = 0$ durch Polynome vom Grad 1, 2 und 3 approximieren.

Ansatz: $p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Da wir 4 Koeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0 ermitteln müssen, benötigen wir 4 Gleichungen:

Zugang 5: Die numerische Seite der Euler'schen Zahl

Reihenentwicklung - Taylor'scher Lehrsatz

Wir wollen die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ in der Nähe von $x_0 = 0$ durch Polynome vom Grad 1, 2 und 3 approximieren.

Ansatz: $p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Da wir 4 Koeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0 ermitteln müssen, benötigen wir 4 Gleichungen:

gleiche Funktionswerte bei $x_0 = 0 \quad \Rightarrow I : p(0) = f(0)$
gleiche Steigung in $x_0 = 0 \quad \Rightarrow II : p'(0) = f'(0)$
gleiche Krümmung in $x_0 = 0 \quad \Rightarrow III : p''(0) = f''(0)$
gleiche Änderung der Krümmung in $x_0 = 0 \quad \Rightarrow IV : p'''(0) = f'''(0)$

Von beiden Funktionen p und f benötigen wir die Werte der 1., 2. und 3. Ableitung bei $x_0 = 0$:

$p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \Rightarrow p(0) = a_0$ und $f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 0$
$p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 \Rightarrow p'(0) = a_1$ und $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$
$p''(x) = 6a_3x + 2a_2 \Rightarrow p''(0) = 2a_2$ und $f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$
$p'''(x) = 6a_3 \Rightarrow p'''(0) = 6a_3$ und $f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = 1$

Zugang 5: Die numerische Seite der Euler'schen Zahl

Reihenentwicklung - Taylor'scher Lehrsatz

Wir wollen die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ in der Nähe von $x_0 = 0$ durch Polynome vom Grad 1, 2 und 3 approximieren.

Ansatz: $p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Da wir 4 Koeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0 ermitteln müssen, benötigen wir 4 Gleichungen:

gleiche Funktionswerte bei $x_0 = 0 \quad \Rightarrow I : p(0) = f(0)$
gleiche Steigung in $x_0 = 0 \quad \Rightarrow II : p'(0) = f'(0)$
gleiche Krümmung in $x_0 = 0 \quad \Rightarrow III : p''(0) = f''(0)$
gleiche Änderung der Krümmung in $x_0 = 0 \quad \Rightarrow IV : p'''(0) = f'''(0)$

Von beiden Funktionen p und f benötigen wir die Werte der 1., 2. und 3. Ableitung bei $x_0 = 0$:

$p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \Rightarrow p(0) = a_0$ und $f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 0$
$p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 \Rightarrow p'(0) = a_1$ und $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$
$p''(x) = 6a_3x + 2a_2 \Rightarrow p''(0) = 2a_2$ und $f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$
$p'''(x) = 6a_3 \Rightarrow p'''(0) = 6a_3$ und $f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = 1$

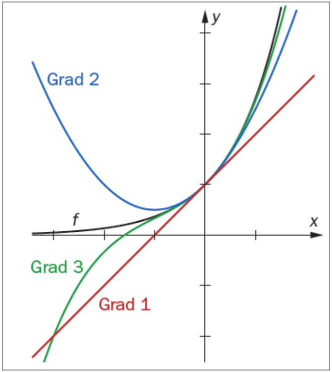
Wir erhalten und lösen folgendes Gleichungssystem:

I: $a_0 = 1$
II: $a_1 = 1$
III: $2a_2 = 1$
IV: $6a_3 = 1$

$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow p(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + x + 1$

Zugang 5: Die numerische Seite der Euler'schen Zahl

Reihenentwicklung - Taylor'scher Lehrsatz



Für die gesamte Exponentialfunktion ergibt sich dann die bekannte Reihenentwicklung:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Damit ergibt sich für e selbst:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$$

Zwei erstaunliche Kettenbruchentwicklungen

Von Euler selbst stammt die klassische Version:
$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \ldots]$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}}$$

Die Zahl e ist also offenbar sehr gerade!

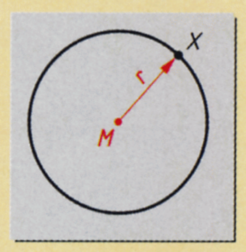
Zwei erstaunliche Kettenbruchentwicklungen

Der italienische Mathematiker Ernesto Cesàro (1859-1906) konnte darauf aufbauend folgende Version herleiten:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{7}{8 + \cdots}}}}}}}}$$

Die Zahl e beinhaltet zweimal die natürlichen Zahlen!

Der vektorielle Kreis



k ... $|X - M| = r$

k ... $\left|\binom{x-m_x}{y-m_y}\right| = r$

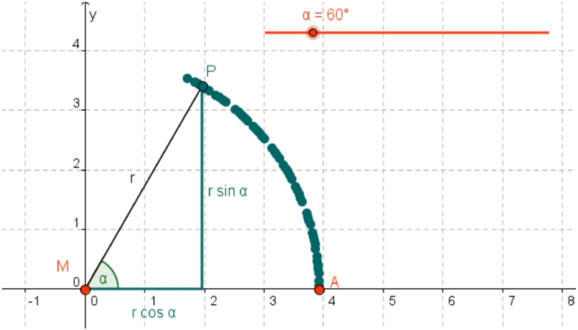
k ... $(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$

k ... $x^2 - 2xm_x + m_x^2 + y^2 - 2ym_y + m_y^2 = r^2$

k ... $x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

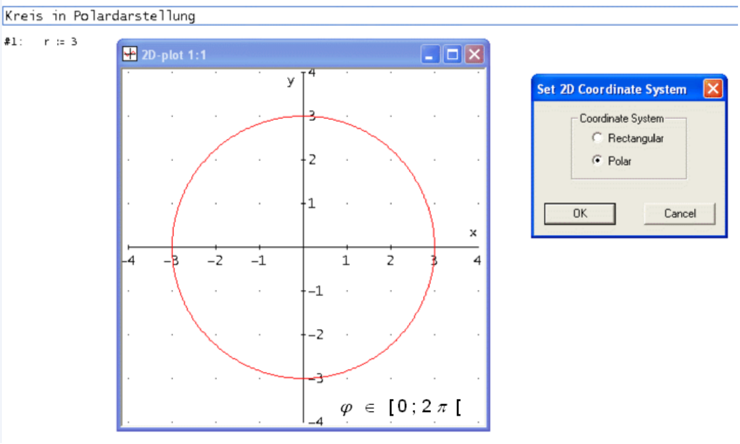
Zugang 6: Die Euler'sche Zahl und der Kreis

Der dynamische Kreis



$$k \ldots X = \begin{cases} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{cases} \quad \text{mit } t \in [0; 2\pi[$$

Der polare Kreis



k ... $r = r_0$

Zugang 6: Die Euler'sche Zahl und der Kreis

Der komplexe Kreis

$$\cos(x) = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

$$\sin(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

$$\Rightarrow e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\begin{aligned}
e^{i \cdot x} &= \frac{(i \cdot x)^0}{0!} + \frac{(i \cdot x)^1}{1!} + \frac{(i \cdot x)^2}{2!} + \frac{(i \cdot x)^3}{3!} + \frac{(i \cdot x)^4}{4!} + \frac{(i \cdot x)^5}{5!} + \dots \\
&= \frac{x^0}{0!} + i \cdot \frac{x^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \cdot \frac{x^5}{5!} + \dots \\
&= \left(\frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots\right) + i \cdot \left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\right) = \\
&= \cos(x) + i \cdot \sin(x)
\end{aligned}$$

Eulersche Formel

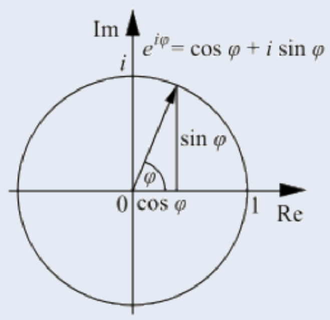
$$e^{i \cdot x} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

Zugang 6: Die Euler'sche Zahl und der Kreis

damit ergibt sich mit $x = \pi$ die schönste Formel der Mathematik:

$$e^{i\cdot\pi} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 \Rightarrow$$

$$e^{i\cdot\pi} + 1 = 0$$



Komplexe Kreisdarstellung: $z(\varphi) = r \cdot e^{i\cdot\varphi}$ mit r const., $\varphi \in [0; 2\pi[$

Zugang 6: Die Euler'sche Zahl und der Kreis

Die Geometrie der Zahl e

Aus der Euler'schen Formel folgen eine Fülle interessanter Zusammenhänge. Hier nur eine Andeutung davon:

Die Kettenlinie

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(Photo: Old Courthouse, Missouri)

(Photo: Benjamin Ulrich)

Cosinus- und Sinusdarstellung

$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

$e^{-ix} = \cos(x) - i \cdot \sin(x)$

$\Rightarrow e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x) \Rightarrow \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$\Rightarrow e^{ix} - e^{-ix} = 2i\cos(x) \Rightarrow \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Zugang 6: Die Euler'sche Zahl und der Kreis

Im Komplexen lässt sich einfach zeichnen

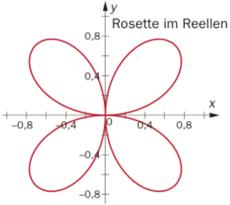
Mit Hilfe der Euler'schen Formel lassen sich ebene Kurven in die komplexe Zahlenebene bringen. Dort erwachen sie meist in veränderter, meist einfacherer Gestalt zu neuem Leben. Sehen wir uns dies am Beispiel der Rosenkurve (Rosette) an.

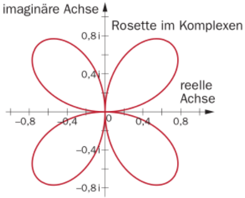
Sie besitzt die Paramterdarstellung:

$$x(\varphi) = \sin(2\varphi) \cdot \cos(\varphi)$$
$$y(\varphi) = \sin(2\varphi) \cdot \sin(\varphi)$$

Wenn wir nun die beiden Koordinaten der Parameterdarstellung als Real- und Imaginärteil interpretieren, so können wir die Euler'sche Formel anwenden und gewinnen so eine viel einfachere Darstellung der Rosette:

$$\Rightarrow z(\varphi) = x(\varphi) + i \cdot y(\varphi) = \sin(2\varphi) \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = \sin(2\varphi) \cdot e^{i\varphi}$$





Die Exponentialfunktion auf der komplexen Ebene betrachtet

Gehen wir von der Exponentialfunktion im Komplexen aus:

$$f(z) = r \cdot e^{i \cdot z}$$

Sei $z = x_1 + i \cdot x_2$ und $f(z) = u(z) + i \cdot v(z)$
wobei x_1 der Realteil und x_2 der Imaginärteil.

$$\begin{aligned} f(z) &= u(z) + i \cdot v(z) = \\ &= r \cdot e^{x_1 + i \cdot x_2} = r \cdot e^{x_1} \cdot e^{i \cdot x_2} = r \cdot e^{x_1} \cdot (\cos(x_2) + i \cdot \sin(x_2)) \end{aligned}$$

Schreiben wir die Real- und Imaginärteile in getrennter Form an:

$$f(z) = \binom{u(z)}{v(z)} = r \cdot e^{x_1} \cdot \binom{\cos(x_2)}{\sin(x_2)} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x_1, x_2) = r \cdot e^{x_1} \cdot \cos(x_2) \\ v(x_1, x_2) = r \cdot e^{x_1} \cdot \sin(x_2) \end{cases}$$

Veranschaulichung 1: mit zwei komplexen Ebenen
Link: Exponentialfunktion-komplex 1
Link: Exponentialfunktion-komplex 2
Link: Die ganze Exponentialfunktion (mit 3D-Version!)